Initiation mathématique suivie de L'éducation de demain

Charles-Ange Laisant

Édition critique de
Normand Baillargeon

Collection
Réminiscences

PUL

Avertissement aux lecteurs:

Les textes de Charles-Ange Laisant sont publiés dans leur intégralité sans remaniement ni correction linguistique, tels qu'ils ont été publiés à l'origine.

INITIATION MATHÉMATIQUE

suivie de

L'ÉDUCATION DE DEMAIN

Collection
Réminiscences

Dirigée par
Normand Baillargeon

La collection Réminiscences publie des ouvrages classiques de science et de philosophie devenus introuvables ou jamais encore publiés en français. Chaque volume comprend une substantielle introduction qui présente l'ouvrage et son auteur, et qui en actualise le propos.

Charles-Ange Laisant

INITIATION MATHÉMATIQUE

suivie de

L'ÉDUCATION DE DEMAIN

Textes présentés par
Normand Baillargeon

PUL
Presses de l'Université Laval

Financé par le gouvernement du Canada
Funded by the Government of Canada | Canada

Nous remercions le Conseil des arts du Canada de son soutien.
We acknowledge the support of the Canada Council for the Arts.

Conseil des arts du Canada | Canada Council for the Arts

Les Presses de l'Université Laval reçoivent chaque année du Conseil des Arts du Canada et de la Société de développement des entreprises culturelles du Québec une aide financière pour l'ensemble de leur programme de publication.

SODEC Québec

Maquette de couverture : Laurie Patry

Mise en pages : Danielle Motard

ISBN : 978-2-7637-4566-4
ISBN pdf : 9782763745671

Imprimé au Canada
Dépôt légal 3e trimestre 2019

Les Presses de l'Université Laval
www.pulaval.com

TABLE DES MATIÈRES

INITIATION MATHÉMATIQUE

L'ÉDUCATION DE DEMAIN

INTRODUCTION

Les textes qu'on va lire ne sont pas, loin de là, les seuls que son auteur, Charles-Ange Laisant (1841-1920), aura consacrés à l'éducation et à l'enseignement, aux vastes problèmes et aux complexes enjeux qu'ils soulèvent.

C'est que des problématiques et des travaux que nous regrouperions aujourd'hui sous les appellations de philosophie de l'éducation, d'une part, et de didactique (notamment des mathématiques et des sciences) d'autre part, ont été, pour Laisant, de vives et constantes préoccupations.

Il les abordait toutefois en y apportant deux éléments qui singularisent ses travaux.

Le premier est un idéal libertaire, assez tardivement atteint sans doute, mais qui nourrit chez lui tout à la fois une critique de l'éducation telle qu'elle est alors pratiquée et une riche et féconde conception de ce qu'elle pourrait et devrait être.

Le deuxième est une grande et profonde connaissance des mathématiques et de leur enseignement. Laisant est en effet un polytechnicien, un enseignant et un chercheur qui signe en mathématiques des travaux de haut niveau. Et cette riche expertise, ainsi que son amour des mathématiques, imprègnent sa conception de l'enseignement de cette discipline.

Son œuvre de pédagogue, de didacticien des mathématiques et de philosophe de l'éducation reste, on va le constater, d'un grand intérêt et, par certains aspects au moins, d'une brûlante actualité, et c'est pour cette raison qu'il nous a paru souhaitable de faire connaître, en la republiant, cette *Initiation mathématique*[1] devenue introuvable et qui en constitue une pièce maîtresse. Nous y avons adjoint la brochure *L'éducation de demain*[2], dans laquelle Laisant expose ses conceptions plus générales et philosophiques sur l'éducation.

Dans les pages qui suivent, et afin de préparer la lecture de ces textes, nous souhaitons accomplir essentiellement deux choses.

La première est de brièvement rappeler qui était Charles-Ange Laisant, qui demeure, hélas, une figure encore trop méconnue. Nous soulignerons pour ce faire les grandes lignes de son parcours intellectuel et militant. Laisant, comme on le verra, est une figure importante de la vie politique de son temps, un membre actif et influent de la communauté scientifique et un acteur majeur de la réflexion pédagogique

---

1. Nous avons repris la neuvième édition de l'ouvrage, parue à la Librairie Hachette et cie en 1910. L'*Initiation mathématique* était d'abord parue dans la Collection des « Initiations scientifiques » fondée par Laisant et portait en sous-titre : *Ouvrage étranger à tout programme et dédié aux amis de l'enfance*.

2. Ce texte est paru dans le journal *Les Temps Nouveaux*, n° 68, 1913.

qui est alors menée dans de nombreux milieux, entre autres parmi les anarchistes.

La deuxième est de présenter la conception de l'éducation qu'il défend ainsi que ses idées sur l'éducation et sur la didactique, tout particulièrement des mathématiques, en démontrant que leur pertinence et leur intérêt sont toujours actuels.

* * *

Sa vie et son œuvre

Charles-Ange Laisant est né le 1er novembre 1841 à Basse-Indre, près de Nantes, commune située dans le département de la Loire-Atlantique, alors appelé Loire-Inférieure. Il est le fils unique d'une famille politiquement militante.

Après avoir étudié au Lycée de Nantes, il part en 1858 pour Paris afin de préparer, à l'école Sainte-Barbe, le redouté concours d'entrée à l'École polytechnique, où il est admis en 1859. Ces années de formation en mathématiques sont cruciales, en raison des cours que Laisant y suit, bien entendu, mais aussi pour les rencontres qu'il fait et les amitiés qu'il noue.

En 1861, Laisant sort de Polytechnique et entreprend une carrière militaire dans le génie, voie qu'empruntent à cette époque plusieurs polytechniciens en raison notamment de la forte demande militaire en génie et des stimulants défis que cette carrière invite à affronter. Il poursuit sa formation à l'École d'application de l'artillerie et du génie, à Metz, dont il sort deux ans plus tard, le 1er octobre 1863. Il se marie en 1865 et poursuit durant quelques années une carrière militaire à Metz, puis à Montpellier, à Brest et à Nantes. Il est bien vu de ses supérieurs et gravit les échelons de la hiérarchie militaire.

Capitaine durant la guerre franco-prussienne (1870-1871), chargé des travaux de défense du Fort d'Issy, il reçoit pour sa conduite la Légion d'honneur. Il quitte l'armée en 1875 et obtient deux ans plus tard un doctorat en mathématiques. À cette date, il est déjà impliqué dans la vie politique de la Troisième République – il sera député de la Loire-Inférieure jusqu'en 1885, puis de la Seine, jusqu'en 1893. Il défend à ce titre des positions qui marquent son appartenance à la gauche radicale, rédige des pamphlets politiques et collabore à divers journaux. Son ouvrage, *L'anarchie bourgeoise,* virulente condamnation du parlementarisme et ralliement au boulangisme, date de cette époque (1887), tout comme sa participation à la Ligue des Patriotes.

Son anarchisme s'affirmant de plus en plus, Laisant, en 1893, quitte la politique active pour se consacrer à l'enseignement, à la recherche, à l'animation de la communauté mathématique nationale et internationale et à la pédagogie. Jérôme Auvinet, à qui nous sommes redevables pour nombre des informations qui suivent, a suggéré – ce qui est très plausible – qu'à cette époque « progresse dans [son] esprit l'idée que c'est par l'éducation et l'enseignement des sciences en particulier, plus que par des réformes politiciennes que des progrès pourront advenir dans la société[3] ». C'est bien entendu durant cette période et dans le cadre de ses activités à la fois pédagogiques et militantes qu'il publie les deux textes ici réunis.

Parallèlement à ces activités, Laisant mène des recherches en mathématiques pures, auxquelles nous ne pouvons espérer rendre justice ici[4], et il déploie de très substantiels efforts en faveur de la vie scientifique nationale et, avec d'autres éminents collègues à l'étranger, multiplie les initiatives pour constituer une communauté internationale de mathématiciens.

Membre depuis 1874 de la Société mathématique de France, il en devient le président en 1888 ; il est très actif au sein de la Société française pour l'avancement des sciences, fondée en 1872 ; il propose, notamment avec Félix Klein (849-1925) et Georg Cantor (1845-1918), l'idée de congrès internationaux de mathématiques, qui se concrétisera peu après (1897). Le quatrième de ces congrès, tenu en 1908 à Rome, recommandera la création d'une Commission internationale de l'enseignement mathématique (ICME) et, en 1910, Laisant en fera partie au titre de l'un des trois représentants de la France. Enfin, en 1894, Laisant crée avec Émile Lemoine (1840-1912) la revue *L'intermédiaire des mathématiciens* qui ambitionne

3. Jérôme Auvinet, 2011, *Charles-Ange Laisant. Itinéraires et engagements d'un mathématicien, d'un siècle à l'autre (1841-1920)*, thèse de doctorat, Université de Nantes, p. 439.

4. Ses travaux sur la méthode des équipollences, notamment, sont souvent cités et font de Laisant l'un des introducteurs en France de l'algèbre vectorielle.

de permettre aux mathématiciens de tous les niveaux, depuis les plus savants jusqu'aux simples amateurs, d'échanger entre eux. Cette ambition, qui est à la fois scientifique, pédagogique, mais aussi politique est soulignée par les deux fondateurs de la revue dès le premier numéro :

[l]a Science est la grande pacificatrice, l'agent de civilisation le plus noble et le plus puissant ; les études mathématiques, surtout [...] sont de nature à rapprocher dans une commune entente des hommes animés d'une ardeur égale pour la recherche de la vérité[5].

Mais revenons à ses activités d'éducateur et de pédagogue, celles qui nous intéressent ici.

En 1893, Laisant est enseignant à l'école Monge, une école ouverte depuis 1869 mais qui sera intégrée au réseau public dès l'année suivante. Celle-ci participe du mouvement en cours de modernisation de l'éducation : par exemple, on entend y minorer la place de la simple mémorisation et on y accorde plus de libertés et de responsabilités aux élèves. Laisant y fait la rencontre de Xavier Antomari (1855-1902), avec qui il dirigera les *Nouvelles annales de mathématiques* de 1896 à 1901.

---

5. Charles-Ange Laisant et Émile Lemoine, « Préface », *L'intermédiaire des mathématiciens*, vol. 1, n° 1, 1894, cités par Pierre Lamandé, « Une personnalité du monde de l'Éducation nouvelle. Charles Ange Laisant (1841-1920) et son combat politique pour une éducation rationnelle fondée sur la science », *Paedagogica Historica*, vol. 1, 2010, p. 8-9.

En 1895, on le retrouve professeur à l'école Sainte-Barbe, où il avait lui-même étudié. La même année, il est nommé examinateur d'admission à l'Institut d'agronomie – fonction qu'il occupera jusqu'en 1897. Il y fait la rencontre de Mathieu Paul Hermann (1841-1908) avec qui il dirigera la partie consacrée aux mathématiques dans *La Grande Encyclopédie*[6].

Toujours en 1895, il devient répétiteur de mécanique à l'École polytechnique, puis, en 1899, examinateur d'admission dans la même institution – il le restera jusqu'en 1913. Son intérêt pour la pédagogie s'approfondit et se traduit par une activité débordante et par un grand nombre de publications dont ce qui suit ne donne qu'une idée.

Après 1893, Laisant, devenu anarcho-syndicaliste, s'est rapproché non seulement de Fernand Pelloutier (1867-1901), le grand penseur et militant de l'anarcho-syndicalisme en France, mais aussi, bien entendu, de ces nombreux anarchistes intéressés par l'éducation et ses problèmes, comme Sébastien Faure (1858-1942) ou Francesco Ferrer (1859-1909), qui est alors à Paris[7] et dont il devient l'ami.

---

6. *La Grande Encyclopédie. Inventaire raisonné des sciences, des lettres et des arts, par une société de savants et de gens de lettres*, est publiée en 31 volumes entre 1886 et 1902, d'abord sous la direction d'Henri Lamirault, puis par la Société anonyme de la Grande Encyclopédie. Elle se proposait notamment d'actualiser la célèbre *Encyclopédie* de Diderot et D'Alembert, entre autres en faisant aux sciences la place qui leur revient.

7. Laisant sera très actif dans la campagne, hélas infructueuse, pour faire annuler la condamnation à mort de Ferrer en 1909, qui était revenu en Espagne, sentence qui sera finalement exécutée en octobre de cette même année, à Barcelone. Il militera aussi pour

Avec Pierre Kropotkine (1842-1921), Paul Robin (1837-1912) et quelques autres, il est au nombre des anarchistes qui collaborent à *L'École rénovée*, la revue que Ferrer a lancée en 1908 et qui souhaite apporter une réponse libertaire[8] aux nouveaux enjeux de l'éducation que le vaste mouvement de L'Éducation nouvelle, depuis Genève, et les idées de John Dewey (1859-1952), depuis le Nouveau Monde, ont soulevés. Quand cesse la publication de *L'école rénovée*, en 1909, Laisant se met à écrire, de 1910 à 1914, pour *L'école émancipée*, où paraîtront notamment certains des célèbres *Propos sur l'éducation* du philosophe Alain (pseudonyme d'Émile Chartier, 1868-1951).

Il crée en 1899, avec Henri Fehr (1870-1954), la revue *L'Enseignement mathématique*, qui se veut un espace de réflexion tant sur les réformes de l'enseignement rendues nécessaires par l'avancement des sciences, que sur la préparation du corps enseignant ; cette revue a des ambitions internationales qu'elle expose dès le premier numéro. Pierre Lamandé résume l'influence de cette revue en écrivant qu'elle aura

> joué un rôle unique dans la communauté mathématique (chercheurs et enseignants) durant la période 1899-1914. C'était un pont entre certains aspects de la recherche mathématique, le monde scolaire et la société. La revue fut aussi un forum

---

faire reconnaître la grande et irréparable injustice commise à son endroit par cette exécution, ce qui sera fait en 1912.

8. Sur ces pédagogues libertaires, on pourra consulter : Normand Baillargeon (dir.), *Éducation et liberté*, tome 1, *1793-1918*, Montréal, Lux, 2005.

> de discussion sur l'instruction et l'enseignement mathématiques et les réformes des cursus réalisées dans la majorité des pays au début du XXe siècle lui doivent beaucoup[9].

Laisant participe bien entendu aussi de ce vaste mouvement de production de manuels destinés à l'enseignement qui se déploie durant ces années. Il publie ainsi, entre 1893 et 1896, un *Recueil de problèmes* en six volumes, collabore à la rédaction de plusieurs manuels rédigés en collaboration avec Élie Perrin et Xavier Antomari, en plus d'en préfacer quelques-uns[10].

Ses idées sur l'éducation et la pédagogie sont en outre exposées dans plusieurs ouvrages et conférences, parmi lesquels *La Mathématique. Philosophie. Enseignement (1898),* ouvrage majeur et sur lequel nous reviendrons plus longuement ; *L'éducation fondée sur la science* (1904) ; *La barbarie moderne* (1912) ; ainsi que, bien entendu, cette *Initiation mathématique* (1906) et cette *Éducation de demain* (1913) ici réunies.

Durant la Première Guerre mondiale, Laisant signe le fameux *Manifeste des Seize*, initié par Kropotkine et Jean Grave (1854-1939), qui paraît dans *La Bataille* le 14 avril 1916. Le texte qui, comme on le sait, prend

9. Pierre Lamandé, « Une personnalité du monde de l'Éducation nouvelle. Charles-Ange Laisant (1841-1920) et son combat politique pour une éducation rationnelle fondée sur la science », *Paedagogica Historica*, vol. 47, nº 3, 2011, p. 283-301.

10. Les références à ces ouvrages se trouvent dans la bibliographie à la fin de cette introduction.

position en faveur des Alliés sera (et restera) l'objet de vives controverses parmi les anarchistes. On y lit :

> Pour notre part, nous nous refusons absolument à partager les illusions de quelques-uns de nos camarades, concernant les dispositions pacifiques de ceux qui dirigent les destinées de l'Allemagne. Nous préférons regarder le danger en face et chercher ce qu'il y a à faire pour y parer. Ignorer ce danger, serait l'augmenter. En notre profonde conscience, l'agression allemande était une menace – mise à exécution – non seulement contre nos espoirs d'émancipation, mais contre toute l'évolution humaine. C'est pourquoi nous, anarchistes, nous antimilitaristes, nous, ennemis de la guerre, nous, partisans passionnés de la paix et de la fraternité des peuples, nous nous sommes rangés du côté de la résistance et nous n'avons pas cru devoir séparer notre sort de celui du reste de la population[11].

La Guerre ne parviendra pas à faire renoncer Laisant à cette espérance qu'il plaçait en la raison, aux espoirs qu'il n'aura cessé de mettre dans le progrès et dans le savoir ; elle le confortera plutôt dans cette idée qu'il aura défendue toute sa vie, celle de l'importance primordiale de l'éducation des enfants pour maintenir vivants ces idéaux et espérer les réaliser.

Laisant meurt le 5 mai 1920, après, dira Raoul Bricard dans la notice nécrologique qu'il lui consacre dans les *Nouvelles annales de mathématiques*, « une vieillesse

---

11. Le texte est intégralement accessible en ligne [http://raforum.info/spip.php?article962&lang=en].

exempte, non d'infirmités, mais de souffrances. Son intelligence resta lucide jusqu'au bout ». Le même Bricard écrivait que « c'est dans ses ouvrages philosophiques et pédagogiques [...] que Laisant a exprimé les idées qui lui tenaient le plus à cœur[12] ».

Le moment est venu de les aborder.

Philosophie et enseignement des mathématiques

En 1898, on l'a vu, Laisant a fait paraître *La Mathématique. Philosophie. Enseignement*, un livre à la frontière de la didactique et de la philosophie des mathématiques qu'il destine aux personnes « qui étudient, qui ont étudié, qui enseignent ou qui appliquent les éléments de la science mathématique, sans se livrer à des travaux personnels purement scientifiques[13] ». Cet ouvrage présente certaines des thèses cardinales qui seront déployées quelques années plus tard dans *L'initiation mathématique* (1906) et il mérite pour cela que nous nous y attardions quelque peu.

Laisant défend dans ces pages deux idées cruciales pour l'enseignement de ce qu'il appelle, et c'est la première de ces idées, non pas les mathématiques, mais

---

12. Raoul Bricard, « Charles-Ange Laisant (1841-1920) », *Nouvelles annales de mathématiques*, 4^{e} série, tome XX, décembre 1920, p. 449-454.

13. Charles-Ange Laisant, *La Mathématique. Philosophie. Enseignement*, Paris, Georges Carré et C. Naud, 1898, p. 2 ; toutes les citations tirées de ce volume sont ensuite indiquées dans le texte sous le titre « La Mathématique ».

bien *la* mathématique, reprenant en cela « la forme de langage employée par Condorcet » (p. 3).

Laisant convient, bien entendu, que la plupart des mathématiciens sont désormais « contraints de se spécialiser et de consacrer leurs efforts, non pas seulement à une branche de la science, mais à un simple chapitre s'ils veulent arriver à produire des découvertes dignes d'être remarquées ». Mais il insiste : « au fond, il n'y a pas *des sciences mathématiques* […]. Il y a une vaste science : la mathématique » (p. 3). Comment la définir ?

Plusieurs propositions ont été faites, et Laisant rappelle certaines d'entre elles : la mathématique est la science des grandeurs ; elle a pour objet la mesure des grandeurs ; elle étudie l'ordre et la mesure ; elle se propose l'étude du nombre et de la forme (p. 13) ; il rappelle également celle d'Auguste Comte, « l'illustre fondateur de la philosophie positive », pour qui elle est « la mesure *indirecte* des grandeurs » (p. 17).

Mais ces définitions, soutient Laisant, ne peuvent être entendues que par qui possède déjà les définitions précises des concepts mis en œuvre (grandeur, nombre, forme) et qui, de ce fait, sait donc déjà ce qu'est la mathématique.

Laisant, on va le voir, avancera pour sa part non pas une définition de la mathématique, mais bien une description de ses composantes. Pour en apprécier la pertinence et en apercevoir les implications didactiques, il nous faut cependant introduire à présent la deuxième idée cruciale qu'avance Laisant dans cet ouvrage, à savoir que la mathématique, comme toute science, est expérimentale.

Au moment où les mathématiques (pour reprendre l'appellation devenue conventionnelle) s'apprêtent à entrer dans ce qui sera connu comme la crise de leurs fondements[14] et que, dans les efforts qui seront déployés pour la surmonter, sera essentiellement abandonné tout espoir de rendre compte des mathématiques dans cette perspective essentiellement empiriste, la position épistémologique que Laisant va déployer reste plausible, même si elle est déjà sans doute minoritaire et polémique. Le soupçonnant sans doute, il écrit :

> Au risque de surprendre et peut-être d'indigner certains philosophes, je me permets d'énoncer tout d'abord cet axiome : *Toutes les sciences sont expérimentales*. C'est, en somme, la reproduction de la formule célèbre : « Rien ne pénètre dans notre esprit qu'après avoir d'abord passé sous le témoignage de nos sens ». La Mathématique, pas plus qu'aucune autre science, n'échappe à

14. Ce n'est pas ici le lieu d'entrer dans ce vaste et complexe dossier. Disons très simplement que cette crise sera notamment suscitée par la découverte des paradoxes surgis dans la fondamentale théorie des ensembles ; par des questionnements soulevés par l'avènement des géométries non euclidiennes, développées dès la première moitié du XIXe siècle ; et qu'ils seront bientôt exacerbés par les travaux de Kurt Gödel (1906-1978) qui démontrait l'incomplétude des axiomatiques sitôt qu'elles sont suffisantes pour rendre compte de l'arithmétique (1931). Trois grandes écoles de métamathématiques apparaissent alors : l'intuitionnisme, défendu par L.E.J. Brower (1881-1966) ; le logicisme, défendu notamment par Bertrand Russell (1872-1970) et Alfred North Whitehead (1861-1947) ; et le formalisme, défendu par David Hilbert (1862-1943).

> cette loi. J'estime que sans la présence du monde extérieur aucune connaissance mathématique n'aurait jamais pu pénétrer dans le cerveau de l'homme ; et que, seul dans l'univers et réduit à l'état de pure intelligence, le plus incomparable génie n'arriverait jamais à la notion du nombre 2, ce génie fut-il celui d'un Archimède, d'un Gauss ou d'un Lagrange.
>
> (*La Mathématique*, p. 14-15).

Bien sûr, poursuit Laisant, la mathématique est singulière entre toutes les sciences par ce qu'elle emprunte « à l'expérience, au monde extérieur, un minimum de notions » (p. 15). Mais il reste que c'est bien, selon Laisant, dans l'expérience et relativement au monde extérieur que se trouve l'origine des idées mathématiques. On pressent sans doute déjà l'ampleur des conséquences didactiques de cette position épistémologique. Mais on les apercevra mieux en suivant Laisant quand il expose plus finement ses idées sur cette origine empiriste des idées mathématiques.

Voyons ce qu'il en dit et qui nous intéresse par excellence lorsque que l'on parle d'initiation mathématique, les rapports entre d'un côté les notions d'unité, de nombre abstrait, de nombre concret, et d'un autre côté de comptage et de mesure.

> ***Mesure et nombre.*** – En somme, nous vivons. Nous avons autour de nous des objets ; l'idée de comparer ces objets les uns avec les autres, de considérer les groupes qu'ils nous présentent, est naturelle à l'homme, et s'est assurément offerte à lui dès les premiers âges. Une observation

attentive nous révèle qu'il n'existe pas d'objets exactement pareils ; mais, par une opération de l'esprit qui ne demande aucun effort, bien qu'elle renferme à elle seule tout le secret de l'abstraction mathématique, nous assimilons entre eux les objets qui paraissent se ressembler, et nous renonçons momentanément à l'examen des différences qui les distinguent les uns des autres. De là vient l'origine du calcul ; l'action de *compter* semble en général toute simple à ceux-là mêmes qui sont le moins mathématiciens ; et cependant, si nous comptons des arbres dans un parc, nous savons fort bien que les arbres peuvent être d'essences différentes, qu'ils n'ont ni la même taille, ni le même âge, ni le même nombre de branches et de feuilles. Une pincée de grains de blé est jetée sur une table ; nous disons : voilà 25 grains de blé ; et, si nous nous mettons à les examiner avec une loupe, nous reconnaissons que chacun d'eux a son caractère spécial qui permettrait, s'il le fallait, de le distinguer de tous les autres. Mais, par une convention naturelle et même instinctive, nous avons, sous le vocable *arbre* ou *grain de blé,* créé une abstraction indispensable.

C'est ainsi que l'opération qui a pour but de *compter* nous devient familière, à ce point qu'il n'est pour ainsi dire plus nécessaire de la définir, toute définition étant moins compréhensible que le terme lui-même. Il en est à peu près de même de la mesure. Je veux apprécier la longueur d'une poutre ; j'ai une canne entre les mains ; je porte successivement la longueur de ma canne le long de la poutre ; je trouve qu'elle y peut être portée ainsi 12 fois, et j'énonce que la poutre a 12 fois la longueur de ma canne, ou, pour employer tout de suite le langage mathématique, qu'elle est mesurée par le nombre 12, en adoptant la longueur de la canne pour unité. De même, pour juger de la capacité d'une bouteille, je remplis d'eau un verre, je verse l'eau dans la bouteille et, ayant répété 7 fois cette opération, je dis que la bouteille contient 7 fois un verre, ou que sa capacité est 7, celle du verre servant d'unité.

Dans ces divers exemples, l'opération est au fond la même, en dépit des apparences ; nous nous attachons toujours à effectuer la comparaison de la chose que nous voulons évaluer avec une chose de même nature, que nous prenons pour *unité*. Que ce terme de comparaison soit un arbre, un grain de blé, la longueur d'un bâton ou la contenance d'un verre, que la chose à évaluer soit une collection d'objets, tels que des arbres ou des grains de blé, ou une longueur, ou une capacité, l'opération aboutit toujours à un résultat analogue ; 157 arbres, 25 grains de blé, 12 longueurs d'une canne, 7 capacités d'un verre sont des *nombres,* que nous appelons *concrets* lorsque nous exprimons, comme nous venons de le faire, la nature, l'espèce des grandeurs. Mais on conçoit que le nombre 25, par exemple, qui nous a servi à compter des grains de blé, pourra tout aussi bien nous servir s'il s'agit de n'importe quelle autre chose évaluable, et ce symbole 25 constituera un nombre *abstrait*.

(*La Mathématique*, p. 15-17)

Cet abstractionnisme constitue la réponse empirique classique à la question de l'origine des concepts[15] et

15. Notons qu'un rapprochement inattendu pourra être fait avec les idées défendues par la philosophe libertarienne Ayn Rand (1905-1982) à propos du processus d'abstraction, donnée pour « une attention sélective de l'esprit qui *extrait* ou sépare un certain aspect de la réalité de tous les autres (par exemple isole un certain attribut des entités qui le possèdent, ou une certaine action des entités qui l'accomplissent, etc.). L'unification mise en œuvre n'est pas une simple somme, mais une *intégration*, *c'est-à-dire* la fusion des unités dans une unité *mentale unique* et inédite, dont on se servira par la suite comme d'un seul élément de la pensée (mais que l'on peut décomposer en ses unités constitutives toutes les fois où c'est nécessaire) ». On notera aussi la similitude entre le processus de formation de concepts que décrit Rand et certaines des idées de Laisant que nous venons de rappeler. D'après Rand : « [l]e même principe dirige le processus de formation des concepts d'entités : par exemple, le concept de "table". L'esprit de l'enfant distingue d'autres objets deux ou plusieurs tables en se concentrant sur la caractéristique qui les distingue, à savoir leur forme. Il observe que leur forme varie, mais qu'elles ont une caractéristique en commun : une surface horizontale et plane, et des pieds. Il forme le concept de "table" en retenant cette caractéristique-là et en omettant *toutes* les mesures particulières, non seulement celles de la forme, mais de toutes les autres caractéristiques des tables (dont il ne sait pas grand-chose à ce moment-là). La définition d'une "table" par un adulte serait : "un objet fait par l'homme consistant en une surface horizontale et plane, avec des pieds, qui est là pour porter d'autres objets plus petits". Observez ce qu'on précise et ce qu'on omet dans cette définition : on précise et on conserve la caractéristique distinctive de la forme, et on omet les mesures particulière de la géométrie (si la surface est carrée, ronde, oblongue ou triangulaire, le nombre des pieds et leur forme, etc.), et celles de la taille et du poids : on précise qu'il s'agit d'un objet matériel, mais la matière dont il est faite on l'omet, laissant ainsi de côté les mesures qui différencient telle matière de telle autre, etc. Observez, cependant, que les nécessités d'usage de la table imposent certaines limites sur les mesures qu'on omet, sous forme de "pas plus grande que…" et "pas plus petite que…" exigées par sa fonction. Cela exclut une table haute de trois mètres ou une de cinq centimètres (quoiqu'on puisse cataloguer cette dernière comme un jouet ou une maquette) et proscrit les matières inadaptées, par exemple si elles ne sont pas solides. Conservez fermement à l'esprit que parler "d'omettre la

Laisant, tout en rappelant « qu'on peut la pousser plus ou moins loin » (p. 19) propose donc de l'étendre aux concepts mathématiques. On procède pour ce faire en trois moments.

Le premier, appelé celui de la mise en équation, qui « réalise le passage du concret à l'abstrait » est celui qui substitue au problème concret et pour cela confus et complexe une simplification, une « traduction rapprochée », l'abstraction (p. 20).

Le deuxième est celui de la « résolution des équations », du travail sur ces abstractions, travail qui s'accomplit par le seul recours aux « méthodes et procédés mathématiques ». « Les nombres, les formules, les symboles de toute espèce ne représentent ici plus rien en dehors des être logiques créés par le cerveau de l'homme » (p. 20).

---

mesure” ne signifie nullement, dans ce contexte, que l'on considérerait que les mesures n'existent pas : cela veut dire que *ces mesures existent, mais qu'on ne précise pas lesquelles* ; le fait que ces mesures doivent nécessairement exister est un élément essentiel du processus. Le principe est : il *doit* absolument exister des mesures *définies*, mais celles-ci peuvent prendre *n'importe quelle* valeur » ; Ayn Rand, *Introduction à l'épistémologie objectiviste,* chapitres 1 à 5, en ligne [http://goo.gl/Q7w3ah].

On pourra remarquer que cette interprétation de l'abstraction prolonge celle de *L'Encyclopédie* de Diderot – interprétation qui est la plus courante dans les textes de la pédagogie du XIX^e^ siècle – puisque l'article *Abstraire* commence par : « v. act. C'est faire une abstraction ; c'est ne considérer qu'un attribut ou une propriété de quelque être, sans faire attention aux autres attributs ou qualités ; par exemple, quand on ne considère dans le corps que l'étendue, ou qu'on ne fait attention qu'à la quantité ou au nombre… » ; voir, en ligne [http://encyclopédie.eu/index.php/916015436].

Le troisième moment est celui « du retour de l'abstrait au concret », vers ce qui a donné naissance aux abstractions et au travail accompli sur elles en y cherchant, le cas échéant, de possibles solutions à des problèmes et dont l'expérience décidera de la valeur, devant le point d'arrivée d'un parcours dont elle fut aussi le point de départ.

Revenons à cette idée de mathématique dont nous sommes partis. Laisant propose, conformément au processus d'abstraction puis de retour au concret qu'il vient de décrire, de distinguer une Mathématique pure et une Mathématique appliquée, en relation intime l'une avec l'autre. « La vérité, c'est que sans la Mathématique pure, l'application serait impossible ; et sans l'intervention de la Mathématique appliquée, la Mathématique pure ne peut donner de résultats exacts dans le monde des abstractions » (p. 10).

Il suggère que la Mathématique pure, quant à elle, a trois composantes : la science du calcul, la science de l'étendue et la science du mouvement. Donnons brièvement une idée de cette tripartition.

La première se déploie en calcul (étude des nombres et des opérations sur les nombres) à proprement parler, en étude des procédés de calcul et en cette étude des propriétés qui appartiennent aux nombres et qu'il nomme « arithmologie » – le théorème de Fermat, la conjoncture de Goldbach et le théorème de Catalan –, de même que des suites (comme celle Fibonaccci), la formation des puissances d'un binôme et le triangle de Pascal sont entre autres donnés en exemple d'objets étudiés en arithmologie.

L'introduction de symboles représentant des opérations et des inconnues conduit à l'Algèbre et à l'étude des fonctions, qui, avec la notion de continu, conduit au Calcul.

La géométrie introduit l'étude des positions et des formes dans l'espace et se prolonge en géométrie analytique. La dernière composante de cet ensemble qui constitue la mathématique pure est la mécanique rationnelle, consacrée à l'étude du mouvement dans l'espace.

Tout cela est lourd d'implications pédagogiques et dès les premières pages de ce livre, Laisant insiste d'ailleurs sur « la nécessité des choses [qui nous] contraindra à sortir de la routine dont nous ne sommes pas encore dégagés, et à retourner une formule qui peut sans exagération se résumer ainsi : tout attendre de la mémoire et presque rien de l'intelligence » (p. 7).

Laisant rappelle plusieurs conséquences pédagogiques de sa philosophie des mathématiques dans la section de son livre consacrée à l'enseignement où, après des considérations générales sur l'enseignement de la mathématique, il traite tour à tour de celui des composantes qu'il a proposé d'y distinguer.

Deux axiomes sont posés :

1- Dans le milieu actuel, des notions mathématiques sont nécessaires à tous.

2- Chaque intelligence moyenne[16] est apte à acquérir ces notions, restreintes à de certaines limites.

(*La Mathématique*, p. 187)

Il faut bien entendu pour cela que diverses conditions pratiques soient remplies, relatives au nombre d'élèves par classe, à la formation des maîtres, et ainsi de suite. Mais sur le fond, le problème est « éternellement le même : intéresser l'élève, le provoquer à la recherche, lui donner sans cesse le sentiment, l'illusion si l'on veut, qu'il découvre de lui-même ce qui lui est enseigné » (*La Mathématique*, p. 189)

---

16. Il faut entendre « moyenne » non pas au sens statistique mais au sens de « normale et non pathologique » ; à la page suivante, Laisant détaille ce que sont ces notions, qu'il nomme *éléments*.

> « On voit, en résumé, quelle est notre conclusion. De l'aptitude naturelle, aucun compte à tenir s'il s'agit de l'étude des éléments ; le plus grand compte, au contraire, s'il est question de pousser plus haut, et surtout d'affronter des concours difficiles.
>
> Mais, en dehors de la difficulté de bien apprécier les aptitudes naturelles, ce qui exige du jugement et une longue observation, l'on est en droit de se demander quelle est la limite ainsi tracée ; où s'arrêtent ce que nous appelons les éléments. Je crois qu'on pourrait sans inconvénient grouper sous ce titre, sans que cela ait rien d'absolu, *ce que contiennent les programmes de l'ancien baccalauréat ès sciences*, complétés par les notions qu'on a introduites avec juste raison dans l'enseignement secondaire moderne, et par quelques vues rapides sur la géométrie moderne, qui manquent à trop de jeunes gens. Cela ne veut pas dire que tous les enfants devront acquérir l'ensemble de ces notions élémentaires ; *ils le peuvent tous en vertu de leurs facultés naturelles* ; mais malheureusement les nécessités de la vie obligeront un grand nombre d'entre eux à interrompre prématurément le cours de leurs études » (*La Mathématique*, p. 188, nous soulignons).

La méthode préconisée sera expérimentale, et, dans sa première phase, l'enfant devra, « en présence des réalités concrètes qu'il touche, qu'il voit, faire lui-même ses abstractions ». De son côté le maître s'efforcera

> de ne *jamais* essayer de rien lui démontrer ; de se borner à lui fournir les explications qu'il se trouvera conduit à solliciter de lui-même ; de conserver enfin à cet enseignement [...] une apparence d'amusement et non pas celle d'un travail imposé.
>
> (*La Mathématique*, p. 203-204)

L'initiation mathématique, comme nous le verrons à présent, montre en acte ces préceptes.

Un ouvrage ambitieux qui n'a rien perdu de son intérêt

Cet ouvrage est issu d'un cycle de quatre conférences prononcées par Laisant à l'Institut psycho-physiologique de Paris entre 1899 et 1903.

La publication en volume d'une version plus longue, en 1906, sous le titre *L'initiation mathématique,* inaugure une collection appelée « Initiations scientifiques » qui comprendra des volumes consacrés à l'*Initiation à l'astronomie* (Camille Flammarion en est l'auteur), à l'*Initiation chimique*, à l'*Initiation à la mécanique*, à l'*Initiation zoologique* et à l'*Initiation physique*.

Laisant destine son ouvrage à l'éducateur et l'invite à ne pas « le suivre servilement » mais à plutôt s'en inspirer afin d'initier l'enfant aux vérités mathématiques. Il présente cette tâche comme constituant un « sauvetage de l'enfance » contre ceux qui déforment les jeunes cerveaux – de l'enfance, car Laisant est parfaitement conscient que ce qui prévaudra ensuite, pour les plus grands comme pour ceux qui se destineront à l'étude plus avancée ou spécialisée des mathématiques, est bien différent.

Les principes mis en œuvre sont ceux que l'on devine. Laisant, inlassablement et on le constatera à chaque page, préconise de miser sur la curiosité de l'enfant, sur le jeu, sur le plaisir entretenu de la découverte faite parce qu'habilement préparée, sur la manipulation d'objets concrets et sur le dessin.

Par l'abstractionnisme qu'il défend, Laisant se situe, en didactique et en pédagogie, dans une tradition sensualiste, empiriste, qu'on peut faire remonter à celui que l'on considérait à juste titre – selon l'expression de Jules Michelet – comme « le Copernic de l'éducation », je veux dire Comenius. À la fin du XVIII^e^ et au début du XIX^e^ siècles, ce courant pédagogique sensualiste a entre autres comme figure de proue Johann Heinrich Pestalozzi (1746-1842) qui pose en des termes empiristes partagés par Laisant le problème du passage de la perception au concept, du concret à l'abstrait. Le concept que Pestalozzi propose pour le résoudre est celui d'*Anschauung*, que l'on traduira en français par « intuition sensible » qui donne donc son nom à la « méthode intuitive » ; pour Pestalozzi, le concept est arraché aux sensations par les catégories de nombre, de mot et de forme, d'où l'importance accordée au dessin, au langage et aux mathématiques dans la formation intellectuelle.

À plusieurs reprises dans ce livre, Laisant a recours à des jeux et à des énigmes. Son attirance pour eux est bien connue, ainsi que sa reconnaissance de leurs vertus éducationnelles, et il est par cela intéressant de le rapprocher de cet autre remarquable pédagogue et vulgarisateur de mathématiques du XX^{e} siècle qu'était Martin Gardner (1914-2010), ce dernier ayant d'autant plus de mérite qu'il était autodidacte. Laisant précise cependant que si, dans ces jeux et énigmes, il s'agit « d'appliquer à des sujets amusants, jeux divers, combinaisons, etc., les théories mathématiques déjà connues », dans le cadre de l'initiation qu'il propose,

> nous nous servirons de questions amusantes comme moyen pédagogique, pour attirer la curiosité de l'enfant et arriver ainsi à faire pénétrer dans son esprit, sans efforts imposés, les premières notions mathématiques les plus essentielles. Et la diversité des questions, qui pourrait faire croire à un désordre apparent, cache une suite d'idées, voulues, utiles et complètement ordonnées.
>
> (*La Mathématique*, p. 7)

Sur ses bases, *L'initiation mathématique* se décline en 65 chapitres (désignés par les chiffres en italiques entre parenthèses ci-après) au développement inspiré de la définition de la mathématique qu'on a rappelée. Il suffira ici, pour en préparer la lecture, d'en donner un aperçu sommaire, en insistant néanmoins sur quelques aspects particulièrement notables.

Laisant commence par la numération abordée par les bâtonnets, dessinés, regroupés et positionnés, ce qui prépare aux grands nombres. Suit le calcul et dans ces développements, interrompus par un chapitre initiant à l'algèbre (*14*), on notera l'introduction des tables d'addition (*5*), de la méthode dite musulmane de multiplication (*17*) (qui épargne à l'enfant les retenues multiples), de la présentation de nombres premiers par le crible d'Ératosthène et des quotients et fractions de manière visuelle et par manipulations.

La géométrie est introduite ensuite (*22* à *26*) et ici la dette de Laisant envers un mathématicien contemporain, Hugues Charles Méray[17], est visible dans le souci d'introduire les objets de la géométrie – la droite par exemple – à partir de leurs compréhensions spatiales et donc de considérer d'entrée que la géométrie du plan est une partie de la géométrie dans l'espace, ce qui est à la fois intuitif et « moderne ». La démonstration du théorème de Pythagore, le fameux « pont aux ânes » d'Euclide (*Éléments*, I, 47), par des moyens

17. Charles Méray (1835-1911) est un mathématicien français dont le travail de pionnier sur la construction des nombres réels et sur l'arithmétisation de l'analyse, aujourd'hui reconnu, a longtemps été occulté, notamment parce que ces questions n'intéressaient guère les mathématiciens français de l'époque. Il fut aussi professeur à l'université et a rédigé ces *Nouveaux éléments de géométrie* (Paris, F. Savy, 1874) qui ont inspiré Laisant, ce dernier les citant élogieusement. Sa recommandation, notamment, d'introduire le cours de géométrie par la géométrie dans l'espace sera appliquée dans l'enseignement primaire jusqu'à la réforme des maths modernes, et il suffirait de s'appuyer sur ce fait pour montrer le caractère régressif des réformes depuis cette époque, d'autant plus que la dégradation induite en ce domaine est probablement beaucoup plus importante que celle que l'on constate en calcul, même si cette dernière est moins apparente.

correspondant aux principes défendus par Laisant (empirisme, manipulation, découverte) marque encore plus la distance qui le sépare de la conception exclusivement axiomatique et hypothético-déductive de la mathématique et de sa pédagogie.

On revient ensuite aux nombres (*27-40*) : triangulaires, carrés et cubes, dans le cadre de ce qui est une porte d'entrée de cette arithmologie que définissait Laisant dans *La Mathématique* : sont alors présentés, toujours avec ce souci de permettre le passage à l'abstraction par des représentations concrètes, les nombres premiers, les numérations en différentes bases, dont le binaire, des progressions et les permutations, abordées (*39*) par ce qui fait penser au problème des ménages auquel le nom de Laisant reste attaché[18].

On en revient (*41-45*) à la géométrie, cette fois par le dessin, à main levée d'abord (on se souviendra de l'importance que lui accorde Pestalozzzi), puis par le compas et le rapporteur, pour étudier cercles, lunules, rosaces et volumes.

Les chapitres qui suivent sont peut-être les plus ambitieux et par certains traits les plus originaux. Laisant

18. Il s'agit, comme l'écrira Laisant, de « trouver le nombre de permutations sans répétition que l'on peut former avec n objets différents a, b, c…. h, i, chacune des n places ne pouvant être occupée que par certains de ces objets » ; « Sur le problème des permutations », *Bulletin de la S.M.F.*, tome 19, 1891, p. 105. En fait, ce problème avait d'abord été présenté en 1891 par Édouard Lucas ; il consistait à déterminer le nombre de manières possibles de faire asseoir à une table, pour un repas, un ensemble de couples hétérosexuels de telle manière qu'hommes et femmes alternent et que nulle personne ne soit assise à côté de celle avec qui elle est en couple.

y poursuit l'étude de l'algèbre amorcée plus haut en introduisant les graphiques, puis la géométrie analytique (*57*), diverses courbes et enfin les divisions, progression et faisceau harmoniques.

L'ouvrage se termine sur un paradoxe géométrique déjà célèbre (*63*), suivi d'un chapitre sur les carrés magiques (*64*) et d'un discours final de Laisant, qui donne aux parents des conseils pour l'éducation mathématique de leurs enfants (*65*).

Nous faisons suivre cette *Initiation mathématique* du court texte *L'éducation de demain*, dans lequel Laisant, en 1906 puis dans la réédition de 1913, décrit et justifie son programme d'éducation – intégrale, conformément aux idéaux libertaires alors répandus –, en plus de marquer son rattachement au mouvement contemporain et influent de l'école nouvelle.

Je voudrais indiquer une dernière raison qui en fait l'intérêt. Pour cela, je veux évoquer, en y renvoyant, les nombreuses pages que Michel Delord, sur son site et ailleurs, a consacrées à Laisant, des pages où il soutient que ses idées doivent aujourd'hui être considérées comme en avance sur certaines de celles qui prévalent depuis longtemps en didactique des mathématiques, lesquelles constitueraient de véritables régressions par rapport aux positions fondamentales de la pédagogie progressiste du XIXe siècle – dont Laisant était l'un des plus fermes défenseurs. Cette régression ferait passer de la méthode intuitive à un formalisme incarné de manière particulièrement nette par l'introduction, dans les années 1970 et dès le primaire, des mathématiques modernes.

Je laisse cette hypothèse à l'appréciation des lecteurs et lectrices.

Et pour les aider à en décider, donnons à présent la parole à Laisant.

Normand Baillargeon

BIBLIOGRAPHIE

Une bibliographie qu'on peut croire exhaustive des écrits de Laisant est donnée par Jérôme Auvinet, dans *Charles-Ange Laisant. Itinéraires et engagements d'un mathématicien, d'un siècle à l'autre – 1841-1920* (thèse de doctorat, Université de Nantes, 2011). Ce travail nous a été indispensable pour établir les listes qui suivent et pour rédiger notre introduction.

Choix d'écrits pédagogiques de Charles-Ange Laisant

« Remarque sur les puissances de 2 », *Journal de mathématiques élémentaires*, série 2, tome 5, 1886, p. 238.

— et Élie Perrin, *Premiers principes d'algèbre, à l'usage des classes de troisième et de seconde de l'enseignement secondaire moderne*, Paris, C. Delagrave, 1892.

— et Émile Lemoine, *Sur l'orientation actuelle de la science et de l'enseignement mathématique*, Paris, G. Carré, 1893.

Recueil de problèmes mathématiques, classés par divisions scientifiques, Paris, Gauthier-Villars et fils, 1893-1896.

— et Xavier Antomari, *Questions de mécanique à l'usage des élèves de la Classe de Mathématiques spéciales*, Paris, Nony, 1895.

— et Émile Lemoine, *Traité d'arithmétique* suivi de *Notes sur l'ortografie simplifiée (par M. Malvezin*), Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1895.

« Variétés. Bibliothèque mathématique des travailleurs », *Nouvelles annales de mathématiques*, série 3, tome 15, 1896, p. 142-145.

— et Élie Perrin, *Applications de l'algèbre élémentaire à la géométrie, à l'usage des élèves de la classe de première scientifique de l'enseignement moderne. Ouvrage contenant 770 énoncés de problèmes à résoudre*, Paris, C. Delagrave, 1897.

La Mathématique. Philosophie-Enseignement, Paris, G. Carré et Naud, 1898.

« L'Initiation mathématique », *Revue scientifique*, 4e série, tome 11, 1899, p. 358-368.

« L'Initiation à l'étude des sciences physiques », *Revue scientifique*, 4e série, tome 15, 1901, p. 289-294.

« Une exhumation géométrique », *L'enseignement mathématique,* 3, 1901, p. 98-105.

« Remarques sur les bissectrices d'un angle », *L'Enseignement mathématique*, 4, 1902, p. 284-287.

« Éducation scientifique et psychologie », *Revue scientifique*, 4e série, tome 19, 1903, p. 257-263 et 326-336.

« Les nouveaux programmes de l'École Polytechnique », *L'Enseignement mathématique*, 5, 1903, p. 73 et 75-84.

L'éducation fondée sur la science, Paris, Félix Alcan Éditeur, 1904.

« Le rôle social de la Science », *L'Enseignement mathématique*, 6, 1904, p. 337-362.

Initiation Mathématique, ouvrage étranger à tout programme dédié aux amis de l'enfance, Paris, Hachette, 1906.

« Un nouveau théorème d'arithmétique », *L'Enseignement mathématique*, 10, 1908, p. 220-225.

La Barbarie moderne, Paris, Bataille syndicaliste, 1912.

« Qu'est-ce qu'un vecteur ? », *L'Enseignement mathématiques*, vol. 14, 1912, p. 362-365.

L'éducation de demain, deuxième édition, Paris, Les Temps nouveaux, 1913.

Initiation Mathématique. Ouvrage étranger à tout programme dédié aux amis de l'enfance, 15e édition conforme à la 14e avec note sur *L'Initiateur mathématique* de M.J. Camescasse, In-8°, Paris, Hachette, 1916.

« Les deux suites fibonaciennes fondamentales (*un*) (*vn*). Tables de leurs termes jusqu'à $n = 120$ », *L'Enseignement mathématique*, 21, 1920, p. 52-56.

« Extension du problème des triangles héroniens », *L'Enseignement mathématique*, 21, 1920, p. 82-84.

Choix d'écrits scientifiques de Laisant

Laisant a publié une soixantaine d'articles scientifiques en mathématiques. Ceux-ci sont recensés dans la thèse de Jérôme Auvinet citée plus haut. On en trouvera en outre une liste partielle en ligne [http://www.numdam.org/numdambin/recherche ?au=Laisant,+Charles+Ange&format=short].

Seuls ses ouvrages et ses thèses sont retenus dans la bibliographie qui suit. On notera que Laisant a traduit de l'italien et édité l'ouvrage de Giusto Bellavitis consacré à la méthode des équipollences, *Exposition de la méthode des équipollences* (Paris, Gauthier-Villars, 1874), ouvrage qui a grandement contribué à introduire l'algèbre vectorielle en France.

Essai sur les fonctions hyperboliques, Paris, Gauthier-Villars, 1874.

Applications mécaniques du calcul des quaternions, thèse, Faculté des sciences de Paris, 1877.

Sur un nouveau mode de transformation des courbes et des surfaces, thèse, Faculté des sciences de Paris, Gauthier-Villars, 1877.

Sur le planimètre polaire de M. Amsler, Bruxelles, F. Haez, 1879.

Introduction à la méthode des quaternions, Paris, Gauthier-Villars, 1881.

Théorie et application des équipollences, Paris, Gauthier-Villars, 1887.

Recueil de problèmes de mathématiques classés par divisions scientifiques, Paris, Gauthier-Villars et fils, 1893-1896.

Écrits sur Laisant

AUVINET, Jérôme, 2011, *Charles-Ange Laisant. Itinéraires et engagements d'un mathématicien, d'un siècle à l'autre (1841-1920)*. Thèse de doctorat, Université de Nantes.

BRICARD, Raoul, 1920, « Charles-Ange Laisant (1841-1920) ». *Nouvelles Annales de Mathématiques,* 4e série, tome 20, p. 449-454.

BROCARD, Henri, 1875, « Note sur un compas trisecteur proposé par M. Laisant ». *Bulletin de la Société mathématique de France*, tome 3, p. 47-48.

BUHL, Alexander, 1920-1921, « Charles-Ange Laisant ». *L'enseignement mathématique*, 21, p. 73-80.

LAISANT, Maurice, 1970, « De la députation à l'anarchie ». *La rue*, n° 9, p. 70-87.

LAMANDÉ, Pierre, 2010, « Une personnalité du monde de l'Éducation nouvelle. Charles Ange Laisant (1841-1920) et son combat politique pour une éducation rationnelle fondée sur la science ». *Paedagogica Historica*, vol. 1, p. 1-19.

MLIKA, Hamdi, s.d., « Charles-Ange Laisant, mathématicien et philosophe ! » *Académia*, en ligne [http://www.academia.edu/2908621/Charles-Ange_Laisant].

SAUVAGE, Jean-Pierre, 1994, « Charles-Ange Laisant, député et mathématicien ». *Histoire, mémoires locales, départementales, régionales*, n° 2, p. 63-80.

DE MICHEL DELORD

Michel Delord, 2015, *Attention, débroussaillage (partiel). Ferdinand Buisson, les quatre opérations en CP, la méthode intuitive*. Blogue, [http://micheldelord.info/remib_fb_2014.pdf].

INITIATION MATHÉMATIQUE

PRÉFACE DE LA DEUXIÈME ÉDITION[1]

En publiant cette édition nouvelle, de l'*Initiation mathématique*, j'ai pour premier devoir de remercier mes nombreux confrères, des périodiques scientifiques et de la presse quotidienne des divers pays, dont le concours a si largement aidé à la diffusion de ce livre. Je dois aussi l'expression de ma reconnaissance à tous les correspondants personnels qui m'ont fait part de leurs réflexions ; chez eux, j'ai trouvé un encouragement de plus à poursuivre une tâche que je croyais utile lorsque je l'ai entreprise ; j'en suis sûr aujourd'hui, en présence des témoignages reçus.

J'avais provoqué les critiques ; je n'ai guère obtenu que des marques de bienveillance. Aussi, cette deuxième édition ne diffère-t-elle pour ainsi pour ainsi dire pas de la première. Cependant, j'ai pu tirer parti de certaines observations pour corriger une erreur matérielle de calcul (au n° 40), dont les conséquences ne

1. Cette 4e édition ne diffère des précédentes que par l'adjonction, au n° 21, de remarques sur les fractions, qui ont été publiées dans le *Manuel général de l'Instruction primaire* (8 juin 1907), et par l'incorporation au n° 32 d'une *Note sur une question de pesées*, placée précédemment à la fin du volume.

présentaient pas d'ailleurs une gravité fondamentale, et pour ajouter ça et là quelques remarques utiles.

Pour dissiper toute équivoque, je dois insister sur ce fait que l'*Initiation mathématique*, ne peut et ne doit être qu'un guide ; que l'éducateur devra s'en inspirer, non pas le suivre servilement, et cela pour le plus grand profit de l'élève ; que cet instrument nouveau ne saurait dispenser de la mise en oeuvre des qualités pédagogiques indispensables, dont les deux principales sont la patience, et le discernement psychologique.

C'est surtout dans le monde de l'enseignement, et particulièrement de l'enseignement primaire, que j'ai rencontré les approbations qui m'ont le plus touché. Dans les écoles normales d'instituteurs, notamment, un heureux courant d'opinion se dessine, qui est de nature à justifier bien des espérances.

Les nombreux amis que je compte dans l'enseignement secondaire m'ont également prodigué des marques de sympathie : mais quelques-uns, émus de mes critiques envers l'administration universitaire, m'ont amicalement reproché de n'avoir peut-être pas rendu à leurs efforts une justice suffisante, me rappelant que les améliorations introduites clans les programmes et les méthodes avaient été en grande partie leur oeuvre.

C'est assurément ma faute si je n'ai pas été complètement compris. Pour qu'il n'y ait aucune méprise, je tiens donc à répéter que nul plus que moi ne rend hommage aux courageux efforts de ces maîtres admirables, à leur science et à leur conscience ; leur mérite est d'autant plus grand qu'ils ont à lutter contre une bureaucratie dont ils sont les premières victimes, contre un système séculaire de centralisation et de routine qui semble avoir pris à tache de tuer les initiatives et d'empêcher la lumière de pénétrer dans les cerveau. De mes critiques envers cette bureaucratie, ennemie de l'enseignement, je n'ai rien à retirer.

Les moyens concrets que j'emploie n'avaient pour utilité, dans ma pensée, que d'initier l'enfant aux vérités mathématiques ; on m'a fait remarquer que, parfois, ces procédés pouvaient être heureusement mis en œuvre, plus tard dans la période d'étude, pour rendre plus limpides certaines démonstrations. C'est fort juste, et je n'y avais pas pensé dès l'abord. Je pourrais citer notamment la théorie de la division (n° 20), celle de la racine carrée (n° 25), la sommation des termes d'une progression par quotient (n° 35).

C'est une nouvelle face de la question, sur laquelle je me permets d'attirer l'attention du lecteur.

En terminant, je ne saurais assez rappeler aux familles, surtout aux mères, l'intérêt et le charme qu'il y aurait pour elles à se faire les éducatrices de leurs enfants, chaque fois que la possibilité matérielle existe. Et, dans la période d'initiation, c'est en même temps la chose la plus aisée. Pour les premières notions mathématiques, en particulier, il n'est nullement nécessaire de posséder une forte instruction préalable ; il suffit de bien aimer ses enfants et d'apprendre à connaître leur esprit, à en observer les manifestations et l'évolution.

Avec une dose bien légère de bonne volonté, le père et la mère d'instruction moyenne deviendront des instituteurs, égalant, sinon surpassant, les plus savants maîtres.

Et, si même vous avez dû envoyer prématurément vos enfants à l'école, n'hésiter pas, quand le soir ils rentrent au logis, à suivre leurs progrès, à devenir leurs répétiteurs, les auxiliaires du maître à qui vous les avez confiés. Je souhaiterais que ce petit volume pût vous aider à accomplir cette tâche.

AVANT-PROPOS

Ce petit livre contient le développement de principes exposés sous le même titre dans une conférence faite il y a plusieurs années, et publiée dans l'*Éducation fondée sur la science*, volume de la *Bibliothèque de Philosophie contemporaine*. Sur ce point particulier du grand problème de l'éducation, quelques amis m'ont exhorté à préciser davantage. Peut-être ont-ils raison. En tous cas, l'effort mérite d'être tenté, en face de la persistance qu'on semble mettre à déformer les jeunes cerveaux. C'est à un sauvetage de l'enfance que je convie parents – mères de famille surtout et éducateurs. Depuis la toute première enfance jusqu'au début des études, mettons par exemple de 4 à Ii ans, il est possible de faire pénétrer dans l'esprit de l'enfant vingt fois plus de choses qu'on ne le fait, en matière mathématique ; cela en l'amusant, au lieu de le torturer.

Les chapitres divers qu'on trouvera ci-après ne forment pas un tout didactique ; il ne sont pas non plus disposés au hasard. C'est un guide remis entre les mains de l'éducateur, dont il pourra s'inspirer, mais qui ne saurait le dispenser de l'étude constante du cerveau qu'il veut développer. Tantôt il faudra aller de l'avant, tantôt s'arrêter ou s'interrompre : parfois revenir en arrière. Ce qui serait dangereux, ce serait de vouloir aller trop loin sans se préoccuper de ce qui précède.

Vous trouverez d'assez nombreuses notions dans ces pages ; essayez de vous en inspirer, ne vous en rendez pas esclaves. Par-dessus tout, attachez-vous à intéresser, à amuser l'enfant, ne lui faites rien apprendre par cœur ; et à 11 ans, s'il est d'intelligence moyenne, il saura et comprendra mieux les mathématiques que les neuf dixièmes de nos bacheliers. Ce qui est plus important, il en aura pris le goût et aura plaisir à en entreprendre l'étude.

Que les séances de jeu – il ne faut pas les appeler des leçons – ne se prolongent jamais au delà de la limite où l'attention faiblit, où la curiosité s'éteint. Sinon, vous ne sauriez obtenir que des résultats nuisibles.

Je souhaite que de pareilles tentatives puissent être faites pour les sciences physiques et les sciences naturelles. La tâche ne serait pas plus difficile, au contraire. Et peut-être alors verrait-on les générations qui viennent, délivrées de la camisole de force de leurs devancières, prodiguer largement à l'humanité les trésors d'une intelligence qu'on aurait laissé librement s'épanouir.

Le présent livre n'a rien de commun avec les *Récréations mathématiques*, qui ont motivé la publication d'un assez grand nombre d'ouvrages excellents, parmi lesquels, pour me limiter à ceux qui sont publiés ou traduits en langue française, je me bornerai à citer les quatre volumes d'Édouard Lucas, « l'*Arithmétique* *amusante* » du même auteur, le volume de Rouse Ball, traduit de l'anglais, et celui de Fourrey, qui a surtout pour objet des questions arithmétiques.

Dans les *Récréations mathématiques*, le mot le dit assez, il s'agit d'appliquer à des sujets amusants, jeux divers, combinaisons, etc., les théories mathématiques déjà connues : et souvent une certaine instruction est nécessaire pour pouvoir seulement comprendre les explications données.

Ici, c'est l'inverse ; nous nous servirons de questions amusantes comme moyen pédagogique, pour attirer la curiosité de l'enfant et arriver ainsi à faire pénétrer dans son esprit, sans efforts imposés. les premières notions mathématiques les plus essentielles. Et la diversité des questions, qui pourrait faire croire à un désordre apparent, cache une suite d'idées, voulues, utiles et complètement ordonnées.

Par conséquent, notre « Initiation » ne fait pas double emploi avec les « Récréations » ; toutes deux ont leur raison d'être. Au cours de leurs études, les écoliers curieux, au souvenir des jeux de leur enfance, pourront tirer grand profit de la lecture des ouvrages qu'ils comprendront alors, qui feront surgir en eux des idées nouvelles, perfectionneront et aiguiseront leur esprit.

Et à ceux qui leur viendraient dire que les Récréations sont indignes d'eux, il suffirait de répondre que les plus grands savants ne dédaignèrent pas de s'en occuper ; et que si parfois les études mathématiques nous conduisent à rire, c'est un mérite de plus, attendu que, suivant la grande parole de Rabelais « *Rire est le propre de l'homme* ».

Là dessus, si les pontifes ne sont pas contents, sachons nous en consoler. Ceux pour lesquels le mot « instruire » est synonyme d' « ennuyer » – et quelquefois de « torturer » – sont de véritables malfaiteurs publics. Il est temps que leur domination néfaste prenne fin.

J'ai eu surtout en vue la France, en écrivant ce petit volume, mais le mal n'est pas particulier à notre pays. Partout, il faut se placer en dehors des programmes si on veut libérer l'enfance ; partout, si on l'aime, il faut s'attendre à l'hostilité d'une administration qui semble avoir pris à tâche d'entraver son développement cérébral.

Un dernier mot, presque inutile. Entre les mains de l'enfant, ce livre serait sans objet, presque dangereux. C'est à l'éducateur qu'il est destiné, à l'éducateur seul, pour lui servir de guide. Mais, arrivé à la période des études sérieuses, l'élève trouvera souvent profit à cette lecture, sorte de coup d'œil rétrospectif sur l'évolution première de son jeune esprit.

1. LES BÂTONS

L’une des premières facultés qu’on doive développer chez l’enfant, dès l’âge où son activité cérébrale s’éveille, c’est celle du dessin. Presque toujours, il en a le goût instinctif, et il faut l’y encourager, bien avant d’entreprendre de lui enseigner l’écriture ou la lecture.

Dans ce but, on devra lui mettre entre les mains, pour commencer, une ardoise ou une feuille de papier quadrillé, placer entre ses petits doigts un crayon d’abord, une plume lorsqu’il sera devenu plus habile, et lui faire tracer simplement des bâtons au début ; non pas les bâtons inclinés classiques, préparatoires à l’écriture penchée, mais de petites lignes suivant les directions du tracé du quadrillage, et bien régulièrement espacées.

Ces lignes étant dirigées de haut en bas d’abord, puis au bout de quelque temps de gauche à droite, l’élève formera ainsi des *bâtons verticaux* et des *bâtons horizontaux*.

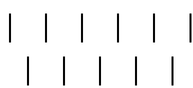


FIG. 1 Bâtons verticaux

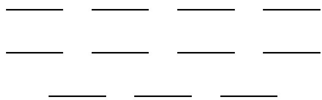


FIG. 2 Bâtons horizontaux

Graduellement. on lui apprendra à tracer des bâtons plus on moins longs, à en intercaler entre les lignes du quadrillage, à en mener de nouveaux qui soient obliques, dans toutes les directions possibles. Puis on lui fera former des figures composées d'assemblages de bâtons plus ou moins longs. Nous en dirons quelques mots plus loin.

Plus tard, soit avec les instruments (règle, équerre, compas), soit à main levée, on lui fera dessiner des figures où entrent des lignes courbes. Ces exercices, qui développent l'habileté de la main et la justesse de l'œil, ne devront jamais être abandonnés tant que durera la période éducative. Nous n'en parlons ici que dans la mesure indispensable pour ce qui va suivre : mais à ce point de vue même, il faut insister sur ce fait qu'ils doivent être indiqués, jamais imposés. S'ils cessent de constituer un jeu, le but sera manqué. Laissez l'enfant gribouiller sur son ardoise, gâcher quelques feuilles de papier ; guidez-le de vos conseils, il ne manquera jamais de vous en demander ; mais quand il en aura assez, laissez-le faire autre chose. C'est une condition rigoureusement nécessaire pour développer chez lui l'esprit d'initiative, pour entretenir sa curiosité naturelle, pour éviter la fatigue et l'ennui.

Il y aurait un livre entier à faire sur ce premier enseignement du dessin, dont j'ai dû dire quelques mots ; d'autres sur l'écriture, sur la lecture, qui ne doivent venir qu'ensuite, et qui sont en dehors de mon sujet. Mais tous ces enseignements, s'appliquant à l'enfance, doivent invariablement s'inspirer du même principe fondamental, c'est-à-dire conserver l'apparence de jeux, respecter la liberté de l'enfant et lui donner l'illusion (si c'en est une) que c'est lui-même qui invente les vérités mises sous ses yeux. Quant à l'âge auquel doit commencer à être donnée cette première initiation mathématique, débutant par celle du dessin, et marchant ensuite parallèlement, il n'y a pas de règle absolue à formuler. Mais on peut dire qu'en moyenne il est bien rare qu'un enfant de trois ans et demi à quatre ans ne manifeste pas déjà son goût pour le maniement du crayon et j'affirme qu'à dix ou onze ans, il serait facile de lui avoir mis dans la tête la totalité des matières exposées dans ce qui va suivre, s'il a une organisation cérébrale normale.

Plus d'un aura peut-être plaisir, au bout de quelques années, à prendre en main ce petit livre, qui ne lui est pas destiné pour l'instant. Son esprit, perfectionné par des études ultérieures, apte au raisonnement conscient, y trouvera certainement matière à des réflexions utiles.

Pour en finir avec ces généralités et n'avoir pas à me répéter inutilement, je dois signaler aux familles et aux instituteurs qui me liront le plus grand écueil à éviter dans la première éducation de l'enfance ; c'est l'abus de l'exercice de la mémoire, si général encore dans nos pratiques actuelles, et si pernicieux. En apprenant des mois à l'enfant, et le forçant à les répéter, on déforme son cerveau, on tue ses qualités natives, on prépare des générations d'êtres sans initiative, sans curiosité, sans volonté, bourrés de formules incomprises, aveulis et déprimés.

Si vous aimez vos enfants, si vous aimez ceux qu'on vous confie, si vous voulez qu'ils deviennent forts et bons, revenez aux principes de ces grands esprits et de ces grands coeurs, qui eurent nom *La Chalotais*[1], *Froebel*[2], *Pestalozzi*[3]. Ces bienfaiteurs de l'humanité auraient leurs statues dans tous les pays du monde, et leurs noms seraient gravés en lettres d'or dans toutes les écoles, si la terre était peuplée d'êtres raisonnables.

2. DE UN À DIX

Lorsque l'habitude commencera à être prise, de tracer régulièrement – et assez rapidement - les bâtons, on apprendra à les compter à mesure qu'on les forme en prononçant les noms, *un, deux, trois, quatre. cinq, six, sept, huit, neuf, dix*, successivement.

---

1. La Chalotais, magistrat français, né à Rennes (1701-1785) auteur de l'*Essai d'éducation nationale*.
2. Froebel, pédagogue allemand, né à Oberweissbach (1782-1852), fondateur des *Jardins d'enfants*.
3. Pestalozzi, éducateur suisse, né à Zurich (1746-1827) ; sa méthode a servi de base à Fichte, comme moyen de relèvement de l'Allemagne.

Ensuite, on formera des groupes de bâtons en les séparant les uns des autres par des intervalles, et on aura (fig. 3 et 4) des images qu'on lira :

|	||	|||	|||||	||||||
un	deux	trois	quatre	cinq

||||||	|||||||
six	sept
|||||||||	||||||||||
huit	neuf

\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|
dix

FIG.3

un	deux	trois	quatre	cinq	six	sept	huit	neuf	dix
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	—	—	—	—	—	—	—	—	—
		—	—	—	—	—	—	—	—
			—	—	—	—	—	—	—
				—	—	—	—	—	—
					—	—	—	—	—
						—	—	—	—
							—	—	—
								—	—
									—

FIG.4

un, deux,… dix bâtons verticaux, pour la fig. 3 ;

un, deux,… dix bâtons horizontaux, pour la fig. 4 ;

En regard, on placera des groupes de haricots, de grains de blé, de jetons ou d'autres objets quelconques, et ils seront énoncés :

> un, deux… dix haricots, grains de blé, etc.

On supposera ensuite que les objets sont remplacés par des moutons, des chiens, des hommes, etc., et, ces exercices suffisamment répétés, devenus familiers à l'enfant, on pourra lui dire alors que les expressions dont il fait usage : trois bâtons, six grains de blé, huit moutons, par exemple, sont des nombres et des nombres concrets.

Ayant considéré un groupe de cinq bâtons, un autre de cinq haricots, un autre de cinq jetons, en ayant imaginé un de cinq chiens ou de cinq arbres, on lui fera remarquer que dans ces divers cas, il prononce toujours le même mot cinq ; on lui dira que ce mot, sans y rien ajouter, représente ce qu'on appelle un nombre abstrait, et qu'il pourra s'en servir pour désigner tout autre groupe de cinq objets : ânes, chaises, maisons, etc.

II ne faudra pas longtemps pour que le bambin sache compter sans hésitation de un jusqu'à dix n'importe quels objets. II sera bon aussi de l'habituer à saisir le plus tôt possible du regard l'ensemble des objets qu'on lui présentera brusquement, des jetons ou des haricots par exemple, sans avoir besoin de les compter un à un ; pour cela, il sera nécessaire de commencer par de très petits nombres, et de procéder progressivement.

3. LES ALLUMETTES OU BÂTONNETS ; PAQUETS ET FAGOTS

En dehors des divers objets indiqués plus haut comme pouvant aider à faire comprendre à l'enfant l'idée de nombre concret, et qu'on peut varier à l'infini, il en est d'autres que nous ne saurions assez recommander, et dont l'emploi est à notre avis indispensable. Ce sont de petits bâtonnets en bois, identiques aux allumettes en bois ordinaires, dont ils ne diffèrent que par l'absence de préparation chimique inflammable. Nous les désignerons parfois sous le nom d'allumettes, à cause de cette ressemblance, et ces allumettes – qui ne s'allument pas – peuvent être considérées comme les modèles des bâtons tracés sur tes ardoises ou les cahiers. Elles doivent être toutes de même longueur.

Ayant devant soi un tas de ces bâtonnets, et sachant bien compter jusqu'à dix, l'enfant en mettra de côté dix successivement, et les réunira en un petit paquet bien régulier qu'il entourera d'une de ces petites bagues en caoutchouc si commodes et dont l'emploi est si répandu.

On lui montrera alors que ce paquet contenant dix bâtonnets peut être appelé *une dizaine* de bâtonnets.

Ensuite, il confectionnera encore d'autres paquets pareils en assez grand nombre. On vérifiera qu'il ne s'est pas trompé ; et s'il s'est trompé, on lui fera réparer son erreur.

Lui montrant alors deux paquets, on lui dira que le nombre de bâtonnets de ces deux paquets, pris ensemble, qu'on mettra sous ses yeux en défaisant et refaisant les paquets, s'appelle *vingt* et qu'ainsi :

> *un* paquet, c'est *dix* bâtonnets,
>
> *deux* paquets, c'est *vingt* bâtonnets.

Prenant ensuite trois, quatre… neuf paquets, et procédant de même, on montrera que

trois	paquets	c'est	*trente*	bâtonnets
quatre	"	"	*quarante*	"
cinq	"	"	*cinquante*	"
six	"	"	*soixante*	"
sept	"	"	*septante*	"
huit	"	"	*octante*	"
neuf	"	"	*nonante*[4]	"

Ayant appris tout cela, nous prendrons, pour terminer, dix paquets, et nous les réunirons ensemble au moyen d'une bague de caoutchouc plus large, ce qui nous donnera un *fagot*. On expliquera alors que un fagot c'est une *centaine* de bâtonnets, que le nombre des bâtonnets contenus dans un fagot s'appelle *cent* ; on vérifiera que dix paquets formant un fagot, *dix dizaines* c'est *une centaine*.

4. Il faut bien se garder à ce moment de faire connaître à l'enfant les noms absurdes et incohérente : soixante-dix, quatre-vingts, quatre-vingt-dix. Il les apprendra forcément plus tard (et toujours trop tôt). Et même s'il disait dans sa logique : *sixante, huitante, neufante*, il ne serait pas nécessaire de le reprendre.

4. DE UN À CENT

Prenant au hasard une poignée de bâtonnets (en nombre inférieur à cent), nous allons proposer à l'enfant de nous mettre avec lui à les compter. Dans ce but, il va fabriquer des paquets, tant que cela lui sera possible; et il arrivera un moment où il n'aura plus assez de bâtonnets pour faire un paquet. Plaçant alors à sa gauche tous les paquets formés, à sa droite les bâtonnets restants, on lui fera énoncer les deux nombres séparément; puis, les réunissant en un seul, il aura ainsi nommé le nombre des bâtonnets qu'on lui avait remis.

Si par exemple il avait formé *trois* paquets, et qu'il lui reste *huit* bâtonnets, il dira en regardant vers la gauche: « trente; » en regardant vers la droite: « *huit*; » puis, sans interruption: « *trente-huit.* »

Ayant répété un grand nombre de fois cet exercice, sur des collections de bâtonnets pris au hasard, on démolira un fagot, et on se proposera de compter successivement et un à un tous les bâtonnets. On commencera à compter un, deux, trois….. jusqu'à dix. Ayant ainsi un paquet on le fera passer à gauche (sans même avoir besoin de le lier) et on continuera en disant:

> dix-un; dix-deux; dix-trois; dix-quatre; dire-cinq;
> dix-six[5]; dix-sept; dix-huit; dix-neuf;

5. Ici encore, il faut se garder de dire: onze, douze, treize, quatorze, quinze, seize. Ces noms s'apprendront sans aucune peine, le moment venu. Inutile, quant à présent, de surcharger la mémoire.

enfin un nouveau bâtonnet complète un deuxième paquet, qu'on fait passer à gauche à coté du premier, en disant *vingt* ; et on continue de la même manière jusqu'au neuvième paquet, puis au neuvième bâtonnet restant, qu'on touche en disant *nonante-neuf* ; enfin on n'empare du dernier, complétant le dixième paquet qu'on fait passer vers la gauche, à côté des neuf premiers, en prononçant le mot *cent*.

Rien n'empêche de faire remarquer alors au jeune élève qu'on vient de lui enseigner la *numération* de un à cent ; on pourra même lui dire que lorsqu'il dit septante-trois allumettes ou bâtonnets, il fait de la numération parlée, et que lorsqu'il range sept paquets à gauche et trois bâtonnets à droite, il fait de la numération figurée. II sera d'autant plus flatté de se sentir si savant qu'il ne sait encore ni tracer une lettre ou un chiffre, ni lire : b, a, ba. Mais il dessine des bâtons, il a des yeux, s'en sert pour voir et commence à comprendre ce qu'il voit et ce qu'il fait.

Nous savons donc compter des bâtonnets de un à cent. Il faut nous habituer à compter de même d'autres objets quelconques, puis à les compter de tête ensuite sans les avoir sous les yeux. C'est le début du calcul mental si important dans la pratique, et si facile à faire pratiquer dés le plus jeune âge, si on commence par des choses très simples et si on procède progressivement.

Ce n'est pas tout encore ; partant de 1, il faut s'habituer à compter de deux en deux :

> un, trois, ….. jusqu'à nonante-neuf

et expliquer que tous ces nombres sont des *nombres impairs*. On fera de même en partant de deux ;

deux, quatre, six,…..jusqu'à cent,

et on aura des *nombres pairs*.

On s'habituera ensuite à compter de trois en trois, de quatre en quatre, en partant de un, pour commencer, puis d'un nombre quelconque.

Tous ces exercices se feront sur des objets d'abord – les bâtonnets de préférence, – ensuite mentalement.

Bref, cette manipulation des nombres, de un à cent, pourra se varier indéfiniment, car il ne faudra pas craindre de la prolonger, tant qu'elle ne deviendra pas fastidieuse et qu'elle intéressera l'enfant. Il sera bon de l'y ramener de temps en temps, alors même qu'il aura pénétré un peu plus avant dans son initiation scientifique.

5. LA TABLE D'ADDITION

Rangeons de gauche à droite sur une table, un, deux… jusqu'à neuf bâtonnets, en séparant ces neuf groupes les uns des autres. Au-dessous du bâtonnet unique, plaçons-en deux, et formons une colonne qui commencera par un, deux, pour arriver ainsi jusqu'à dix. Une seconde colonne, formée de la même façon comprendra deux, trois,….. dix-un bâtonnets et en continuant de la même manière, nous aurons neuf colonnes ; le dernier groupe de la neuvième colonne sera de dix-huit bâtonnets.

C'est l'occasion maintenant de revenir à l'utilisation de notre habileté de dessinateur et de notre grande aptitude à tracer des bâtons. Seulement, comme il est ennuyeux de tracer les dix bâtons figurant les bâtonnets d'un paquet ; nous formerons l'image d'un paquet par un gros bâton plus fort que les autres, formé de deux traits **H**, avec une petite barre qui rappelle la présence de la bague en caoutchouc. Nous avons donc ainsi commencé a savoir faire les nombres avec des bâtons, et en copiant de la sorte la figure dont nous venons d'indiquer la formation, nous obtiendrons la fig. 5, au moins en partie. Pour la terminer, nous mettrons un, deux,…neuf bâtons, à gauche des deux, trois,… dix de la première colonne ; enfin, nous séparerons par un trait vertical cette nouvelle colonne du reste de la figure et nous séparerons aussi la première ligne par un trait horizontal.

<table>
<tr><td></td><td>|</td><td>||</td><td>|||</td><td>||||</td><td>|||
	</td><td>			
	</td><td>			
		</td><td>		
	</td><td>			
	</td></tr>
<tr><td>|</td><td>||</td><td>|||</td><td>||||</td><td>|	
	</td><td>			
	</td><td>			
		</td><td>		
	</td><td>			
	</td><td>H</td></tr>
<tr><td>||</td><td>|||</td><td>||||</td><td>|	
	</td><td>			
	</td><td>			
		</td><td>		
	</td><td>			
	</td><td>H</td><td>H	</td></tr>
<tr><td>|||</td><td>||||</td><td>|	
	</td><td>			
	</td><td>			
		</td><td>		
	</td><td>			
	</td><td>H</td><td>H	</td><td>		</td></tr>
<tr><td>				</td><td>		
	</td><td>			
	</td><td>			
		</td><td>		
	</td><td>			
	</td><td>H</td><td>H	</td><td>		</td><td>			</td></tr>
<tr><td>		
	</td><td>			
	</td><td>			
		</td><td>		
	</td><td>			
|</td><td>H</td><td>H|</td><td>||</td><td>|||</td><td>||||</td></tr>
<tr><td>			
	</td><td>			
		</td><td>		
	</td><td>			
	</td><td>H</td><td>H	</td><td>H		</td><td>H
	</td><td>H	
	</td><td>H	
		</td></tr>
<tr><td>			
		</td><td>		
	</td><td>			
	</td><td>H</td><td>H	</td><td>H		</td><td>H
	</td><td>H	
	</td><td>H	
		</td><td>H
	</td></tr>
<tr><td>		
	</td><td>			
	</td><td>H</td><td>H	</td><td>H		</td><td>H
	</td><td>H	
	</td><td>H	
		</td><td>H
	</td><td>H
	</td></tr>
<tr><td>			
	</td><td>H</td><td>H	</td><td>H		</td><td>H
	</td><td>H	
	</td><td>H	
		</td><td>H
	</td><td>H
	</td><td>H	
	</td></tr>
</table>

FIG . 5

La figure ainsi obtenue est une table d'addition ; nous verrons bientôt pourquoi on l'appelle ainsi.

Elle se prête à plusieurs remarques intéressantes, que le constructeur découvrira en partie. D'abord tous les nombres dans une même ligne oblique remontant de gauche à droite sont pareils ; de plus, tous les nombres lus de gauche à droite dans une ligne horizontale, ou de haut en bas dans une colonne sont des nombres comptés de un en un ; enfin les nombres dans une même ligne oblique descendant de gauche à droite, si on les lit en descendant, sont des nombres comptés de deux en deux. Tantôt, ils sont pairs ; tantôt impairs.

Rien n'empêchera de lire tous ces nombres dans l'ordre inverse, ce qui nous apprendra à énoncer couramment les nombres de un en un, ou de deux en deux, dans le sens opposé à l'ordre naturel. C'est encore un exercice fort important, souvent utile, dont nous n'avons pas encore parlé, et que nous pouvons aborder maintenant pour des nombres petits, qui ne présenteront aucune sérieuse difficulté.

6. LES SOMMES

Prenons deux tas de haricots (ou d'autres objets) et comptons les l'un et l'autre. Si on les réunit en un seul tas, combien en aurons-nous en tout ? Il n'y a pour cela qu'à recommencer à compter à son tour le tas formé par la réunion des deux autres. Mais ce sera bien long, et ce serait du temps perdu, et de l'ennui.

Nous expliquerons qu'il y a un moyen plus rapide d'arriver au but, qu'on va y arriver par une opération qui s'appelle addition, et que le nombre des objets contenus dans le gros tas, et que nous voulons trouver, s'appelle total ou somme.

Prenant alors des nombres plus petits que dix, et reprenant la figure 5, mous ferons remarquer qu'elle donne toutes les sommes de deux tas, et nous inviterons l'enfant à tâcher de se les rappeler. Nous y arriverons, en répétant ces exercices, le plus souvent possible, et en faisant compter directement la somme quand on ne se rappelle pas.

Avant même que cette table d'addition soit complètement fixée dans la mémoire, nous prendrons deux nombres quelconque – choisis de manière que leur somme soit plus petite que cent – et nous les compterons tous deux séparément. Nous les figurerons alors avec des bâtonnets ; soient trente-quatre et vingt-trois.

Le premier nombre se formera de trois paquets et quatre bâtonnets ; l'autre de deux paquets et trois bâtonnets qu'on placera en dessous ; paquets sous paquets (à gauche) ; bâtonnets sous bâtonnets (à droite).

On demandera alors à l'enfant de dire combien font quatre et trois bâtonnets ; il répondra sept, en s'aidant s'il le faut de la table d'addition, et il placera sept bâtonnets un peu au-dessous. De même : combien font trois et deux paquets ? Cinq paquets, qu'on placera sous les paquets. On a ainsi le total : cinq paquets, sept bâtonnets, ou cinquante-sept bâtonnets.

Un recommencera avec d'autres nombres, on en prendra où il n'y ait que des paquets et pas de bâtonnets isolés, comme soixante, vingt, octante ; d'autres où il n'y ait pas de paquets, c'est-à-dire inférieure à dix ; mais de façon que chaque somme de bâtonnets ou de paquets soit toujours elle aussi inférieure à dix.

Arrivés à ce point, nous prendrons d'autres nombres où il n'en soit plus ainsi ; par exemple quarante-neuf et vingt-cinq.

L'opération se disposera ainsi

quatre paquets	neuf bâtonnets,
deux paquets	cinq bâtonnets.

Nous avons alors neuf et cinq, ou dix-quatre bâtonnets ; cela nous donne un paquet – que nous faisons passer au dessous des paquets – et quatre bâtonnets. Comptant alors les paquets, en commençant par celui que nous venons de former, nous avons un et quatre, cinq ; cinq et deux paquets : sept. Le total est donc sept paquets et quatre bâtonnets, ou septante-quatre.

Cet exercice devra être répété, renouvelé à satiété, avec des exemples variés, mais tant que cela intéressera l'enfant, sans jamais prolonger la séance jusqu'à l'ennuyer.

Arrivant alors à des additions de plusieurs nombres, on procédera de la même manière (en s'arrangeant toujours pour que le total soit inférieur à cent), et on observera que l'on trouve ainsi le nombre formé par la réunion de plusieurs tas, quand on connaît le nombre qu'il y a dans chacun des tas[6].

Répétez encore ces exercices sur une foule d'exemples, tant qu'ils ne produiront pas la fatigue ou l'ennui. Si l'on croyait voir chez l'enfant une sorte de mauvaise volonté, la punition consisterait en une menace – suivie d'effet, pendant quelques jours – de ne plus continuer à lui montrer les jeux de bâtonnets, de jeton etc., qu'on a commencé à apprendre. Qu'on use avec quelque habileté de ce moyen, et on verra qu'il n'est pas difficile, de ramener d'eux-mêmes les *coupables* à leurs études. Seulement, ne prononcez pas à leurs. oreilles ce vilain mot, d'étude, qui pourrait les effaroucher.

7. LES DIFFÉRENCES

J'ai un gros tas de jetons : octante-sept par exemple ; j'en enlève (ou retranche) une pincée, que je compte ; j'en trouve vingt-cinq. Combien en reste-t-il ? Trouver cela, c'est faire une *soustraction* ; le résultat. c'est le *reste* ou la *différence* ; on remarque que si on réunit

---

6. Ces exercices obligeront, en dehors de la table d'addition, à savoir rajouter rapidement un nombre plus petit que dix à un nombre plus petit que cent ; par exemple : soixante-huit et cinq, septante-trois. Ce résultat s'obtiendra par l'usage, avec un peu de patience et assez rapidement.

le reste au nombre retranché, on reforme le gros tas, c'est-à-dire le nombre dont on retranche.

Pour trouver la différence, écrivons d'abord le plus gros nombre, octante-sept, avec des bâtonnets,

huit paquets	sept bâtonnets,

et en dessous le plus petit, vingt-cinq

deux paquets	cinq bâtonnets,

en ayant bien soin de mettre les paquets à gauche, les simples bâtonnets à droite, et de placer les bâtonnets sous les bâtonnets, les paquets sous les paquets.

Dans le nombre le plus gros, je prends cinq bâtonnets ; il m'en restera deux ; je prends deux paquets ; il m'en restera six.

J'aurai donc le reste

six paquets	deux bâtonnets,

ou soixante-deux bâtonnets.

Cela va tout seul, et nous sommes arrivés à trouver la différence, rien qu'en faisant celles de nombres plus petits que dix, puisque nous avons retranché cinq de sept, et puis deux de huit.

Mais ce n'est pas toujours aussi facile, Ainsi, que le gros tas soit de cinquante-deux, et celui qu'on veut enlever, de dix-huit, qui est certainement plus petit. En faisant comme tout à l'heure

cinq paquets	deux bâtonnets
un paquet	huit bâtonnets,

nous ne pouvons plus enlever huit bâtonnets de deux.

Alors, parmi les cinq paquets, nous en prenons un que nous mettons à droite, avec les deux bâtonnets. Qu'on le défasse ou non, nous voyons bien que cela nous fera, à droite dix-deux bâtonnets, et à gauche nous n'aurons plus que quatre paquets au lieu de cinq.

Alors, des dix-deux bâtonnets qui sont à droite, nous en enlevons huit ; il en restera quatre ; des quatre paquets qui restent à gauche, nous en enlevons un ; il en reste trois.

La différence est donc

trois paquets quatre bâtonnets, ou trente-quatre.

Il faut ici savoir retrancher un nombre plus petit que dix, d'un nombre plus grand que dix, mais qui sera toujours plus petit que vingt.

En multipliant beaucoup ces exercices, en les variant le plus possible, ces différences, qu'il faut connaître, se logeront vite dans la mémoire ; mais qu'on se garde de les faire apprendre par cœur et réciter. C'est l'usage répété qui les fera retenir.

Il faut bien faire attention de ne prendre jamais, pour plus grand nombre, qu'un nombre inférieur à cent, puisque jusqu'ici nous ne savons pas compter au delà.

8. LES MILLE ET LES MILLIONS

Jusqu'à présent, nous savons compter jusqu'à cent. C'est un grand nombre si on considère l'âge d'une personne en années; un homme qui a cent ans est très vieux, et les centenaires sont bien rares. Mais c'est un nombre bien petit si nous regardons seulement des grains de blé; un tas de cent grains de blé n'est pas gros, et ne suffirait pas à nourrir par jour un enfant. Il est donc impossible de s'arrêter là et il nous faut monter bien plus haut sur l'échelle; ce ne sera pas difficile.

Nous sommes arrivés à cent en groupant par paquets de dix, et en groupant dix paquets en un fagot, qui contient une centaine de bâtonnets ou cent bâtonnets. Réunissons dix fagots en une boîte; puis, avec dix bottes pareilles, formons un ballot; dix ballots pourront être réunis sur une hotte; avec dix hottes, nous formerons une caisse; avec dix caisses, une charrette; avec dix charrettes, un wagon et, avec dix wagons, un train.

Reprenant tout ceci, nous allons donner les noms des nombres que nous obtenons de la sorte. *Une* allumette ou *un* bâtonnet, c'est ce que nous nommerons une *unité simple*;

Dans un *paquet*, nous avons *dix* allumettes, ou une *dizaine*;

Dans un *fagot* de dix paquets, *cent* allumettes, ou une *centaine*;

Dans une *boîte* de dix fagots, *mille* allumettes;

Dans un *ballot* de dix boîtes, *dix mille* allumettes, ou *une dizaine de mille* ;

Dans une *hotte* de dix ballots, *cent mille*, ou une *centaine de mille* ;

Dans une *caisse* de dix hottes, un *million* ;

Dans une *charrette* de dix caisses, *dix millions*, ou *une dizaine de millions* ;

Dans un *wagon* de dix charrettes, *cent millions*, ou *une centaine de millions* ;

Dans un *train* de dix wagons, un *milliard*.

On pourrait continuer comme cela tant qu'on voudrait ; mais le nombre de *un milliard* auquel nous sommes arrivé est assez grand pour suffire aux usages ordinaires. On s'en font une idée en remarquant que si on plaçait, les unes au bout des autres, des allumettes ordinaires en bois, au nombre d'un milliard, la longueur totale dépasserait sensiblement le tour de la terre.

En essayant de compter, une à une, un milliard d'allumettes, supposant qu'on mette une seconde pour chacune, et qu'on s'occupe de ce petit compte dix heures par jour, il faudrait plus de septante-six ans. Ce serait peut-être un peu long, pas très amusant et faiblement instructif.

Si nous voulons maintenant compter un gros tas de bâtonnets, nous allons en faire des paquets, et nous mettrons à droite les bâtonnets qui nous resteront, une fois les paquets faits ; soit trois bâtonnets. Nous fabriquons maintenant des fagots avec nos paquets, en les réunissant par dix : supposons qu'il nous reste huit paquets ; nous les plaçons à gauche des trois bâtonnets, et nous comptons nos fagots dix par dix pour en faire des boîtes ; il nous reste cinq fagots ; nous les plaçons à gauche des huit paquets ; et en comptant nos boîtes, nous en trouvons six. Nous les mettons à gauche des cinq fagots ; et nous avons ainsi le nombre des bâtonnets :

> *six* boîtes, *cinq* fagots, *huit* paquets, *trois* bâtonnets.

ou

> six-mille cinq-cent octante trois bâtonnets.

Rien qu'avec les paquets et les fagots nous pourrons compter jusqu'à mille, et former tous les nombres jusqu'à celui-là, en n'oubliant jamais que

fagot	paquet	bâtonnet	unique

veulent dire

(cent	dix	un) bâtonnets.

Si dans le nombre qu'on veut écrire il n'y a pas de bâtonnets isolés, ou pas de paquets, cela ne gênera en rien.

Par exemple

	huit fagots	six paquets	
contiendront	huit-cent	soixante	bâtonnets,

et

	cinq fagots	trois bâtonnets
en contiendront	cinq-cent	trois.

Il faudra faire former ainsi beaucoup de nombres inférieurs à mille, et faire faire beaucoup d'additions et de soustractions, exactement, comme il a été indiqué précédemment, mais en étendant les procédés jusqu'aux fagots, au lieu de s'en tenir aux paquets.

Il est bon de remarquer que l'on retrouve plusieurs fois les mêmes nombres dix et cent, ou dizaines et centaines. Ainsi

bâtonnet	veulent dire	un
paquet	"	une dizaine
fagot	"	une centaine
boîte	"	un mille
ballot	"	une dizaine de mille
hotte	"	une centaine de mille
caisse	"	un million
charrette	"	une dizaine de millions
wagon	"	une centaine de millions

Un nombre de mille, ou de millions, se comptera donc comme on compterait de simples bâtonnets de un à mille.

Ainsi

trois wagons	deux charrettes	sept caisses
une hotte		neuf boîtes
quatre fagots	cinq paquets	

sera un nombre de bâtonnets qu'on exprimera

trois-cent vingt sept	millions	bâtonnets
cent-neuf	mille	bâtonnets
quatre-cent cinquante		

On pourra en faire compter quelques-uns, comme cela, mais sans insister sur de trop gros nombres pour le moment, et s'attacher surtout aux paquets et aux fagots, tout au plus aux boîtes.

Toujours, dans ce qui précède, nous avons eu soin de mettre les bâtonnets (unités) à droite, les paquets (dizaines) à leur gauche, les fagots (centaines) à gauche des paquets, et ainsi de suite. On devra remarquer qu'à la rigueur ce serait inutile, mais que c'est plus commode, et qu'il est bon de toujours observer ce rangement parce que le comptage se fait ainsi avec ordre. Un peu plus tard, l'enfant, ayant bien pris cette habitude, la trouvera naturelle, alors qu'elle sera devenus indispensable au calcul.

Pour fermer effectivement, avec des bâtonnets, tous les nombres dont nous venons de parler, et dont il est bon de parler pour fixer l'esprit de l'enfant, il faudrait un matériel un peu encombrant, et pas très facile à placer sur une table ou sur une feuille de papier, même avant d'être rendu aux wagons. Nous allons voir comment on peut simplifier les choses, et montrer au jeune mathématicien – qui ne sait pas encore lire ni écrire couramment – qu'il est parfaitement à même de manier de ses doigts les nombres énormes dont il s'agit.

9. LES JETONS DE COULEUR

C'est bien désagréable, d'être si encombré, dès qu'il faut compter seulement un mille d'allumettes, par nos paquets et nos fagots. Comme nous savons déjà que les nombres s'appliquent à n'importe quoi, remplaçons nos allumettes par des jetons blancs. Cela ne change rien à nos comptes, ni à la manière de les faire. Maintenant, remplaçons nos paquets par des jetons rouges ; ce sera déjà plus commode à manier, et nous pourrons toujours remplacer, si cela nous est nécessaire, un jeton rouge par dix jetons blancs. Continuons : à la place des fagots, nous mettrons des jetons orangés ; à la place des boîtes, des jetons jaunes ; à la place des ballots, des jetons verts ; à la place des hottes, des jetons bleus ; à la place des caisses, des jetons indigos ; à la place des charrettes, des jetons violets ; à la place des wagons, des jetons noirs ; enfin à la place des trains, des jetons allongés (et blancs).

Les objets, et les nombres, se correspondent donc ainsi

Allumettes	Trains	Wagons	Charrettes	Caisses	Hottes	Ballots	Boîtes	Fagots	Paquets	Allumettes
Jetons	Allongés	Noirs	Violets	Indigos	Bleus	Verts	Jaunes	Orangés	Rouges	Blancs
Nombres	Milliards	Centaines de millions	Dizaines de millions	Millions	Centaines de mille	Dizaines de mille	Milles	Centaines	Dizaines	Unités

Rien ne nous empêche donc d'écrire tous les nombres que nous voudrons, jusqu'à un milliard, et même au delà, avec nos tout petits jetons, sans avoir besoin pour cela d'amener des caisses, des wagons et même des trains ; et nous pourrons également, si cela nous intéresse, faire des additions et des soustractions. Il faudra, par exemple, toujours bien se rappeler qu'un jeton rouge vaut dix blancs ; un jeton orangé, dix rouges, et ainsi de suite jusqu'au bout.

Il semble qu'à la place des jetons blancs, on pourrait mettre des pièces de un centime, puis remplacer les jetons rouges par des pièces de dix centimes, et continuer comme cela ; mais cela deviendrait gênant et encombrant, et il faudrait avoir une assez jolie petite fortune ; car alors, pour représenter les milliards, il serait nécessaire d'employer des pièces de dix millions de francs. La monnaie n'en frappe pas ; elles seraient peu maniables, et il vaut décidément mieux se contenter du jeton blanc allongé pour représenter le milliard. Ce sera plus économique.

Toujours, comme plus haut, nous mettrons nos jetons bien en ordre, en commençant par la droite :

Allongé	Noir	Violet	Indigo	Bleu	…

…	Vert	Jaune	Orange	Rouge	Blanc

et rien qu'à regarder chaque place, on sait quelle couleur doit y être logée, d'après le rang qu'elle a, à partir de la droite.

10. LES CHIFFRES

Nous savons maintenant écrire tous les nombres, au moins jusqu'aux milliards – et il serait facile de pousser bien plus loin – avec nos jetons ronds de diverses couleurs, et des jetons blancs allongés. Pour cela, il nous faut, à chacune des places qui marquent les jetons blancs, rouges, etc., ou les unités, les dizaines, etc., mettre un nombre de jetons qui est toujours plus petit que dix.

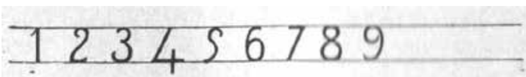
S'il y avait moyen d'éviter de compter chaque fois ces jetons, ce serait plus commode. Or, maintenant, notre élève a commencé à écrire un peu, et nous pouvons l'exercer à tracer des caractères qui représenteront, les neufs premiers nombres dont nous avons besoin, caractères que l'on appelle les *chiffres*.

Ce sont

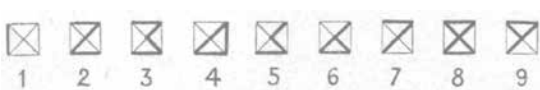
un	deux	trois	quatre	cinq	six	sept	huit	neuf
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Soit avec un crayon, soit avec une plume, qu'il s'habitue à les former droits, sans aucune fioriture d'un seul trait, sauf le 4, qui en exige deux, et en se servant d'abord d'ardoises réglées ou de papier réglé, pour que les chiffres soient bien tous de la même hauteur. Ceci est de la plus haute importance pour la pratique future du calcul.

Voici le type auquel il faudra se tenir en principe :



Comme curiosité, on pourra faire remarquer que tous ces chiffres, au dire de quelques vieux auteurs, tirent tous leur origine de la figure formée d'un carré et de ses diagonales comme on le voit ci-dessous ; mais ce n'est pas bien certain.



L'important c'est de faire traduire des nombres de bâtonnets en jetons, de jetons en chiffres, en ne prenant pas de très gros nombres, surtout pour commencer. Nous remarquerons que nous n'avons pas besoin de faire nos chiffres de différentes couleurs ; puisque la place qu'ils occupent nous permet facilement de savoir s'ils représentent des unités simples, des dizaines, des centaines, etc. (ou des jetons blancs, rouges, orangés, etc., encore des bâtonnets, des paquets, des fagots, etc.).

Mais ici arrive une observation importante. S'il n'y a pas du tout de jetons d'une certaine couleur, tout à l'heure nous ne mettions rien. Gomme à présent nous ne distinguons plus les couleurs que par le rang de chacun des chiffres, si nous ne mettions rien, cela conduirait à tout embrouiller, car nous devrions laisser une place vide, toujours bien égale à la largeur d'un chiffre, et on n'est pas assez habile pour écrire toujours si régulièrement. En outre, si l'absence avait lieu dans les unités, comment pourrions-nous savoir ce que signifie le dernier chiffre à droite ? Pour éviter toua ces ennuis, on met, aux places non occupées, un caractère rond, 0, qu'on appelle *zéro*[7], qui n'a aucune valeur, mais qui occupe la place. C'est un bon serviteur modeste, qui garde la maison, et qui vous dit : il n'y a personne ici ; alors, je ne compte pas, je ne suis rien ; mais je défends qu'on entre.

Dés lors, nous pouvons, en multipliant et variant beaucoup les exercices, faire écrire quantité de nombres, faire lire beaucoup de nombres écrits, en usant souvent du zéro. S'il y a plusieurs élèves, on peut les mettre en concurrence, piquer légèrement leur

7. On ne sait pas quel fut l'inventeur du zéro. Mais cette idée de génie parait être d'origine hindoue.

émulation, les amener de plus en plus à lire et à écrire vite et correctement, et leur déclarer en fin de compte qu'ils connaissant maintenant la numération écrite.

Une fois là, il est bon de reprendre las exemples d'additions et de soustractions, qu'on a su traiter précédemment avec des bâtonnets ou des jetons, en se servant à présent des chiffres. Mais il y aura quelques observations utiles à faire, très utiles même, qui auparavant n'auraient pas eu leur place. L'une d'elles concernant l'addition, consiste à habituer l'élève à parler le moins possible, à ne jamais dire par exemple : je pose tel chiffre, et je retiens tel nombre.

Il me suffira, pour me faire comprendre de l'exemple d'addition ci-contre, qu'on devra traduire ainsi, en langage parlé : 7 et 4 : dix-un, et 8 : dix-neuf, et 9 : vingt-huit, et 4 : trente-deux. On écrit 2, sans rien dire ; puis on ajoute je retiens 3, et 8 : dix-un, et 4 : dix-cinq, et 6 vingt-un, et 2 : vingt-trois (on écrit 3). Je retiens 2, et 9 : dix-un, et 5 : dix-six, et 1 : dix-huit (on écrit 8). Je retiens 1, et 3 : 4, et 6 : dix, et 2 : dix-deux. On écrit 2, puis 1 à sa gauche.	3087 6944 560 208 29 + 2004
Et on lit le total : dix deux-mille, huit-cent trente deux.	12832

Une seconde remarque concerne la pratique de la soustraction, lorsqu'il y a au plus grand nombre, à un certain rang, un chiffre plus petit que celui qu'on lit au-dessous. Reprenons l'exemple du n° 7 ; de 52 il faut enlever 18.

52	4	12
18	1	8
34	3	4

Ce que nous avons fait avec nos bâtonnets se trouve traduit ci-dessus. Mais il ne faut pas qu'on ait à écrire autre chose que 52 et 18 avant le résultat de l'opération ; et il peut très bien arriver qu'on oublie que l'on s'est emparé d'une dizaine en haut, et qu'il n'en reste plus que 4 au lieu de 5. Dès lors, on procède autrement, en remarquant que retrancher 1 de 4, c'est la même chose que retrancher 2 de 5. On dira alors : 8, de dix-deux : 4, (on écrit 4) ; je retiens 1, et 1, 2, de 5 : 3. On prend ainsi l'habitude de retenir 1, chaque fois qu'on a préalablement ajouté dix au chiffre d'en haut.

Beaucoup d'exercices d'addition, et de soustraction, devront ainsi être poursuivis. L'enfant s'y intéressera ; mais ne cherchez pas à lui rien démontrer. S'il semble quelquefois embarrassé, ramenez-le à ses jetons ou à ses bâtonnets ; et ne cherchez qu'à lui donner la pratique du calcul et non à lui faire apprendre des mots incompris. Si des remarques lui viennent à l'esprit, et s'il en fait part, écoutez-le avec grande attention. Ne craignez pas de revenir en arrière de temps en temps, afin de l'habituer à assimiler ses nombres, écrits en chiffres, avec les collections de bâtonnets, de jetons ou d'objets quelconques. Et par dessus tout, ne prolongez pas les séances, ne laissez pas faiblir l'intérêt et survenir la fatigue ; c'est le plus mortel fléau de l'enseignement.

Si vous le jugez convenable, vous pouvez désormais bien que rien ne presse, initier l'élève aux noms vulgaires des nombres 11, 12, 13, 14, 15, 16. Mais n'abandonnez pas encore septante, octante, nonante, pour désigner 70, 80, 90.

11. LES BÂTONS BOUT À BOUT

Reprenons les bâtonnets que nous avons employés déjà : supposons que nous en ayons trois tas, par exemple, dans lesquels il y a 5, 3 et 4. bâtonnets. Si nous mettons tous les bâtonnets à la suite les uns des autres dans une seule direction, la longueur de cette file sera de 12 bâtonnets, c'est-à-dire donnera la somme des nombres représentés par les trois tas.

On arriverait au même résultat, en remplaçant les bâtonnets, du premier tas par une tige ayant la longueur de 5 bâtonnets, celle du 2ème tas par une tige dont la longueur serait celle de 3 bâtonnets, et ceux du 3ème tas par une tige dont la longueur serait celle de 4 bâtonnets.

Si au lieu de ces nombres très petits on en prenait de plus grands, et si au lieu de 3 nombres on en prenait autant qu'on voudrait, tout ce qui vient d'être dit pourrait se répéter. Les tiges seraient plus longues, il y aurait plus de 3 tiges, et voilà tout.

Nous constatons ainsi qu'un nombre quelconque peut être représenté par une tige de longueur convenable, et que pour faire la somme de plusieurs nombres Il n'y a qu'à porter bout à bout, les unes à la suite des autres, les tiges qui les représentent. La longueur de la file de tiges ainsi obtenue sera la somme cherchée.

12. LA LIGNE DROITE

Les tiges dont nous venons de parler, dans les opérations indiquées, doivent toujours être placées en ligne droite, à la suite les unes des autres. Qu'est ce que c'est donc, une ligne droite ? Nous en avons l'idée par le trait que trace un crayon très pointu glissant le long d'une règle bien dressée ; ou par un fil extrêmement fin, un cheveu par exemple tendu entre deux supports. Cette notion générale nous suffit, nous sentons très bien que si par exemple la règle était plus longue, la feuille de papier plus large, nous pourrions tracer plus loin notre ligne droite, soit d'un bout, soit de l'autre ; et comme il n'y a pas de raison pour jamais s'arrêter, nous comprenons que la ligne droite ; est, comme on le dit, une figure indéfinie. Nous ne nous en servirons jamais que jusqu'au terme où nous en aurons besoin, mais ce terme pourra être aussi éloigné qu'il nous plaira.

FIG. 6

Si nous prenons une droite (fig. 6) et si nous marquons un point A, et un autre point B, la portion de droite AB comprise entre ces deux points est ce qu'on appelle un segment de droite. Les tiges que nous avons employées tout à l'heure s'appliquent donc sur des segments de droite, et la longueur de ces tiges est la même que celle des segments sur lesquels elles s'appliquent.

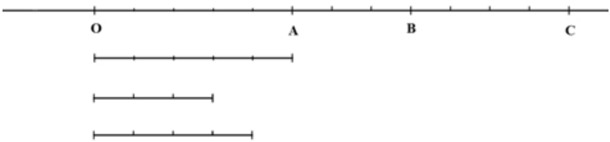


FIG. 7

Ainsi (fig. 7) pour revenir à l'exemple du numéro précédent, prenons une ligne droite sur laquelle nous plaçons un point O, n'importe où ; à partir de ce point, portons un segment OA qui a la même longueur que notre 1ère tige, 5 bâtonnets ; à partir de A, portons un segment AB ayant pour longueur celle de la 2ème tige, 3 bâtonnets ; puis à partir de B, un autre BC dont la longueur est celle de la 3ème tige, 4 bâtonnets. Le segment OC aura pour longueur 12 bâtonnets, somme de 5, 3 et 4. Dire qu'on ajoute les nombres, les tiges, les segments de droite, c'est toujours la même chose. Et l'addition se fait en portant les tiges, ou les segments, bout à bout, les uns à la suite des autres.

Cette opération doit nécessairement se faire en portant les segments dans un même sens ; nous supposerons que c'est de notre gauche vers notre droite, invariablement.

Dans la figure 7, nous pourrons ainsi trouver des sommes qui iront aussi loin que nous voudrons, à droite de O, mais jamais rien à gauche.

13. LES DIFFÉRENCES PAR BÂTONNETS

Il n'est pas plus difficile de chercher une différence qu'une somme, en nous servant de bâtonnets. Supposons par exemple que de 11 il s'agisse de retrancher 4. Nous porterons 11 bâtonnets bout à bout en ligne droite ; puis, en commençant par le bout à droite de cette file, nous enlèverons 4 bâtonnets ; il nous restera une file de 7 bâtonnets ; 7 est la différence entre 11 et 4.

FIG. 8

Si on commençait par placer une tige longue de 11 bâtonnets, il faudrait, semble-t-il, en recouper un bout long de 4, pour avoir la différence. Mais il y a un autre moyen, qu'on va comprendre tout de suite (fig. 8) en parlant de segments au lieu de tiges. Portons sur une droite, à partir du point 0, un segment OB long de 11 bâtonnets. A partir de B, portons un segment long de 4 bâtonnets, mais au lieu de le supposer tracé de gauche à droite, menons le au contraire en BC de droite à gauche. Le segment OC représentera par sa longueur la différence 7.

On résume quelquefois ceci en disant que pour ajouter plusieurs segments, il faut les porter bout à bout *dans le même sens* ; et que pour retrancher un segment d'un autre, il faut le porter bout à bout à la suite de cet autre, mais *en sens contraire.*

Toutes ces choses, d'ailleurs, sont non seulement faciles, mais évidentes ; il suffit de varier un peu les exemples pour y intéresser l'enfant ; il ne faut pas craindre non plus de lui faire manipuler le plus possible de bâtonnets, tiges (bien simples à se procurer) et reproduire ses opérations sur une ardoise ou un papier.

II va maintenant pénétrer dans les régions de la « haute science ». S'il faisait mine de s'en enorgueillir, calmez le et réfrénez cette manifestation, en lui rappelant, d'une part que l'Algèbre est une des parties les plus faciles de la science mathématique, et en second lieu , qu'il ne sait rien, n'apprend rien quant à présent, sinon des jeux qui lui serviront plus tard, grâce au souvenir qu'il en aura gardé.

14. NOUS ENTRONS DANS L'ALGÈBRE

Jusqu'à présent nous avons appris à faire des additions, donnant des sommes, et des soustractions, donnant des différences. Par exemple, la somme de

8, de 5 et de 14 est 27. On a imaginé un signe, +, qui représente l'addition, et qui, s'énonce *plus*, et aussi un symbole = qui s'énonce *égale*. En sorte que le résultat que nous venons de rappeler pourra s'écrire

$$8 + 5 + 14 = 27$$

et se lira : 8 plus 5 plus 14 égale 27.

De même, pour la soustraction, on se sert d'un signe –, qui s'énonce *moins*, et si on écri

$$7 - 5 = 2$$

cela se lira : 7 moins 5 égale 2, ce qui veut dire qu'en retranchant 5 de 7, on obtient 2 comme différence.

Toutes les opérations de cette nature pourront se traduire par des tiges ou des segments. comme nous l'avons vu précédemment. Ainsi, en regardant la figure 7, nous voyons qu'elle signifie

$$5 + 3 + 4 = 12,$$

et que cela peut encore s'écrire

$$OA + AB + BC = OC$$

La figure 8 signifie,

$$11 - 4 = 7$$

et on peut s'amuser à en faire ainsi tant qu'on voudra, et à traduire les opérations sous ces différentes formes.

On comprend qu'à la place de 8, 5, 14, ou de 5, 3, 4 dans les exemples ci-dessus, on pourrait mettre n'importe quels autres nombres ; si on les appelle *a*, *b*, *c*, en écrivant $a + b + c = s$, on exprimera toujours la somme de trois nombres ; cette somme serait 27 dans le premier exemple, 12 dans le second.

De même, $a - b = r$ exprime que la différence obtenue en retranchant b de a est égale à r. Par exemple, dans la figure 8, a = 11, b = 4, et r = 7.

C'est souvent très commode, d'indiquer ainsi des opérations par des signes, et de remplacer les nombres par des lettres. II est bon de s'y accoutumer de bonne heure, car cela servira beaucoup dans l'avenir, et évitera bien des peines. II faut même savoir ce que signifie

$$(\ ) + (\ ) \text{ ou } (\ ) - (\ )$$

quand on met quelque chose à l'intérieur des parenthèses. Cela veut dire tout simplement qu'on devra remplacer chaque expression comprise entre parenthèses par le résultat qu'elle fournit. Par exemple

$$(a - b) - (c - d) + (e - f)$$

si $a, b, c, d, e, f.$

sont remplacés par 10 2 9 6 7 5

voudra dire $(10 - 2) - (9 - 6) + (7 - 5)$

ou $8 - 3 + 2$, c'est-à-dire 7.

Toutes ces écritures sont quelquefois appelées algébriques Mais les mots n'ont que peu d'importance ; ce sont les choses qui en ont. Et ce qui suit va nous montrer des choses nouvelles.

En ajoutant des nombres nous ne sommes jamais arrêtés. Quand on a plusieurs tas de haricots on peut toujours les réunir en un seul tas. L'addition, en d'autres termes, est toujours possible, et nous pouvons la traduire en chiffres, en jetons, en allumettes, en bâtonnets, en tiges, en segments de droite, comme il nous plait.

Il n'en va pas de même de la soustraction. Si j'ai un tas de 7 jetons, par exemple, et que je veuille en enlever 10, la chose, ainsi que nous l'avons remarqué déjà, est manifestement impossible.

FIG.9

Cependant, si nous reprenons ce qui a été dit plus haut et ce que traduit la figure 8, il faudrait, pour faire la soustraction au moyen de tiges, ou de segments de droite, porter (fig. 9) sur une droite un segment OB ayant pour longueur 7 allumettes, puis au bout porter *en sens contraire*, c'est-à-dire de droite à gauche, un segment dont la longueur soit le nombre à retrancher ; or, ceci est toujours possible et la figure 9 nous le montre, en supposant comme nous l'avons fait que ce nombre à retrancher soit 10 ; nous obtenons ainsi, la longueur BC étant 10, un point C, et nous avons pour reste le segment OC ; seulement, le point C n'est plus ici à la droite du point 0 ; il est à gauche ; le segment

OC est dirigé de droite à gauche, et sa longueur est égale à 3.

Un tel nombre est dit *négatif* : on l'écrira −3, on l'appellera *moins* 3 ; et on aura le droit d'écrire ainsi

$$7 - 10 = -3$$

Cette création des nombres négatifs rend donc possibles toutes les soustractions qui ne l'étaient pas avec les nombres ordinaires, qu'on appelle, par opposition, *nombres positifs*.

Sur ta figure 10, toute la partie à droite du point O représente le domaine des nombres positifs, ou de l'Arithmétique (flèche 1) ; toute la partie à gauche (flèche 2) représente le domaine des nombres négatifs ; et l'ensemble des deux flèches, comprenant la ligne droite tout entière, dans les deux sens, représente le domaine de l'Algèbre.

Il faudra donc maintenant, quand nous voudrons représenter des nombres par des tiges, ou des segments, faire attention au sens de ces segments, ou au signe du nombre ; ainsi (fig. 9). OB sera un segment positif, représentant le nombre 7, ou + 7 ; OC sera un segment négatif représentant le nombre − 3, négatif lui aussi.

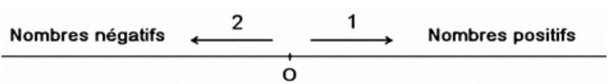


FIG. 10

Ceci, pour ne pas nous tromper, nous oblige à considérer, dans les deux bouts d'un segment, l'un qu'on appellera *son origine*, et l'autre, *son extrémité* ; et le sens du segment sera toujours celui qui part de l'origine pour aller vers l'extrémité. Quand on écrira le segment AB, cela voudra toujours dire que A est l'origine, et B l'extrémité. Ceci doit nous obliger à modifier un peu, et bien aisément, notre matériel de bâtonnets. II suffira de les noircir légèrement à l'un de leurs deux bouts, en les trempant, par exemple, dans de l'encre de Chine, teinture inoffensive ; il sera convenu que le bout noir représentera toujours l'extrémité. De la sorte, en plaçant trois allumettes à la file, le bout noir vers la droite, on figurera le nombre + 3 ; en en plaçant deux à la file, le bout noir à gauche, on figurera le nombre – 2 ; et ainsi de suite.

On dira toujours qu'on ajoute un nombre à un autre en portant bout à bout, dans le sens convenable, les segments qui les figurent. Par exemple pour ajouter 11 et – 4, on prendra un segment OB de longueur 11, dirigé de gauche à droite, et à la suite, un segment BC de longueur 4, dirigé de droite à gauche. Or (fig. 8) c'est justement ce que nous avons fait pour obtenir la différence 11 – 4. On peut ainsi écrire 11 + (- 4) = 11 – 4 = 7 ; et les soustractions se ramènent à des additions.

Les exercices sur les nombres négatifs peuvent se varier autant qu'on le voudra et seront tout à fait faciles avec nos bâtonnets noircis à leur extrémité. Rien n'empêchera de former aussi des tiges longues de plusieurs bâtonnets, et de les noircir également d'un bout, afin de distinguer leur extrémité. On se familiarisera vite avec cette notion si simple et si nécessaire, du signe ou du sens des nombres.

D’ailleurs, si les nombres négatifs surprennent quelque fois tout d’abord, il suffit de réfléchir un peu pour en trouver l’explication toute naturelle. Un nombre, dit-on, ne peut pas être plus petit que rien, c’est-à-dire que zéro. Cependant dans le langage courant, nous disons tous les jours que le thermomètre a marqué tant de degrés au-dessous de zéro. Quand nous voulons indiquer la hauteur d’un point au-dessus du niveau de la mer, nous comprenons à merveille que, si ce point est au fond de la mer, il sera au-dessous. Si, partant de chez moi, je veux compter le chemin que je ferai dans un sens déterminé, et si je marche dans le sens exactement contraire, je sais bien que je ne pourrai pas employer le même nombre pour représenter deux choses opposées Un homme sans aucune fortune, mais qui ne doit rien, n’est pas riche ; mais si, dépourvu de fortune, il a des dettes, ou peut dire qu’il a moins que rien ; sa fortune est négative. Un bouchon de liège a un certain poids ; si on le lâche dans l’air, il tombe ; plongez ce bouchon dans l’eau et lâchez-le il remonte ; son poids est devenu négatif, en apparence tout au moins. Bref, les nombres négatifs, loin d’avoir un caractère mystérieux, s’adaptent de la façon la plus naturelle à toutes les quantités, et il n’en manque certes pas, qui par leur essence même comportent deux modes opposés : chaud et froid, haut et bas, crédit et débit, avenir et passé, etc. Par des exemples concrets, on peut faire pénétrer ces notions simples dans la cervelle de très jeunes enfants car elles sont véritablement enfantines. Ils s’y intéresseront si vous ne cessez d’agrémenter vos explications de manipulations de bâtonnets et de tiges, et cela profitera plus à la formation de leur esprit que la récitation monotone de règles incomprises ou de définitions incompréhensibles.

Ils n'ont encore pratiqué, en se jouant, que les deux premières règles de l'arithmétique, addition et soustraction ; il n'y a pas longtemps qu'ils savent écrire les chiffres ou tracer quelques lettres ; et les voilà déjà lancés – et vous aussi – à corps perdu, dans l'Algèbre. Si vous prononcez devant eux ce mot redouté, ne manquez pas de leur dire, que cette science si utile et si belle est relativement moderne, et que, c'est à François Viète[8] que revient la gloire d'en avoir été l'inventeur.

15. COMPTES ; MESURES ; RAPPORTS

Nous avons vu, depuis le début, que ce que nous nous proposons constamment, c'est de compter et de mesurer. Si nous avons devant nous un tas de grains de blé, et si nous trouvons, en les comptant, qu'il y en ait 157, ce nombre, comme nous l'avons fait remarquer déjà, pourra aussi bien nous servir à représenter une collection de jetons, d'allumettes, d'arbres, de moutons ou de n'importe quoi. Si pour déterminer une longueur nous avons pris des bâtonnets tous

8. Viète, mathématicien français, né à Fontenay-le-Comte (1540-1603).

pareils les uns au bout des autres et si nous en avons trouvé 157 pour mesurer cette longueur, nous disons qu'elle est de 157 bâtonnets. Dans tous ces divers cas, nous ne pourrions rien évaluer si nous n'avions pas l'idée d'un grain de blé, d'un jeton, d'un arbre, d'un mouton, d'un bâtonnet.

Le nombre n'a de raison d'être que par la comparaison qu'il amène avec l'objet unique (grain de blé, jeton, etc.) sans lequel on ne pourrait le former, et cet objet unique est appelé *unité*. Cette comparaison est ce qu'on appelle un rapport, et cette idée de rapport conduit à dire qu'un nombre est simplement le rapport de la collection avec l'unité.

Il est d'autant plus nécessaire de bien se mettre dans la tête cette notion-là, que l'unité n'est pas toujours la même. Ainsi, ayant formé des paquets de bâtonnets, prenons-en un tas et comptons-les ; nous en trouvons sept ; sept est le rapport de notre collection de bâtonnets à un paquet, qui est l'unité. Maintenant, éparpillons nos bâtonnets en défaisant les liens des paquets, et comptons ; c'est le bâtonnet qui va devenir l'unité, et nous en compterons septante ; ce nombre sera le rapport de la même collection à un bâtonnet.

De même, prenons trois fagots de bâtonnets ; si nous comptons par paquets, nous trouverons trente paquets ; et par bâtonnets, trois cents.

Trois sera le rapport de tout le tas de bâtonnets à un fagot ; trente, le rapport du même tas à un paquet ; trois cents, le rapport à un bâtonnet.

On peut produire tant qu'on en voudra des exemples semblables, en les variant â l'infini, de manière à bien familiariser l'élève avec cette notion de rapport, qui est à la base même de tout compte et de toute mesure, et qu'on rejette cependant â la fin de l'Arithmétique, dans l'enseignement classique, par on ne sait quelle aberration. Il n'est pas possible de compter deux haricots sans avoir la notion du rapport de deux à un ; de mesurer une longueur de trois mètres, sans comparer cette longueur à celle d'un seul mètre (rapport de trois à un) et ainsi de suite.

Ce sera ici l'occasion de montrer à l'élève, sans aucune explication théorique, sans aucune définition, sans aucun appel à sa mémoire, les objets les plus vulgaires du système métrique que l'on aura sous la main ; mètres, litres, pièces de monnaie, poids, etc. On l'exercera à en faire usage, à s'en servir pour mesurer ou compter, et l'idée de rapport s'incrustera dans son esprit, s'y associera indissolublement avec celle de nombre, ce qui est essentiel pour une saine compréhension, le jour où, dans l'avenir, il devra passer de l'amusement à l'étude. Et cette étude alors pourra devenir elle-même intéressante et amusante, au lieu d'avoir le caractère d'une ennuyeuse corvée, pour ne pas dire d'une torture.

16. LA TABLE DE MULTIPLICATION

Nous allons maintenant apprendre à former un petit tableau, qui nous sera très utile pour ce qui va suivre, et qui constitue un bon exercice, par sa seule construction. Sous la forme où nous le représentons, ce tableau est le plus souvent appelé table de Pythagore[9] qu'il ait été ou non inventé par ce grand homme, ce dont on n'est pas trop sûr ; cela prouve en tous cas que la chose, n'est pas nouvelle.

Pour former la table de multiplication, nous commençons par écrire, sur une feuille de papier quadrillé, les 9 premiers nombres dans 9 cases qui se suivent

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Puis, prenant le premier chiffre 1, nous l'ajoutons à lui-même ce qui fait 2, que nous écrivons au-dessous ; puis, nous ajoutons 1 à 2, ce qui fait 3 ; et ainsi de suite, ce qui nous donne la première colonne de la figure 11.

On s'y prendra de même pour avoir les autres colonnes ; mais ce qui est important, c'est d'arriver à écrire seulement les résultats et rien autre chose. Par exemple, pour la colonne qui commence par 7, on dira : 7 et 7,14 ; et 7, 21 ; et 7,28 ; et 7, 35 ; et 7, 42 ;et 7, 49 ; et 7, 56 ; et 7,63. Et on écrira successivement 14, 28, 28,… 63 dans la colonne commençant par 7.

9. Pythagore, philosophe grec, né à Samos, V$^{\text{ème}}$ siècle avant J.-C.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	64	72	81

FIG. 11

Il suffit, on le voit, de bien savoir sa table d'addition pour arriver très vite à former le tableau. Quand il a été complètement construit, on s'aperçoit que les lignes et les colonnes sont toutes pareilles. Ainsi, la ligne qui commence par 3 contient, comme la colonne commençant par 3, les nombres 3, 6, 9,… 27.

II est tout à fait indispensable d'arriver à se mettre ce tableau dans la tête. Mais la vraie manière d'y arriver, c'est de ne jamais essayer de l'apprendre. On l'apprend en le construisant, en le vérifiant, en l'examinant avec soin, en en faisant usage comme nous le verrons plus loin. Si on ne l'a pas présent à l'esprit, il faut le reconstruire, ce qui n'est pas bien long ; et de la sorte on finira par le *voir*, les yeux fermés.

Il n'est pas défendu, d'ailleurs, de pousser la table plus loin que 9 ; mais si on l'amenait par exemple jusqu'à

20 ou 25, la construction prendrait beaucoup plus de temps, et il n'est pas indispensable de conserver la mémoire de la table poussée aussi loin, bien que ce ne soit pas inutile :

Quelques remarques seront faites simultanément sur certaines particularités de la table. Ainsi dans la colonne (ou là ligne) commençant par 5, les chiffres des unités sont alternativement 5 et 0 ; dans la colonne (ou la ligne) commençant par 9, les chiffres des unités 8, 7, 6,… vont toujours en diminuant de 1 et ceux des dizaines 1, 2, 3,… en augmentant de 1. Les explications ne seraient pas difficiles à trouver.

Ce qu'il y a d'assez remarquable, par exemple, c'est qu'on pourrait faire une table de multiplication sans écrire un seul chiffre ; il suffirait pour cela (fig. 12) d'avoir un papier quadrillé à cases assez petites. La table que nous donnons ici est poussée jusqu'à 10. La construction consiste à porter successivement sur une ligne horizontale 1, 2, 3,… 10 cotés d'une case, et à marquer les points de division. Puis sur une ligne verticale, en prenant le même point de départ, on fait la même chose ; en menant les lignes en traits forts par les points de division, on obtient de grandes cases ; et chacune de ces grandes cases contient un nombre de petites qui est précisément celui qui se trouvait tout à l'heure dans notre table en chiffres. La raison de cette identité est simple ; car notre table de la fig. 12 ne fait qu'exécuter graphiquement les opérations qui dans la fig. 11 résultent du calcul.

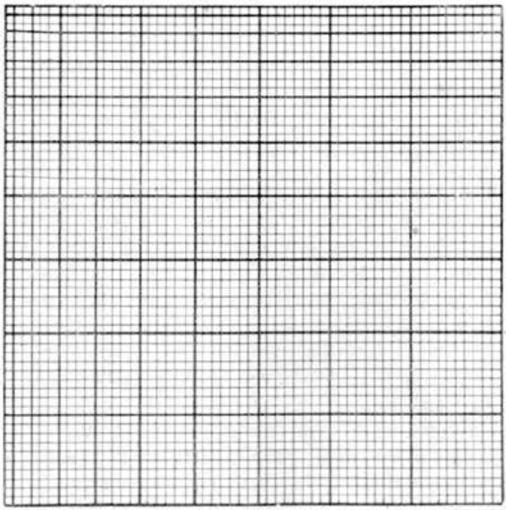


FIG. 12

17. LES PRODUITS

Si je prends un tas de 7 bâtonnets, et si je forme 3 tas pareils, je peux me proposer de trouver combien cela fera de bâtonnets en tout. On appelle cela faire la *multiplication* de 7 par 3. Le résultat qu'on cherche s'appelle le *produit* de 7 par 3 ; on appelle 7, *multiplicande* ; 3, *multiplicateur* ; si au lieu de mêler tous les bâtonnets, on laissait les 3 tas séparés, on voit qu'en prenant un tas pour unité, le nombre qui représenterait le produit serait 3 ; ou que le rapport du produit à un tas serait 3 ; or le rapport de 3 à 1 c'est aussi 3.

Donc on peut dire indifféremment :

Multiplier 7 par 3, c'est répéter 7, 3 fois ; c'est trouver un nombre dont rapport à 7 soit le même que celui de 3 à 1 ;

Multiplier un nombre (multiplicande) par un autre (multiplicateur), c'est en trouver un (produit) qui soit formé en répétant le multiplicande autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur ; ce produit, enfin, a un rapport au multiplicande qui est pareil au rapport du multiplicateur à l'unité.

Ce ne sont pas là des formules qu'il faille faire apprendre à l'enfant ; ce sont des idées dont il faut le pénétrer. Or, autant les formules sont d'apparence barbare, autant les idées sont d'une simplicité primitive, surtout quand on se donne la peine de les traduire an grains de blé, en bâtonnets ou en cases d'un papier quadrillé,

Ce qui est certain, c'est que l'enfant s'apercevra tout de suite que pour trouver le produit, il n'y a qu'à faire une addition, que le produit de 7 par 3 est 7 + 7 + 7, de même que 3 est 1 + 1 + 1. Et comme la table du numéro précédent a justement été faite da cette manière, elle nous donne le produit cherché 21, en prenant la colonne qui commence par 7, la ligne qui commence par 3 et cherchant la case de rencontre où on lit 21.

Ne manquons pas d'apprendre que le signe de la multiplication est ×, et qu'ainsi la phrase : « le produit de 7 par 3 est 21 » se traduit par 7 × 3 = 21.

Au lieu de 7×3 on écrit souvent 7.3 ; au lieu de 7 et 3, on peut avoir deux nombres quelconques représentés par *a, b*. Leur produit s'exprimera par $a \times b$ ou par $a.b$, ou simplement par ab ; écrire par exemple $ab = p$, c'est une manière d'exprimer que le produit de a par *b* est *p*.

Il est bon de savoir aussi que l'on peut considérer des produits tels que $a \times b \times c \times d$, ou *abcd*, par exemple ; cela veut dire qu'on multiplie *a* par *b*, puis le produit obtenu par *c*, puis le nouveau produit par *d ; a, b, c, d* s'appellent les *facteurs* du produit *abcd* ; on peut avoir ainsi des produits d'un nombre quelconque de facteurs.

Quant à la pratique de la multiplication, il faut d'abord remarquer que la table nous donne des résultats lorsque le multiplicande et le multiplicateur sont tous deux plus petits que dix. On montrera facilement ensuite comment on multiplie un nombre par 10, 100, 1000…

L'application à des exemples nombreux, en se conformant aux règles habituelles données par tous les livres d'arithmétique, pourra être utile, à la condition de ne l'accompagner d'aucune théorie.

Mais je ne saurais assez recommander, auparavant, de donner la préférence à la méthode musulmane, qui est presque aussi rapide, beaucoup plus facile à comprendre et à pratiquer, et pas assez connue dans l'enseignement français, bien que signalée par plusieurs auteurs.

Nous allons l'exposer (fig. 13) sur l'exemple très simple 9347 × 258.

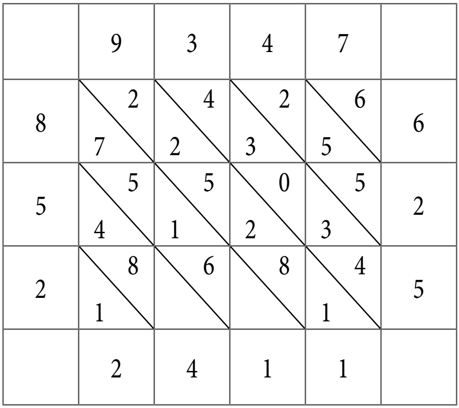


FIG. 13

Le multiplicande a 4 chiffres et le multiplicateur en a 3 ; prenons sur un papier quadrillé 3 lignes de 4 cases chacune ; au-dessus de cette figure, écrivons les chiffres du multiplicande 9, 3, 4, 7 de gauche à droite ; à gauche, et de bas en haut, ceux du multiplicateur 2, 5, 8 ; ayant tracé les lignes pointillées de la figure, mettons maintenant dans chaque case le produit des deux nombres correspondants, comme si nous bâtissions une table de multiplication, mais en mettant toujours le chiffre des dizaines du produit au-dessous et celui des unités au-dessus de la ligne pointillée ; enfin, faisons l'addition en prenant pour direction des colonnes celles des lignes pointillées ; on trouvera ainsi le produit 2 411 526. Le gros avantage de cette méthode est de n'obliger à aucuns retenue dans les multiplications partielles, ni à l'observation d'aucun ordre spécial. Pourvu qu'on remplisse toutes les cases, on est sûr de n'avoir rien oublié.

Sur le même exemple et avec la même méthode, nous indiquons (fig. 14) une disposition légèrement différente, qui n'oblige pas à faire l'addition obliquement et qui en ce sens est peut-être plus commode. Elle se passe d'ailleurs de toute explication après ce que nous avons dit.

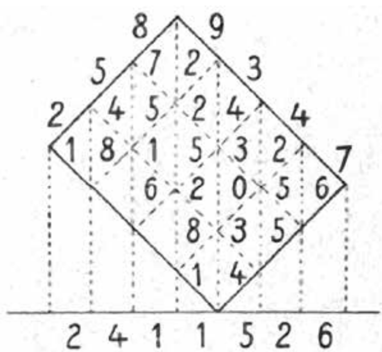


FIG. 14

Quant à la justification de cette méthode musulmane, elle est évidente pour toute personne connaissant la théorie de la multiplication, et quant à présent inutile à l'enfant. S'il est curieux d'esprit, il la trouvera peut-être de lui-même. L'important, c'est qu'il puisse calculer correctement, et que cela l'intéresse. Dès que survient la fatigue ou l'ennui, il faut sans plus tarder passer à autre chose.

Nous n'abandonnerons pas cependant ce qui est relatif à la multiplication sans rappeler qu'un produit

$$a \times a \times a \times \ldots \times a$$

dont tous les facteurs sont égaux s'appelle une puissance de a ; qu'un tel produit s'écrit a^n , n étant le nombre des facteurs, et qu'on le nomme la n-ième puissance de a ; que la 2ème puissance est appelée *carré* et la 3ème *cube* : (on verra bientôt pourquoi). Le nombre n est appelé *exposant*.

Par exemple, la 4ème puissance de 2 est $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 16$; l'exposant est 4. Le cube de 5 est $5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125$; l'exposant est 3.

Le carré de 7 est $7 \times 7 = 7^2 = 49$; l'exposant est 2.

18. OPÉRATIONS CURIEUSES

Il y a un certain nombre de résultats d'opérations qui frappent l'esprit par des particularités attirant l'attention. Leur grand mérite est par cela même de donner le goût du calcul, en piquant la curiosité.

Je vais en donner seulement quelques exemples, suffisants pour le but poursuivi.

I. Dites à un enfant, après lui avoir remis une enveloppe cachetée, d'écrire un nombre de 3 chiffres à sa fantaisie ; soit 713 ; de le retourner bout pour bout, ce qui donne 317 ; de faire la différence, 396 ; de retourner ce résultat bout pour bout, 693 ; enfin de faire la somme de ces deux derniers nombres, 1089. Là-dessus, priez-le d'ouvrir l'enveloppe ; il y trouve un papier sur lequel vous avez écrit par avance 1089. Et vous avez pu l'écrire avec d'autant plus de sûreté que tout autre nombre que 713 aurait conduit au même résultat, pourvu que les deux chiffres extrêmes soient différents.

II. Si l'on fait les opérations $12 \times 9 + 3$. $123 \times 9 + 4$, et ainsi de suite, jusqu'à $123456789 \times 9 + 10$, les résultats s'obtiendront en écrivant rien que des chiffres 1.

Au contraire $9 \times 9 + 7$, $98 \times 9 + 6$,… $9876543 \times 9 + 1$, donneront des nombres qui s'écriront rien qu'avec des chiffres 8.

III. Le produit 12345679×9 s'écrit uniquement avec des 1. En prenant le même multiplicande 12345679 et les multiplicateurs, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, on aura encore des produits curieux, s'écrivant tous avec le même chiffre répété.

IV. Considérons le nombre 142857 ; si on le multiplie successivement par 2, 3, 4, 5, 6, on aura :

285714, 428571, 571428, 714285, 857142,

et ces nombres s'écrivent avec les mêmes chiffres que le nombre donné.

Si on le multiplie par 7, on trouve 999999.

Si on le coupe en deux par le milieu, on a 142 et 857 ; et la somme de ces deux nombres est 999. On a le même résultat en partant d'un quelconque des cinq produits écrits plus haut, et en le coupant en deux.

V. Complétons ceci par une indication sur les multiplications par 9, par 99, par 999, qu'on devra toujours faire par 10, 100, 1000, etc., puis en retranchant le multiplicande. Si celui-ci n'est pas trop gros, on arrivera même à pouvoir assez rapidement faire mentalement ces multiplications.

19. LES NOMBRES PREMIERS

En parcourant des yeux une table de multiplication, on s'aperçoit qu'elle renferme certains nombres jusqu'à la limite qu'elle comporte, mais non pas tous ces nombres. Autrement dit, il y a des nombres qui sont des produits, et d'autres qui ne le sont pas ; ceux-ci sont appelés des nombres premiers ; les autres sont appelés des nombres composés.

Par exemple, 2, 3, 5, 7, 29, 71 sont des nombres premiers ; 4, 6, 9. 87, 91 sont des nombres composés, car $4 = 2 \times 2$, $6 = 2 \times 3$, $9 = 3 \times 3$, $87 = 3 \times 29$, $91 = 7 \times 13$.

Si loin qu'on avance dans la suite des nombres, on rencontre toujours des nombres premiers, et des nombres composés. Cette distinction est capitale ; et cependant, malgré les travaux des plus grands savants, on ne sait que fort peu de chose sur les nombres premiers. C'est à ce point qu'on est incapable, lorsqu'un nombre est un peu considérable, de dire s'il est premier ou non, à moins de se livrer à un tâtonnement qui peut exiger des calculs extrêmement longs et pénibles. Cela montre combien la science est peu avancée sur ces questions qui paraissent simples, et combien il convient d'être modeste, lorsque nous comparons le peu d'étendue de nos connaissances à l'immensité des choses que nous ignorons.

Toutefois, dès l'antiquité, on a connu un moyen de former les nombres premiers jusqu'à une limite aussi lointaine qu'on le voudra. Ce moyen consiste à écrire la liste toute entière de ces nombres, puis à biffer ceux qui sont des produits par 2, par 3, par 5, etc.

Nous allons l'appliquer ici aux 150 premiers nombres. Écrivons-les, en supprimant 1 qui nous est inutile :

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61
62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73
74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85
86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97
98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109
110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121
122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133
134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145
146	147	148	149	150							

Partant de 2, si nous marchons de 2 en 2 en suivant la liste, nous rencontrons les produits par 2, qui sont 4, 6,.... c'est-à-dire les nombres pairs ; ils ne sont donc pas premiers, et nous les biffons d'un trait jusqu'à 150.

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61
62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73
74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85
86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97

98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109
110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121
122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133
134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145
146	147	148	149	150							

Partons de 3, marchons de 3 en 3, et biffons de même les nombres que nous rencontrons, et qui sont des produits par 3, si ce n'est fait déjà.

2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	9	~~10~~	11	~~12~~	13
~~14~~	15	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~	21	~~22~~	23	~~24~~	25
~~26~~	27	~~28~~	29	~~30~~	31	~~32~~	33	~~34~~	35	~~36~~	37
~~38~~	39	~~40~~	41	~~42~~	43	~~44~~	45	~~46~~	47	~~48~~	49
~~50~~	51	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	57	~~58~~	59	~~60~~	61
~~62~~	63	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	69	~~70~~	71	~~72~~	73
~~74~~	75	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~	81	~~82~~	83	~~84~~	85
~~86~~	87	~~88~~	89	~~90~~	91	~~92~~	93	~~94~~	95	~~96~~	97
~~98~~	99	~~100~~	101	~~102~~	103	~~104~~	105	~~106~~	107	~~108~~	109
~~110~~	111	~~112~~	113	~~114~~	115	~~116~~	117	~~118~~	119	~~120~~	121
~~122~~	123	~~124~~	125	~~126~~	127	~~128~~	129	~~130~~	131	~~132~~	133
~~134~~	135	~~136~~	137	~~138~~	139	~~140~~	141	~~142~~	143	~~144~~	145
~~146~~	147	~~148~~	149	~~150~~							

Le premier nombre non biffé après 3, c'est 5 ; partant de 5, et marchant de 5 en 5, nous allons procéder de la même manière.

2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~	11	~~12~~	13
~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~	~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	25
~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~	31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	35	~~36~~	37
~~38~~	~~39~~	~~40~~	41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49
~~50~~	~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~	61
~~62~~	~~63~~	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~	71	~~72~~	73
~~74~~	~~75~~	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~	~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	85
~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~	91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	95	~~96~~	97
~~98~~	~~99~~	~~100~~	101	~~102~~	103	~~104~~	~~105~~	~~106~~	107	~~108~~	109
~~110~~	~~111~~	~~112~~	113	~~114~~	115	~~116~~	~~117~~	~~118~~	119	~~120~~	121
~~122~~	~~123~~	~~124~~	125	~~126~~	127	~~128~~	~~129~~	~~130~~	131	~~132~~	133
~~134~~	~~135~~	~~136~~	137	~~138~~	139	~~140~~	~~141~~	~~142~~	143	~~144~~	145
~~146~~	~~147~~	~~148~~	149	~~150~~							

Si nous faisons la même chose, pour 7, pour 11… nous trouvons qu'en conservant seulement les nombres non biffés, il reste :

2	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41
43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97
101	103	107	109	113	127	131	137	139	149		

C'est la liste des nombres premiers jusqu'à 150.

Ce procédé si ingénieux est connu sous la désignation de *crible d'Ératosthène*[10] du nom de l'inventeur.

10. Ératosthène, savant alexandrin, né à Cyrène (276-193 avant.J.-C.).

20. LES QUOTIENTS

Des tas de jetons, contenant 7 jetons chacun, ont été réunis en un seul tas qui en contient 56. On voudrait savoir combien il a fallu de petits tas pour former le gros.

L'opération qu'il faut faire pour le savoir s'appelle une division. On peut dire aussi qu'elle a pour but, connaissant un produit de deux facteurs, 56, et l'un des facteurs, 7, de trouver l'autre.

Le produit donné 56 s'appelle dividende ; le facteur donné 7 s'appelle diviseur, et le résultat qu'on cherche s'appelle le quotient.

On pourrait trouver le quotient en faisant des soustractions, c'est-à-dire en enlevant le diviseur du dividende, puis le diviseur du reste obtenu, et ainsi de suite, et en comptant combien de fois on peut l'enlever ainsi, de manière à ce qu'il ne reste plus rien. Ainsi, en enlevant successivement 7 de 56, il reste 49, 42, 35, 28, 21, 14, 7, et on voit que cela fait 8 opérations de soustractions pour épuiser tout le dividende 56. Le quotient cherché est donc 8, ce que d'ailleurs la connaissance de la table de multiplication pourrait nous montrer tout de suite.

Le procédé des soustractions successives serait impraticable avec des nombres un peu forts, à cause de sa longueur. La règle classique qu'on adopte pour faire une division n'est pas autre chose qu'un moyen de compter avec une rapidité beaucoup plus grande les soustractions qu'on effectue en bloc.

Pour habituer facilement les enfants à la pratique de la division, il faut commencer par leur faire invariablement former, en un petit tableau, les produits du diviseur par 2, 3… 9. Cela fait disparaître, dans toute la suite de l'opération, les hésitations si embarrassantes pour les commençants.

Nous indiquerons cette pratique de l'opération sur l'exemple de la division de 643207 par 273. Les produits de 273 sont :

1	× 273 =	273	6	× 273 =	1638
2	″	546	7	″	1911
3	″	819	8	″	2184
4	″	1092	9	″	2457
5	″	1365		″	

Disposons alors l'opération de la manière ordinaire

6	4	3	7	3	4	273
5	4	6				2358
	9	7	7			
	8	1	9			
	1	5	8	3		
	1	3	6	5		
		2	1	8	4	
		2	1	8	4	
					0	

Au dividende il y a 643 mille ; comme notre petite table nous montre que 643 contient 2 fois le diviseur, en enlevant du dividende 546 mille, nous faisons 2 mille soustractions d'un seul coup. Il reste 97734, contenant 977 centaines : 977 contient 3 fois le diviseur, et en enlevant 819 centaines, nous avons fait encore 300 soustractions d'un coup. Il reste 15834, contenant 1583 dizaines ; 1583 contient 5 fois le diviseur, et en enlevant 1365 dizaines, nous faisons encore 50 soustractions. Enfin il reste 2184, qui est juste 8 fois le diviseur. Donc en faisant 8 soustractions de plus nous aurons tout enlevé du dividende ; et le quotient sera 2358, nombre total de nos soustractions.

L'enfant devra prendre l'habitude de faire ainsi des divisions sans même qu'il soit nécessaire de lui donner avec trop de détails les explications qui précèdent.

La division ci-dessus a pu se faire parce qu'on avait choisi exprès le dividende et le diviseur ; mais si on prend au hasard deux nombres, il y a bien peu de chances pour que la division soit possible. On ne pourra plus enlever exactement du dividende un certain nombre de fois le diviseur, de manière à ce qu'il ne reste plus rien. Seulement, si on procède comme tout à l'heure, on enlèvera le diviseur du dividende autant qu'on le pourra, et ce qui restera du dividende sera alors un nombre plus petit que le diviseur. C'est là ce qu'on appelle reste de la division impossible.

Comme exemple très simple, supposons qu'on veuille diviser 220 par 12. On reconnaîtra que c'est impossible ; et quand on aura enlevé 18 fois 12 de 220, il restera 4 ; il s'ensuit que 220 – 4 ou 216 serait divisible par 12, et le quotient serait 18. On voit donc que les divisions impossibles, qui donnent un reste, permettent d'avoir immédiatement des divisions possibles, en remplaçant simplement le dividende par ce dividende diminué du reste.

Ne vous attachez du reste à cette opération de la division qu'au point de vue de la pratique du calcul. Les théories sont intéressantes, mais viendront plus tard utilement. Elles n'auraient guère place dans la période d'initiation.

Il est bon d'apprendre que la division s'indique par un signe (: ou –). Ainsi 56 : 7 ou $\frac{56}{7}$ exprime le quotient de 56 par 7. On peut ainsi écrire 56 : 7 = $\frac{56}{7}$ = 8. En général $\frac{a}{b}$ = q veut dire que le quotient de la division de a par b est le nombre q.

21. LE GÂTEAU PARTAGÉ ; LES FRACTIONS

Supposons que cinq personnes se proposent de se partager également un gâteau rond. On le coupera en cinq morceaux bien égaux (fig. 15) par des traits partant du milieu ; et chacun de ces morceaux, comme AOB, sera la part de chaque personne. Cette part est appelée un cinquième de gâteau ; et on représentera AOB par $\frac{1}{5}$ [ou 1/5, Michel Delord] de gâteau.

Sur les cinq personnes, deux se trouvent absentes ; mais on veut leur réserver leur part. On mettra alors de côté les morceaux AOB, BOC par exemple, exactement pareils. Ces deux morceaux pris ensemble se nommeront deux cinquièmes de gâteau et on les représentera par 2/5. Tous ces nombres, tels que 2/5 s'appellent des *fractions* ; 2 et 5 sont les deux *termes* ; 2, qui s'écrit au-dessus de la barre, est le *numérateur* ; il indique le nombre des morceaux ; 5, au-dessous de la barre, est le *dénominateur* ; il indique en combien de morceaux on a partagé le gâteau tout entier.

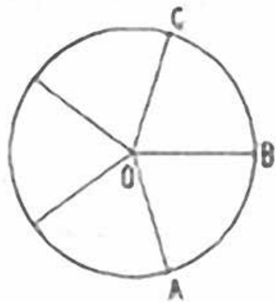


FIG. 15

Si on avait pris $\frac{5}{5}$ du gâteau, on voit bien que cela aurait fait le gâteau tout entier ; et si on avait divisé le gâteau en un nombre quelconque de parts égales, pour prendre ensuite ce même nombre de parts, on reformerait également le gâteau de sorte que la fraction $\frac{a}{a}$ dont le numérateur et le dénominateur sont pareils est toujours égale à 1.

Dans le cas où dix personnes, et non pas cinq seulement, auraient eu à se partager le gâteau, il aurait fallu le diviser en dix parts égales, des dixièmes, qu'on pourrait aussi bien obtenir en prenant les cinquièmes, tels que AOB et en les coupant chacun en deux parties égales. Donc $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$; et il n'est pas plus difficile de constater qu'en général deux fractions sont égales si on peut passer de l'une à l'autre en multipliant les deux termes par un même nombre. Ce principe fondamental de toute la théorie des fractions se constate ainsi, avec un caractère d'évidence intuitive, sur des objets concrets, et il n'en faut pas demander de démonstration.

Supposons maintenant qu'il y ait 17 gâteaux, tous pareils, et que 5 personnes veuillent se les partager également. Il y a deux moyens. L'un, c'est de partager chacun des gâteaux en cinquièmes, et chaque personne prendra un cinquième de chacun des gâteaux, ou en tout $\frac{17}{5}$. Le second moyen est de partager entre tous, autant qu'on le peut, les 17 gâteaux ; il suffit de tenter la division, qui est possible pour 15, chaque personne prenant 3 gâteaux. Il ne reste donc plus que deux gâteaux à partager. En les divisant en cinquièmes, chacun devra prendre $\frac{2}{5}$; et cela nous montre que

$$\frac{17}{5} + 3 + \frac{2}{5}.$$

Il est facile, dans cette voie, d'initier l'enfant à tout le calcul ordinaire des fractions, sur lequel il nous paraît inutile d'insister ici. Mais on n'y parviendra qu'en usant toujours d'objets concrets, gâteaux, pommes, oranges, longueurs divisées, etc. Il saisira à merveille, alors, que ces nouvelles expressions arithmétiques sont des nombres et qu'elles expriment des rapports.

Mais ce que vous devrez dire, surtout, et ce qu'on ne dit à peu près jamais, c'est que ces nombres ne peuvent s'appliquer qu'à des quantités qui soient divisibles par leur nature même, comme celles que nous avons indiquées ; si, par exemple, une question comportait la considération d'un certain nombre de personnes, l'application de nombres fractionnaires serait une absurdité, et, dans son résultat, montrerait l'impossibilité.

En d'autres termes, le calcul s'applique aux chose qui s'y prêtent, et elles sont nombreuses ; mais il ne s'applique pas à tout. Et, maxime non moins importante, qui complète celle-ci : il faut toujours réfléchir et avoir recours à son bon sens, avant de calculer.

Par exemple, voici un problème, signalé notamment par Edouard Lucas[11], et qui peut servir d'exercice utile dans cet ordre d'idées : *Un tailleur a une pièce d'étoffe de 16 mètres ; il en coupe deux mètres chaque jour ; au bout de combien de jours aura-t-il coupé toute la pièce ?* — L'étourderie, jointe à l'automatisme du

11. Ed. Lucas, mathématicien français, né à Amiens (1842-1891). Ce fut peut-être l'homme de son époque connaissant le mieux la science des nombres. II a été profondément méconnu ; le chagrin et les déceptions ont contribué à sa fin prématurée.

calcul, conduit à répondre 8, au lieu de 7 qui est le résultat qu'indique le bons sens.

Les opérations sur les fractions devront être variées, pas trop compliquées comme calcul, empruntées le plus possible à des questions concrètes effectives. Il sera bon de les compléter en attirant l'attention sur les fractions décimales, sur la manière dont on peut les écrire, et sur la pratique du calcul qui s'y rapporte.

Beaucoup de bons traités d'arithmétique pourront fournir à cet égard les indications nécessaires. Je me borne à insister sur l'utilité de se servir surtout des mesures de longueur et d'exemples empruntés au compte des monnaies.

Enfin il est bon d'observer que si le signe de la division et la notation des fractions sont les mêmes, ce n'est pas fortuitement, et que cela ne saurait faire confusion; $\frac{15}{3}$ par exemple, exprime aussi bien le quotient de la division de 15 par 3 que la fraction $\frac{15}{3}$. Cela se voit sur les objets concrets, et il n'y a qu'à le constater.

Les propriétés et le calcul des fractions peuvent être aussi exposés, d'une façon très heureuse, en faisant usage du papier quadrillé.

On en jugera par les remarques qui vont suivre; elles ne se sont présentées à mon esprit que depuis la publication de la deuxième édition. Je m'efforcerai de les indiquer ici, aussi brièvement que possible, mais en développant toutefois ma pensée de manière à l'exprimer avec une clarté suffisante. Je m'adresse aux éducateurs, et pourvu qu'ils m'aient bien compris, ils n'auront pas de peine à mettre en application les moyens proposés, sous la forme qui leur semblera la meilleure, s'ils partagent en principe ma manière de voir.

Représentons une unité concrète quelconque (pourvu que par sa nature elle soit divisible) au moyen d'un rectangle (fig. 16, 17).

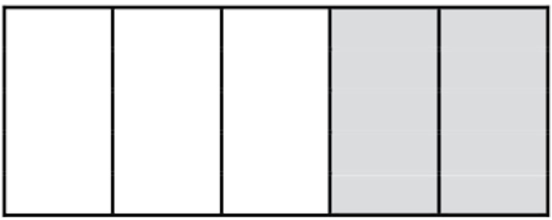


FIG. 16

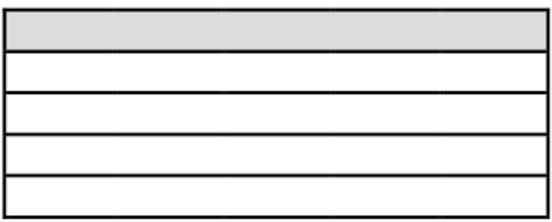


FIG. 17

Si on divise la longueur de ce rectangle en 5 parties égales, on peut le découper en 5 parties, en 5 bandes verticales pareilles. Chacune d'elles est un cinquième de l'unité (fig. 16).

Si on divise sa hauteur en 5 parties égales, on peut aussi le découper en 5 bandes horizontales pareilles, et chacune d'elles est aussi un cinquième de l'unité (fig. 17).

Si on divise sa longueur (fig. 18) en 3 parties égales, et la hauteur en 4 parties égales, l'unité pourra être découpée, par des traits passant par les points de division, en 12, ou 3×4 petits rectangles, tous pareils, et chacun d'eux sera un *douzième* de l'unité.

En prenant un nombre quelconque de ces bandes ou de ces rectangles, on a ce qu'on appelle une fraction. Si le nombre des bandes ou des petits rectangles est moindre que celui qui compose l'unité, on a une *fraction proprement dite*. S'il est plus grand, on a une *expression fractionnaire*. On voit qu'une fraction proprement dite est plus petite que 1, et qu'une expression fractionnaire est plus grande que 1. Si on prenait justement le même nombre de bandes ou de rectangles qu'il y en avait dans l'unité, on recomposerait cette unité ; une telle fraction par conséquent est égale à 1.

Quand nous dirons « fraction », cela voudra dire, d'une façon générale, une fraction proprement dite.

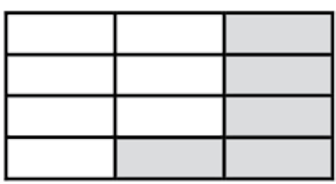


FIG. 18

En mettant des hachures sur les bandes ou les rectangles qu'on ne garde pas, on peut représenter, au moyen de la partie restée blanche, une fraction quelconque. Ainsi (fig. 16), nous voyons la fraction trois cinquièmes ; dans la fig. 17, quatre cinquièmes ; dans la fig. 18, sept douzièmes.

Le nombre des rectangles blancs (3, 4, 7 dans ces trois exemples) est appelé *numérateur* ; celui des rectangles dont est formée l'unité (5, 5, 12) est appelé *dénominateur* ; et les trois fractions s'écrivent $\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{7}{12}$.

Si on voulait représenter une expression fractionnaire, on n'aurait plus de hachures, et la figure serait plus grande que l'unité, le numérateur serait plus grand que le dénominateur. Si le numérateur est égal au dénominateur, on a l'unité elle-même.

Principe fondamental. On ne change pas la valeur d'une fraction en multipliant le numérateur et le dénominateur par un même nombre.

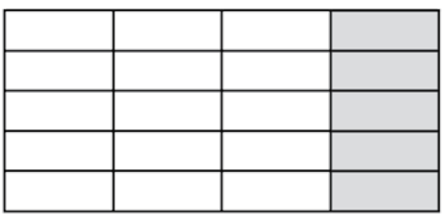


FIG. 19

Soit la fraction $\frac{3}{4}$ (fig. 19). Je veux démontrer qu'elle est égale à $\frac{15}{20}$ ou $\frac{3 \times 5}{4 \times 5}$.

La fraction $\frac{3}{4}$ était représentée par des bandes verticales. Je divise la hauteur en 5 parties égales, et j'imagine le rectangle unité découpé par des traits horizontaux passant par les points de division. Il se trouve ainsi divisé en petits rectangles pareils ; et il y en a 4×5 ou 20 ; regardons maintenant la fraction $\frac{3}{4}$; elle comprend 3×5 ou 15 petits rectangles ; elle n'a pas changé, son dénominateur et son numérateur ont été multipliés par 5 l'un et l'autre ; ainsi $\frac{3}{4} = \frac{3 \times 5}{4 \times 5} = \frac{15}{20}$. On peut réduire graphiquement deux fractions au même dénominateur, soit en invoquant le principe précédent, soit directement sur les figures.

Prenons par exemple $\frac{1}{4}$ et $\frac{2}{3}$, fractions représentées, la première par une bande verticale et l'autre par deux, bandes horizontales (fig. 20).

Divisant le premier rectangle en trois bandes horizontales pareilles, le second en quatre bandes verticales, nous voyons que nos deux fractions se lisent $\frac{3}{12}$ et $\frac{8}{12}$.

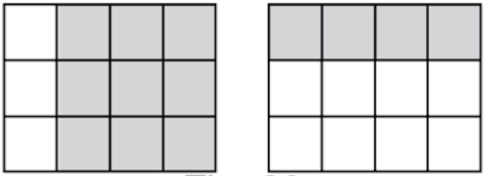


FIG. 20

L'addition et la soustraction seront facilement exposées ensuite, en s'inspirant de ces représentations concrètes.

Pour la multiplication, la définition même nous dit que multiplier $\frac{2}{5}$ par $\frac{3}{4}$, c'est prendre les $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{5}$.

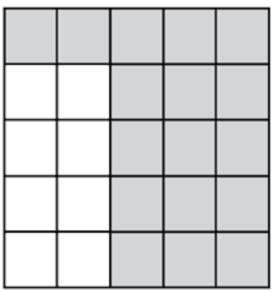


FIG. 21

Prenons (fig. 21) la fractionr $\frac{2}{5}$ représentée en ABCD par deux bandes verticales. Divisant la hauteur AD en quatre parties égales et menant des traits horizontaux, nous avons divisér $\frac{2}{5}$ en 4 parties égales; prenons-en trois, et couvrons le reste de hachures horizontales. La partie blanche est le produit ($\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{5}$) ; elle comprend 2×3 ou 6 petits rectangles ; l'unité en comprend 5×4 ou 20. Donc

$$\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{2 \times 3}{5 \times 4} = \frac{6}{20}.$$

Il est facile, par de pareils procédés, de préciser dans l'esprit de l'enfant l'idée de *rapport* (le rapport de a à b étant le nombre qui mesure a quand on prend b pour unité), de montrer l'identité de ce rapport avec la fraction $\frac{a}{b}$, d'établir que $\frac{a+m}{b+m}$ se rapproche indéfiniment de 1 quand on donne à m des valeurs entières de plus en plus grandes, de faire voir qu'une fraction est le quotient du numérateur par le dénominateur, de mettre en lumière les propriétés fondamentales des proportions, etc.

Soit avec du papier quadrillé, soit avec de petits rectangles (ou carrés) en bois, blancs sur une face, noirs sur la face opposée, toutes ces opérations peuvent être matériellement exécutées. Elles ont un caractère à la fois instructif et amusant, elles attirent l'attention de l'enfant, fixent dans son esprit des vérités importantes sans qu'il ait à faire des efforts de mémoire ; ces vérités, il les voit, il les compose pour ainsi dire de ses mains ; ce ne sont plus pour lui des phrases obscures répétées sans y attacher un sens précis, mais des réalités tangibles.

L'expérience montre que ces méthodes sont d'une pratique pédagogique efficace ; il est à désirer qu'elles se répandent de plus en plus.

22. NOUS DEVENONS GÉOMÈTRES

On a déjà vu ce que c'est qu'une ligne droite. C'est la plus simple de toutes les figures de la Géométrie. Nous pouvons chercher à étendre un peu nos connaissances dans cette voie. Nous commencerons, par exemple, par avoir l'idée d'un plan en regardant la surface d'une eau bien tranquille, celle d'une glace bien dressée, d'un plafond, d'un parquet, d'une porte. Une ardoise, une feuille de papier étendue sur une planchette bien rabotée, nous donnent aussi l'idée d'un plan, et nous sentons que, comme la ligne droite, le plan peut-être, par la pensée, prolongé autant qu'on voudra, indéfiniment. Sur un plan on peut appliquer dans tous les sens une règle bien dressée. Sur une feuille de papier on peut tracer des lignes droites tant qu'on voudra.

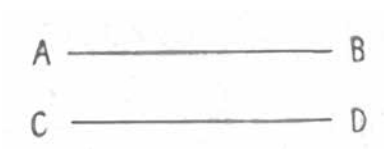


FIG. 22

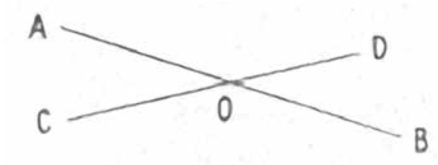


FIG. 23

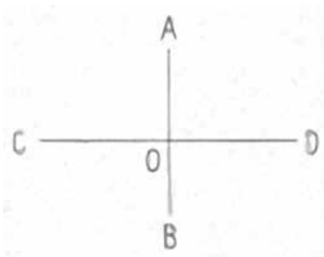


FIG. 24

Si on en trace deux seulement, elles peuvent (fig. 22) être parallèles, comme AB, CD. Sur un papier réglé, on s'aperçoit qu'il y a des lignes qui sont toutes parallèles, et que deux lignes parallèles ne se rencontrent jamais.

Si au contraire (fig. 23) deux droites AB, CD se rencontrent en un point 0, les figures AOC, COB, BOD, DOA sont des angles. Deux angles sont égaux quand on peut les appliquer l'un sur l'autre. Les angles AOC, BOD, par exemple, sont égaux ; il en est de même de COB, DOA.

Quand deux droites (fig. 24) se coupent de telle façon que les angles DOA, AOC sont égaux, les quatre angles autour de O sont égaux aussi ; on les appelle alors des angles droits ; et la figure formée par les deux lignes est celle d'une croix. Sur un papier quadrillé, on voit des angles droits partout où deux lignes se rencontrent. Lorsque deux droites forment ainsi des angles droits, on dit qu'elles sont perpendiculaires l'une sur l'autre.

Un angle plus petit qu'un angle droit, comme AOC, dans la figure 23, s'appelle un angle aigu : s'il est plus grand, comme COB, c'est un angle obtus.

Un fil à plomb représente une droite qu'on appelle *verticale*. Une droite perpendiculaire à une verticale est appelée *horizontale*. Toutes les droites qui seraient appliquées sur la surface d'une eau tranquille seraient des droites horizontales, et cette surface est elle-même un plan, qu'on nomme aussi horizontal. Sur un papier quadrillé posé devant nous, les lignes qui vont de gauche à droite sont appelées horizontales, et les autres verticales, parce qu'on suppose le papier redressé et appliqué par exemple sur un mur.

Soit maintenant que sur une feuille de papier on ait tracé trois lignes droites.

Plusieurs cas peuvent se présenter.

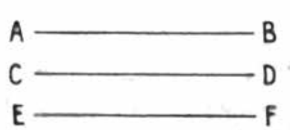


FIG. 25

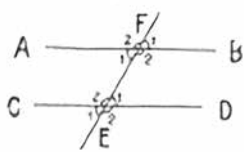


FIG. 26

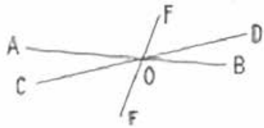


FIG. 27

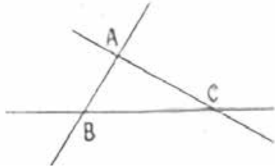


FIG. 28

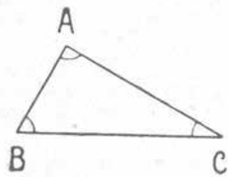
Les trois droites (fig. 25) peuvent être parallèles.

En second lieu (fig. 26), deux, AB, CD, peuvent être parallèles, et la troisième EF les couper en E, F. On appelle alors cette troisième droite une sécante.

Dans cette figure, tous les angles marqués (1) sont égaux entre eux, les angles marqués (2) aussi ; et la somme d'un angle (1) et d'un angle (2) est égale à deux angles droits.

Il peut arriver (fig. 27) que nos trois droites passent par un même point 0 ; on dit alors qu'elles sont concourantes.

Enfin (fig. 28) si aucune des circonstances précédentes ne se produit, les trois droites se couperont deux à deux en trois points A, B, C, et limiteront une portion du plan ABC, qu'on peut considérer à part (fig. 29) et qui s'appelle un *triangle*. Les points A, B, C s'appellent les *sommets*, et les segments AB, BC, CA les *côtés du triangle*. On dit que les angles A, B, C, marqués sur la figure sont les *angles du triangle*.



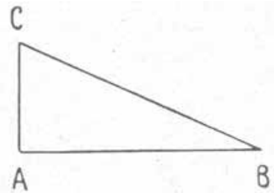


FIG. 29 FIG. 30

Un des angles du triangle, A (fig. 30) peut être droit; on. dit alors que le triangle est rectangle. Il peut se faire aussi (fig. 31) qu'il y ait un angle obtus; on dit alors que le triangle est *obtusangle*.

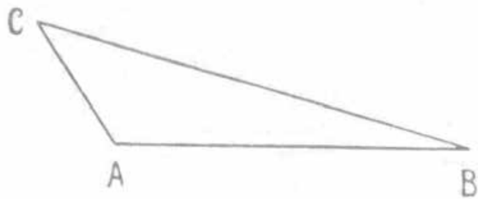


FIG. 31

Si un triangle comme ceux de la figure 32, a deux côtés égaux AB, AC, le triangle est appelé *isoscèle* [On dit maintenant: *isocèle*, MD]. Les angles B et C sont alors égaux.

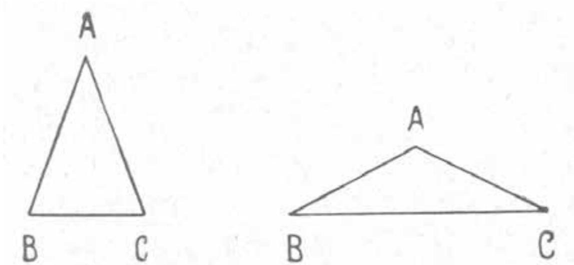


FIG. 32

Si un triangle (fig. 33) a ses trois côtés égaux, il est *équilatéral*. Ses trois angles sont alors égaux.

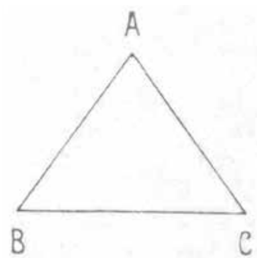


FIG. 33

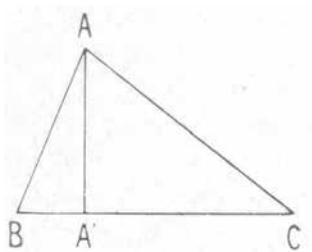


FIG. 34

Dans un triangle ABC (fig. 34), on peut choisir un côté quelconque BC, et l'appeler *base*. Si on trace alors par le point A une droite perpendiculaire à BC et qui rencontre BC en A', on dit que AA' est la *hauteur* du triangle.

Cette simple figure, le triangle, a d'innombrables propriétés ; on en étudiera quelques-unes plus tard ; pour l'instant, il ne faut pas se faire d'illusions, nous n'étudions rien du tout ; nous apprenons simplement à voir les figures et à savoir comment on les nomme. C'est déjà quelque chose.

Quand une partie d'un plan (fig. 35) est limitée par plusieurs droites, ou plutôt par plusieurs segments de droites, cette figure s'appelle un *polygone*. Les segments AB, BC,…. HA sont les *côtés*, les points A, B,… H les *sommets*, les angles marqués A, B,… H, les *angles* du polygone.

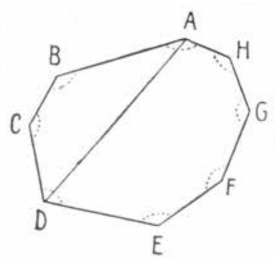


FIG. 35

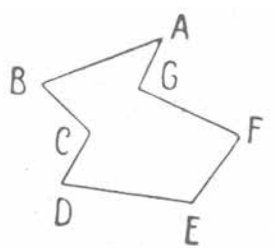


FIG. 36

Un polygone comme celui de la figure 36 est dit à angles rentrants. Quand il n'y a pas d'angle rentrant, comme dans la figure 35, le polygone est *convexe*. En général, nous ne parlerons que de polygones convexes.

Une droite comme AD (fig. 35) qui joint deux sommets d'un polygone, et qui n'est pas un côté, s'appelle une diagonale.

Dans un polygone, le nombre des sommets, celui des côtés, et celui des angles sont les mêmes. On a donné des noms particuliers à quelques polygones, d'après ce nombre de côtés. D'abord, comme nous l'avons dit, un polygone de trois côtés est un triangle. Puis

Un	polygone	de	4	côtés	est	un	*quadrilatère*
"	"	"	5	"	"	"	*pentagone*
"	"	"	6	"	"	"	*hexagone*
"	"	"	7	"	"	"	*heptagone*
"	"	"	8	"	"	"	*octogone*
"	"	"	10	"	"	"	*décagone*
"	"	"	12	"	"	"	*dodécagone.*

Ainsi, la figure 35 représente un *octogone convexe*, et la figure 36 un *heptagone à angles rentrants*.

Dans un quadrilatère, deux côtés AB, CD peuvent être parallèles (fig. 37) les deux autres ne l'étant pas ; de tels quadrilatères s'appellent *trapèzes*. Les côtés AB, CD sont les *bases* du trapèze.

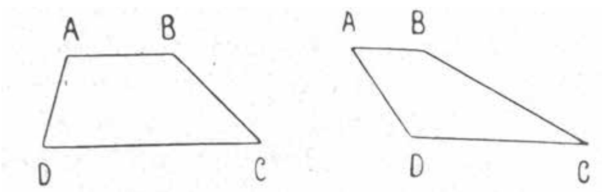


FIG. 37

Si (fig. 38) les côtés AB, CD sont parallèles, et si les côtés BC, DA le sont aussi, le quadrilatère est un parallélogramme. Alors les côtés AB et CD sont égaux, et il en est de même pour BC et AD. En outre les angles A, C sont égaux ; et de même pour B, D.

Si dans un parallélogramme les quatre côtés sont égaux (fig. 39) c'est un losange.

Si (fig. 40) un des angles est droit, les trois autres le sont aussi, et le parallélogramme est un rectangle.

Si enfin (fig. 41) un rectangle a ses côtés égaux, on le nomme un carré.

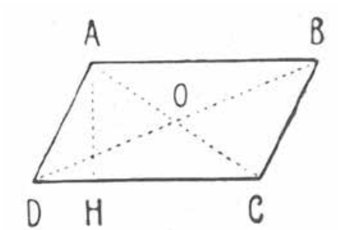


FIG. 38

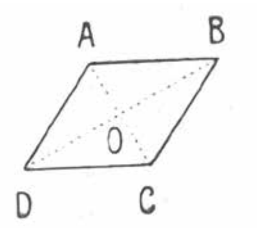


FIG. 39

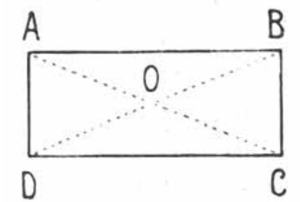


FIG. 40

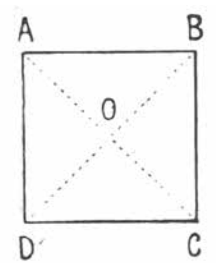


FIG. 41

Dans tout quadrilatère, il y a deux diagonales ; dans tout parallélogramme (fig. 38, 39, 40, 41) ces deux diagonales AC, BD se coupent en un point O qui est le milieu de chacune d'elles. Dans un losange (fig. 39) les deux diagonales sont perpendiculaires entre elles. Dans un rectangle (fig. 40) les deux diagonales sont égales. Dans un carré (fig. 4l) les deux diagonales sont à la fois égales et perpendiculaires. On remarquera qu'un carré est à la fois un losange et un rectangle.

Si dans un parallélogramme (fig. 38) on prend un côté CD qu'on appelle *base*, et si on a une droite AH perpendiculaire sur CD, elle l'est aussi sur AB ; cette droite, ou plutôt ce segment AH, s'appelle *hauteur* du parallélogramme.

Sur un papier quadrillé, en suivant les lignes du quadrillages, on peut former autant qu'on en veut des rectangles et des carrés.

Il faut s'exercer aussi à construire avec un crayon, une règle, une équerre et un double décimètre pour mesurer les longueurs, les diverses figures dont nous avons parlé, et d'autres qu'on peut imaginer, avec tout le soin possible. Il faut s'habituer à les dessiner convenablement à main levée, sans le secours d'aucun instrument. Un bon exercice consistera, après avoir fait avec soin une figure au crayon, avec les instruments, à la mettre ensuite à l'encre à main levée.

Nous ne disons rien encore de l'emploi du compas et du rapporteur, nous réservant de l'indiquer sommairement plus tard.

Ne perdons pas de vue, d'ailleurs, que le dessin n'a jamais dû être abandonné, depuis que nous avons commencé à tracer nos premiers bâtons.

Lorsque (fig. 42) nous avons un polygone ABCDE, dans un plan horizontal par exemple, si nous menons des droites AA', BB', CC', DD', EE', toutes parallèles et égales entre elles, en dehors du plan, les extrémités

A', B', C', D', E', sont les sommets d'un autre polygone pareil au premier. Les quadrilatères AA'BB', etc., sont alors des parallélogrammes ; le corps qui serait limité par tous ces parallélogrammes et par les deux polygones s'appelle un *prisme* ; les deux polygones sont les *bases* ; les parallélogrammes sont des *faces* ; la distance entre les plans des deux bases s'appelle la *hauteur*. Les droites AA', BB',… sont les *arêtes*.

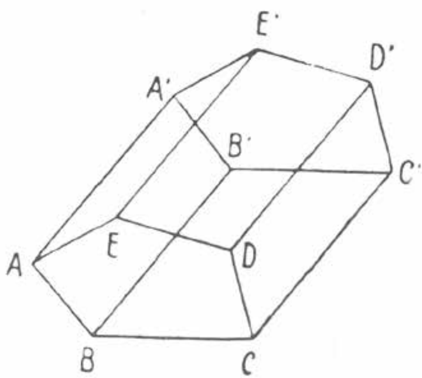


FIG. 42

Si les arêtes sont verticales, (en supposant les bases horizontales) le prisme est droit.

Si les bases sont des parallélogrammes, le prisme s'appelle un *parallélépipède*.

Si, enfin, la base est un carré, et si le parallélépipède étant droit a pour hauteur le côté de la base, le parallélépipède a alors la forme d'un dé à jouer et il s'appelle un *cube* (fig. 43).

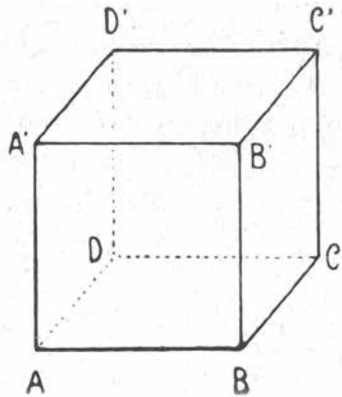


FIG. 43

Lorsque (fig. 44) nous avons un polygone ABCDE, si nous joignons tous les sommets à un point S en dehors du plan, le corps qui serait limité par le polygone et les triangles SAB, SBC,… SEA s'appelle une *pyramide*; ABCDE est la base, les triangles S A B,… sont les faces: SA. SB,… sont les arêtes; S est le sommet: la distance du sommet au plan de la base, qui serait verticale si la base était horizontale, est la *hauteur de la pyramide*.

Avec de petites baguettes en bois et quelques brins de fil métallique, il est aisé d'arriver à construire de petits modèles donnant une idée suffisamment précise des figures dont nous venons de parler. On pourra également les tailler avec un couteau, dans une carotte ou une pomme de terre.

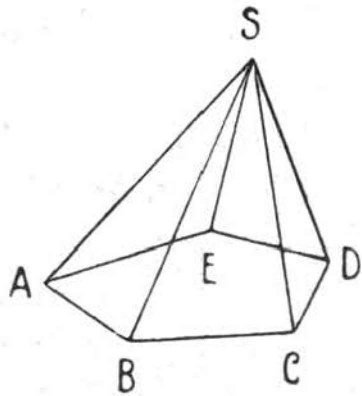


FIG. 44

On notera que les figures 42 et 44, en perspective, sont faites en supposant toutes les arêtes visibles (figures en baguettes) tandis que le cube de la figure 43 représente en pointillé trois arêtes cachées, AD, DC, DD', ce qui a lieu si le cube est un corps plein, en une matière quelconque.

23. LES AIRES

Le mot « Géométrie » signifie par son étymologie : mesure de la Terre. Cela ne répond guère à la science géométrique telle que nous la connaissons aujourd'hui, mais cela nous éclaire sur les origines de cette science, qui est née, comme les autres, des besoins de l'humanité. De bonne heure, on a reconnu la nécessité d'évaluer l'étendue des terrains, et on a cherché les moyens d'y arriver. Ces terrains ayant dans leur ensemble une forme à peu près plane, et étant le plus souvent limités par des lignes droites, c'est donc l'étendue des divers polygones décrits dans le n° précédent qu'il s'agit de déterminer, de mesurer, pour connaître cette étendue.

Mais pour mesurer n'importe quoi, il faut une unité. Nous savons mesurer des longueurs, en prenant pour unité *un mètre*, ou *une allumette*, ou *un côté d'une case d'un papier quadrillé*, peu importe. Pour mesurer une longueur, il faut une unité qui soit une longueur. Pour mesurer une étendue plane, qu'on appelle une *aire*, il faut une unité qui soit elle aussi une aire.

Invariablement, l'unité de longueur ayant été choisie, l'unité d'aire sera l'aire du carré ayant pour côté cette unité de longueur.

Si, pour mesurer une longueur, il suffit d'y porter bout à bout l'unité choisie, et de compter le nombre de fois qu'on l'a portée ainsi, on comprend qu'un pareil procédé est impossible pratiquement pour une aire ; il faudrait y porter le carré unité de manière à la couvrir, ce qui n'est pas réalisable.

Occupons-nous tout d'abord d'un carré. Prenons un papier quadrillé où nous supposons que chaque division soit l'unité de longueur. Par suite, chaque case sera l'unité d'aire.

Sur ce papier quadrillé, dessinons (fig. 45) un carré dont le côté soit de 7 divisions, si bien que la longueur de ce côté a pour mesure 7. Les cases contenues dans ce

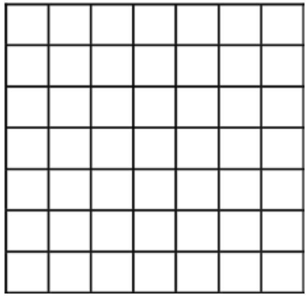


FIG. 45

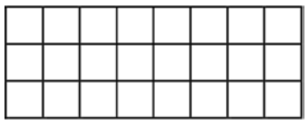


FIG. 46

carré se composent de 7 files, contenant chacune 7 cases ; leur nombre total est donc de 7 fois 7, ou $7 \times 7 = 7^2 = 49$. Et comme on pourrait en dire autant d'un carré dont le côté serait d'un nombre quelconque de divisions, *a* au lieu de 7, l'aire de carré serait de même $a \times a = a^2$, c'est-à-dire que le nombre qui mesure l'aire du carré est la 2ème puissance du nombre qui mesure le côté. C'est pour cela qu'on a nommé carré d'un nombre sa 2ème puissance.

Au contraire, pour les figures décrites plus haut, il existe des procédés très simples, pour arriver à déterminer les aires.

Prenons maintenant (fig. 46) un rectangle dont les côtés soient 8 et 3 ; le nombre des cases, c'est-à-dire le nombre qui mesurera son aire, sera 8×3 ; si au lieu de 8 et 3, noue avons *a* et *b*, l'aire du rectangle sera mesurée par le produit *ab*.

Soit à présent (fig. 47) un parallélogramme ABCD, et menons sa hauteur CH.

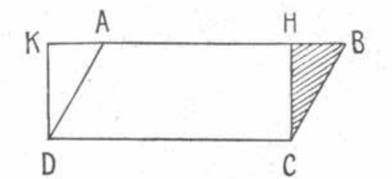


FIG. 47

Si, ayant formé en carton par exemple, ce parallélogramme, nous découpons par un trait suivant CH le triangle CHB ombré sur la figure, et si nous portons ce triangle sur la gauche, en appliquant CB sur DA, nous formons le rectangle CDKH, dont l'aire sera la même que celle du parallélogramme, puisqu'il est composé des mêmes morceaux. Ce rectangle a pour côtés la base CD du parallélogramme, et sa hauteur CH. Donc l'aire d'un parallélogramme a pour mesure le produit des nombres qui mesurent sa base et sa hauteur.

Un parallélogramme (fig. 48) étant coupé en deux par un, trait suivant la diagonale AC, les deux triangles CBA, ADC, s'appliqueront exactement l'un sur l'autre.

Donc le parallélogramme a une aire double de celle du triangle ADC; celui-ci a une aire moitié de celle du parallélogramme. En faisant le produit de la base DC par la hauteur AH, et prenant la moitié

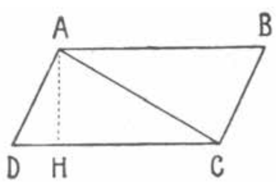


FIG. 48

de ce produit, on aura le nombre mesurant l'aire du triangle.

Un trapèze (fig. 49) se décompose de même en deux triangles. On déduit de là que pour avoir le nombre qui mesure son aire, il faut multiplier la hauteur AH par la moitié de la somme de ses bases AB, DC.

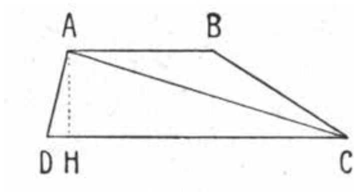


FIG. 49

On peut aussi (fig. 50a) transformer un trapèze en un rectangle de même aire.

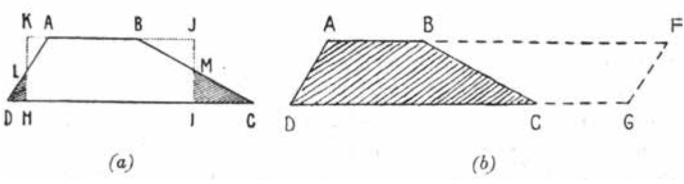


FIG. 50

Par les milieux L, M, des côtés AD, BC, il suffit de mener les hauteurs HK, IJ. Les morceaux triangulaires ombrés LDH, MCI, s'appliquent exactement sur LAK et MBJ, et forment ainsi le rectangle. Ceci nous montre que HI, ou LM, est égal à la moitié de la somme des bases AB, CD.

Enfin (fig. 50b) si on prolonge le côté AB d'une longueur BF égale à DC, et le côté DC d'une longueur CG égale à AB, la figure AFGD est un parallélogramme; et en la coupant suivant BC on a deux trapèzes superposables; chacun d'eux est donc la moitié du parallélogramme, ce qui nous donne encore l'aire d'un trapèze par un nouveau moyen, c'est-à-dire par un simple coup de ciseaux à travers un parallélogramme en carton.

On peut résumer brièvement ce qui précède dans les formules suivantes:

Carré	Côté a	Aire	a^2
Rectangle	Côtés a , b	Aire	$a\,b$
Parallélogramme	Base a; hauteur h	Aire	$a\,h$
Triangle	Base a; hauteur h	Aire	$\dfrac{ah}{2}$
Trapèze	Base a; hauteur h	Aire	$\dfrac{(a+b)h}{2}$

Du reste, dès qu'on sait mesurer l'aire d'un triangle, on peut déterminer celle d'un polygone quelconque ABCDEF (fig. 51), puisque par les diagonales AC, AD, AE partant d'un sommet, on peut découper le polygone en triangles ABC, ACD, ADE, AEF.

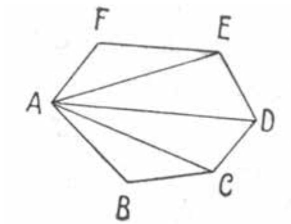


FIG. 51

Il faudra s’exercer beaucoup à déterminer ainsi des aires régulières ; celle d’une porte, d’une fenêtre, d’une table, du parquet ou du plafond d’une pièce, d’une cour, etc. Il suffira pour cela d’un simple mètre en forme de ruban. Suivant les objets, on prendra pour unité de longueur le mètre, le décimètre, le centimètre ; sans avoir encore aucune notion théorique, on se familiarisera de la sorte avec les applications les plus simples du système métrique, on en prendra l’intuition, on aura la notion juste de l’emploi des diverses unités ; et cette acquisition, déjà utile en elle-même, sera plus tard d’un secours bien considérable, lors de la période des études.

24. LE PONT AUX ÂNES

Il existe en Géométrie une proposition célèbre et importante, mais qui a fait le désespoir de bien des générations d’écoliers, car la démonstration classique qu’on en donne d’habitude est peu naturelle, et difficile à retenir. Elle est connue sous différents noms ; on l'appelle « le carré de l'hypoténuse », « Le théorème de Pythagore », (bien qu'on l'ait connue bien des siècles avant Pythagore), enfin « Le Pont aux ânes », sans doute parce que les élèves médiocres viennent s'y buter, et ont quelque peine à franchir ce passage.

Nous savons déjà ce que c'est qu'un triangle rectangle.

Le plus grand côté BC (fig. 52), celui qui est opposé à l'angle droit, s'appelle *hypoténuse*. Si on forme trois carrés BDEC, CFGA, AHIB, ayant pour côtés l'hypoténuse et les deux autres côtés, l'aire du premier sera égale à la somme des aires des deux autres. C'est en cela que consiste l'énoncé du fameux pont aux ânes.

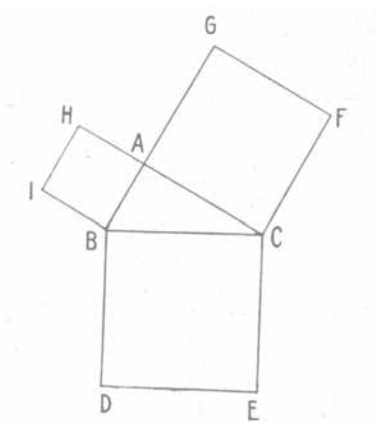


FIG. 52

Or, il existe un moyen très simple de vérifier cette proposition, moyen qui a été inventé dans l'Inde dès l'antiquité la plus reculée, et dont on peut se servir pour constituer une démonstration très correcte quand on étudie la Géométrie — ce que nous ne faisons pas ici.

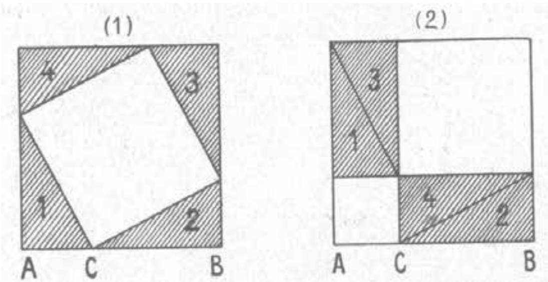


FIG. 53

Prenons un carré (fig. 53 –(1)) dont le côté soit AB. Marquant un point C entre A et B, construisons, soit en bois, soit en carton, des triangles rectangles ayant AC et CB pour longueurs de leurs côtés de l'angle droit. Il nous suffira d'en avoir quatre. Disposons les, en les désignant par 1, 2, 3, 4 comme le montre la fig. 53 –(1), dont les parties ombrées représentent ces petits triangles. On voit qu'ils forment un dessin qui laisse voir à l'intérieur un carré, lequel a justement pour côté l'hypoténuse. Ce carré est donc ce qui reste quand on a couvert une partie du grand carré avec les quatre triangles. Maintenant, faisons glisser nos quatre triangles de manière à les amener à la position qu'indique la fig. 53 –(2). Ce qui reste maintenant, c'est deux carrés, les deux carrés construits sur les côtés de l'angle droit. Donc à eux deux, ils ont même aire que le carré de l'hypoténuse de la fig. 53 –(1). C'est un jeu de patience des plus simples ; l'enfant qui l'aura pratiqué une fois ou deux ne l'oubliera de sa vie, et ne sera jamais effrayé ni embarrassé à l'approche du pont aux ânes. La plus grande des âneries, c'est de compliquer les choses simples, et de rendre difficile ce qui est aisé.

25. DIVERS CASSE-TÊTES ; MACÉDOINE MATHÉMATIQUE

Sur un segment ABC (fig. 54) construisons un carré ACIG ; puis prenant CF = BC, menons FED parallèle à AC ; menons aussi BEH parallèle à CI. Le grand carré se trouve coupé en 4 morceaux par les lignes BH et FD ; on peut effectuer le découpage par deux coups de ciseaux. Ces 4 morceaux sont :

1° BCFE, carré ayant pour côté BC

2° EHGD, ″ ″ ″ ″ DE, qui est égal à AB

3° EFIH, rectangle ayant ses côtés égaux à AB, BC

4° ABED, rectangle pareil au précédent.

Nous venons ainsi de vérifier ce théorème de Géométrie :

« *Le carré construit sur la somme G H I de deux lignes, est équivalent au carré construit sur la première, plus le carré construit sur la seconde, plus deux fois le rectangle construit sur ces deux lignes comme côtés* ».

Si nous avons fait la figure sur du papier quadrillé, en évaluant les aires de toutes ces figures, c'est-à-dire en comptant les cases, nous avons cette proposition d'Arithmétique :

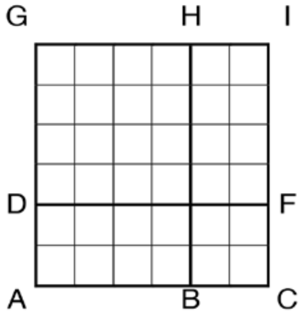


FIG. 54

« *Le carré de la somme de deux nombres est égal à la somme des carrés de ces deux nombres, plus deux fois leur produit* ».

Si nous désignons AB par a, BC par b, nous avons enfin cette formule d'Algèbre :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

Voilà trois vérités dont on bourrera trois fois la mémoire des enfants non avertis, alors qu'elles n'en font qu'une seule, sautant aux yeux. Les apparences, les costumes sont distincts ; mais la personne est la même. Le sachant d'avance, on s'épargnera bien du temps perdu, bien des efforts inutiles, et on saura en outre que les classifications de la science sont nécessaires, mais souvent artificielles par la force des choses ; et qu'il faut s'habituer de bonne heure à reconnaître les analogies qu'on rencontre.

Nous allons en constater d'autres. Formons (fig. 55) sur le segment ABC : un carré de côté AB, qui est ABFE ; un carré ACJH, de côté AC. Prolongeons BF jusqu'en I ; et sur EH construisons le carré EHGD.

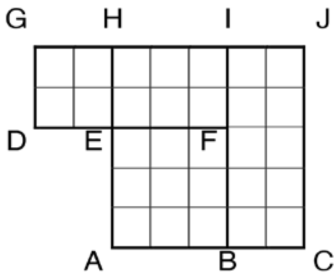


FIG. 55

Pour avoir le carré ABFE, il faut de la figure totale enlever les rectangles BCJI, FIGD ; la figure totale se compose de la réunion de deux carrés dont les côtés sont égaux à AC et à BC ; les deux rectangles sont pareils, et leurs côtés sont égaux à AC et BC ; enfin AB est la différence de AC et BC. Donc :

Géométrie. Le carré construit sur la différence de deux segments est équivalent à la somme des carrés construits sur ces deux segments, moins deux lois le rectangle construit sur les deux segments comme côtés.

Arithmétique. Le carré de la différence de deux nombres est égal à la somme des carrés de ces nombres, moins deux fois leur produit.

Algèbre. On a la formule $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Encore un exemple, que nous montre la figure 56. ABJH est un carré, ACGD un rectangle ; FG, FJ, DE sont égaux à BC, DEIH est un carré.

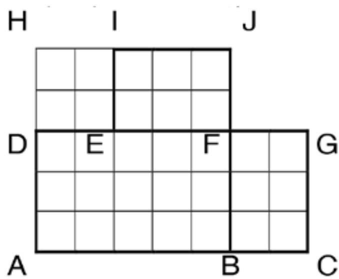


FIG. 56

Le rectangle ACGD a ainsi pour côtés AB + BC et AB – BC ; comme les deux rectangles BCGF, FJIE sont identiques, en enlevant le premier et le mettant à la place du second, on aura ABJIED, qui est la différence des carrés ABJH, DEIH, construits sur AB et DE = BC. Ainsi :

Géométrie. Le rectangle ayant pour côtés la somme et la différence de deux segments est équivalent à la différence des carrés ayant pour côtés ces deux segments.

Arithmétique. Le produit de la somme de deux nombres par leur différence est égal à la différence de leurs carrés.

Algèbre. On a la formule $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Et pour vérifier tant de propositions, concernant tant de sciences, il suffit de découper avec soin quelques morceaux de carton, après avoir fait avec soin quelques figures.

On a quelquefois appelé casse-têtes ces jeux de découpages. C'est bien injuste ; car employés comme nous venons de le dire, ils évitent au contraire bien des cassements de tête futurs, en instruisant par les yeux.

26. LE CUBE EN HUIT MORCEAUX

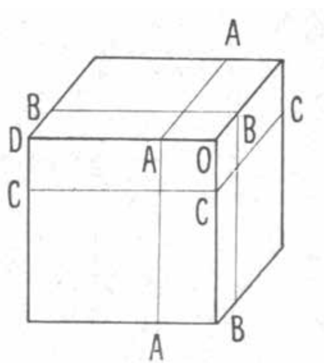


FIG. 57

Prenons (fig. 57) un cube en bois, et à partir d'un des sommets O, portons, sur les trois arêtes qui y aboutissent, trois longueurs égales entre elles OA, OB, OC. Par chacun des trois points ainsi obtenus, supposons qu'on fasse passer un trait de scie, AAA, BBB, CCC. On coupera de la sorte le cube en huit morceaux. Pour se rendre compte de ce qu'ils seront, ce qu'on verrait mieux encore sur l'objet lui-même, appelons (fig. 57) a la longueur DA et b la longueur AO, et construisons la figure 58. Les deux parties dont elle se compose représentent ce qu'on voit, après les coupes suivant AAA et BBB quand on regarde le cube par-dessus. En outre, les lettres *(a) (b)* entre parenthèses indiquent l'épaisseur après la coupe suivant CCC. La figure de gauche représente ce qui est au-dessous de CCC et celle de droite ce qui est au-dessus.

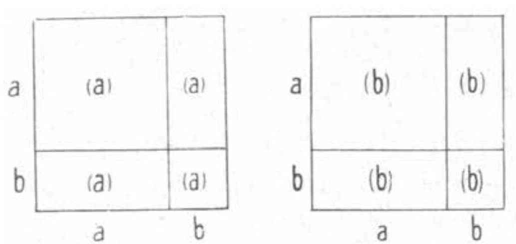


FIG. 58

Nous voyons bien ainsi que nous aurons huit parallélépipèdes dont les dimensions seront :

fig. de gauche	aaa aba bba baa
fig. de droite	aab abb bbb bab

Cela nous donne donc :

un cube dont l'arête est a ;
″ ″ ″ ″ b ;
3 parallélépipèdes ayant pour dimensions a, a, b ;
3 ″ ″ ″ ″ a, b, b ;

L'arête du cube que nous avons coupé en huit morceaux était $a + b$.

Nous vérifions ainsi que le cube construit sur la somme de deux segments a, b se compose :

1° de la somme des cubes construits sur chacun des segments ;

2° de 3 fois un parallélépipède ayant pour base un carré de côté a, et pour hauteur b ;

3° de 3 fois un parallélépipède ayant pour base un carré de côté b et pour hauteur a.

Ça, c'est de la Géométrie.

La même figure nous montre qu'en Arithmétique : Le cube de la somme de deux nombres est égal à la somme des cubes de ces deux nombres, plus trois fois le produit du premier par le carré du second, plus trois fois le produit du second par le carré du premier.

Enfin (Algèbre) cela donne la formule $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Ceci est tout à fait analogue à ce que nous avons fait pour le carré d'une somme dans le n° précédent.

Avec de petits cubes en bois assez nombreux, on peut faire la construction indiquée, et bien d'autres encore.

Ce sont des petits jeux de construction qui, dirigés avec un peu de méthode, aident beaucoup l'enfant à voir les figures dans l'espace, et provoquent son attention.

A la rigueur, le découpage du cube pourrait se faire au moyen d'un morceau de savon tiré d'une barre, en le coupant avec soin par un fil métallique qui remplacerait l'action de la scie. Mais le cube de bois est encore préférable, et n'est certes ni difficile ni onéreux à se procurer.

27. LES NOMBRES TRIANGULAIRES – LE VOL DES GRUES

Edouard Lucas attribue à l'observation du vol de certains oiseaux l'origine des nombres qu'on a appelés *triangulaires*. En tête vole un seul oiseau ; derrière lui, sur une seconde ligne, s'en trouvent deux : sur une troisième ligne, en arrière, il y en a trois : et ainsi de suite ; si bien que la disposition générale de la colonne volante présente l'apparence d'un triangle.

Il est facile de se faire une idée précise de ces nombres et de les représenter sur un dessin quadrillé, en regardant, par exemple, la figure 59 et en y considérant tout d'abord la partie A seulement, qui nous montre, en haut, 1 case, puis 2 cases sur une seconde ligne, puis 3, 4, 5. 6, 7 cases sur les lignes suivantes, jusqu'à la 7ème.

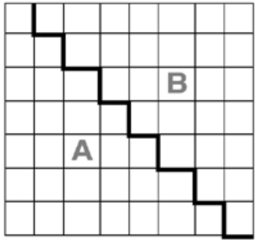


FIG. 59

Nous avons donc là le 7ème nombre triangulaire

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7\,;$$

pour l'évaluer, nous pourrions faire l'addition, ce qui nous donnerait 28. Mais cela ne nous apprendrait rien sur tout autre nombre triangulaire. Si nous voulions avoir le 1000ème, par exemple, il faudrait ajouter les nombres de 1 à 1000, ce qui serait long et bien ennuyeux. Au lieu de cela, regardez maintenant la figure 59 tout entière ; la partie B, si nous la regardons de bas en haut, ou si nous la retournons sens dessus dessous, nous représente encore, par le nombre de ses cases, le même nombre triangulaire. La figure entière représente donc deux fois le nombre triangulaire en question ; et comme elle se compose de sept lignes, ayant chacune huit cases, le nombre total des cases est 7×8, et le nombre cherché sera la moitié de ce produit, c'est-à-dire 28.

Nous aurons, en d'autres termes,

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = \frac{7 \times 8}{2} = 28.$$

Si on voulait avoir le 1000$^{\text{ème}}$ nombre triangulaire, eu supposant qu'on ait fait de même, on aurait

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 1000 = \frac{1000 \times 1001}{2} = 500\ 500$$

C'est plus court que de faire l'addition.

Et comme, au lieu de 1000, on pourrait avoir n importe quel nombre entier n. on a aussi

$$1 + 2 + 3 + \ldots\ + n = \frac{n \times (n+1)}{2}$$

expression qui nous permettra de trouver le n$^{\text{ème}}$ nombre triangulaire, que nous pouvons appeler T_n.

Le nombre total des cases de la figure 59 est $2 \times T_n$ ou $2\ T_n$. Si nous enlevons la dernière colonne, il reste un carré de 7 lignes, contenant chacune 7 cases. On voit aussi que la nouvelle figure est formée de l'assemblage des nombres triangulaires T6 et T7. On a ainsi

$$2\ T_7 - 7 = 7^2 = T_7 + T_6$$

Si nous ajoutons en bas une ligne nouvelle de 8 cases, nous voyons de même qu'on a

$$2T_7 + 8 = 8^2 = T_8 + T_7$$

rien qu'en regardant la figure.

Et comme, au lieu de 7, nous aurions pu prendre tout autre nombre n,

$$2T_n - n = n^2 = T_n + T_{n-1}$$

$$2T_n + n + 1 = (n + 1)^2 = T_{n+1} + T_n$$

Voilà des formules qui paraissent bien savantes et qui cependant n'exigent pas même le moindre calcul, puisqu'on *les lit* sur les figures, puisqu'on *les voit*, puisqu'on peut les construire de ses mains avec des petits carrés de bois ou même avec de simples jetons, en en plaçant un dans chaque case.

28. LES NOMBRES CARRÉS

Prenons (fig. 60) un carré, composé de 7 lignes, de 7 cases chacune, soit en tout $7 \times 7 = 7^2 = 49$ cases.

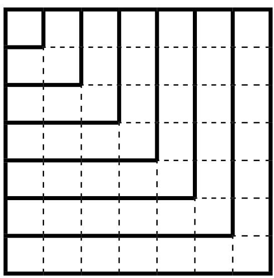


FIG.60

Sur cette figure, au moyen des lignes tracées, nous voyons les carrés successifs de 1, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2 cases.

Le premier carré, de l case est figuré par la case du haut, à gauche. Pour passer de ce carré à celui de 2^2 ou 4 cases, nous remarquons qu'il a fallu ajouter 3 cases, de sorte que $1 + 3 = 2^2$; pour passer au carré suivant, de 9 cases, il faut en ajouter deux à droite, deux en dessous, et une à droite et en bas, ce qui fait 5 ; et en continuant de la même manière, nous arrivons à voir que :

$$7\ 2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13$$

C'est-à-dire que le carré de 7 est égal à la somme des 7 premiers nombres impairs.

Au lieu de 7, prenons un nombre entier quelconque, n. Les premiers nombres impairs sont 1, 3, 5,… et le $\text{n}^{\text{ème}}$ est $2n - 1$. Comme la figure a pu être faite jusqu'à ce nombre n, nous avons :

$$n^2 = 1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1$$

et ceci ne fait que traduire ce que nous voyons dans la figure 60.

Cela nous montre qu'il y a une autre manière de représenter les nombres carrés ; elle est indiquée par la figure 61 où l'on voit les carrés de 1, de 2, de 3 et de 4. Avec de petits carrés de bois, il sera facile de construire et de transformer ces diverses figures.

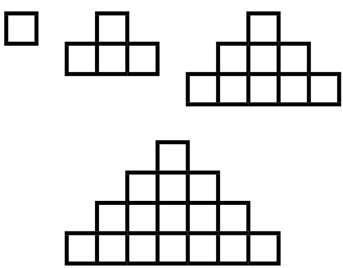


FIG. 61

Nous allons arriver maintenant, sans aucune peine, à résoudre une question bien plus difficile, en cherchant la somme des carrés de 1, 2, 3, 4 par exemple. En nous servant de la figure 60 et en plaçant les carrés de 1, 2, 3, 4 de bas en haut, nous avons immédiatement la figure 62, qui se passe de toute explication.

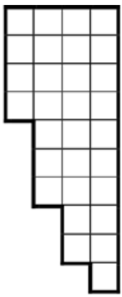


FIG. 62

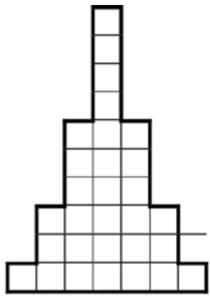


FIG.63

En nous servant des divers éléments de la figure 61, nous voyons qu'il y a

4 lignes de 1 case

3 ligues de 3 cases

2 lignes de 5 cases

1 ligne de 7 cases

qui, réunies les unes au-dessous des autres, donnent la figure 63.

Assemblons maintenant (fig. 64) la figure 62, la même figure retournée, et la figure 63.

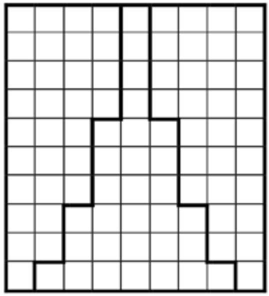


FIG. 64

Nous obtenons un rectangle qui contiendra trois fois le nombre de cases cherché. Le nombre des lignes de ce rectangle est

$$1 + 2 + 3 + 4, \text{ ou } \frac{4 \times 5}{2} = 10.$$

Le nombre des cases contenues dans chaque ligne est, comme nous pouvons le voir sur la première ligne,

$$4 + 1 + 4 \text{ ou } 2 \times 4 + 1 = 9$$

Le nombre total des cases est donc $10 \times 9 = 90$, et le nombre cherché sera le tiers de 90, c'est-à-dire 30. Nous vérifions bien en effet que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30.$$

Mais si, au lieu de 4 nous avions pris un nombre n quelconque, et si nous avions fait exactement la même chose, le rectangle de la figure 64 aurait

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n, \text{ ou } \frac{n \times (n+1)}{2} \text{ lignes}$$

et

$$2n + 1 \text{ colonnes.}$$

Le nombre total de ses cases serait donc

$$\frac{n \times (n+1) \times (2n+1)}{2}$$

et pour avoir le nombre cherché, il faudrait en prendre le tiers. Cela nous montre que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots n^2 = \frac{n \times (n+1) \times (2n+1)}{6}$$

C'est une formule que les candidats à l'École Polytechnique ne savent pas toujours démontrer, tout en se donnant beaucoup de mal et en calculant beaucoup, et qui s'établit en jouant avec de petits carrés de bois, comme celles que nous avons déjà vues.

Cette détermination de la somme des carrés des n premiers nombres entiers avait jadis une application pratique assez importante, dans l'artillerie, lorsqu'on employait des projectiles sphériques (boulets ou obus). On les rangeait souvent, en effet, dans les arsenaux, en formant un carré sur le sol, puis, par-dessus, mi nouveau carré plus petit, et ainsi de suite jusqu'au sommet, qui était formé d'un seul boulet. C'est ce qu'on nommait une *pile de boulets à base carrée*. Dès lors, pour compter les boulets contenus dans une pile, il suffisait de compter le nombre n des boulets sur, un côté de la base, et d'appliquer la formule ci-dessus. Par exemple, si $n = 17$, la somme cherchée est

$$\frac{17 \times 18 \times 35}{6} \text{ ou } 1785.$$

On peut s'amuser à former de la même manière des piles d'oranges, pourvu que celles-ci soient à peu près de même grosseur, ou, plus simplement peut-être, des piles de billes à jouer, en les disposant sur une légère couche de sable, afin qu'elles ne roulent pas, ce qui ferait alors écrouler l'édifice.

29. LA SOMME DES CUBES.

Pour représenter un nombre élevé au cube, comme $2^3 = 2 \times 2 \times 2$ ou $3^3 = 3 \times 3 \times 3$,etc., il serait commode d'avoir un grand nombre de petits cubes en bois, un peu plus gros que des dés à jouer, et qui serviraient à faire les constructions dont nous avons parlé plus haut, et les diverses opérations que nous allons indiquer.

Mais on peut arriver à s'en passer à la rigueur, et à remplacer chaque unité par un petit carré plat, de bois ou de carton ou même par un simple jeton. C'est cette dernière supposition que nous admettrons ; quand on aura vu combien les opérations sont faciles, on les fera, à plus forte raison, au moyen de carrés ou de cubes ; qui peut le plus, peut le moins.

Commençons par voir comment, avec nos jetons, nous pourrons représenter les cubes successifs. Le cube de 1 est 1 : un seul jeton le représentera.

Le cube de 2 est $2 \times 2 \times 2$ ou 8 ; il sera donc composé (fig. 65) de 2 carrés de 4 jetons chacun, carrés juxtaposés l'un contre l'autre, dans la première partie de la figure. Mais, comme on le voit dans la 2ème partie, ces 8 jetons peuvent être disposés d'une autre manière, en trois premières colonnes et en plaçant au-dessus la quatrième qui est devenue horizontale

FIG. 65

Passons au cube de 3 : c'est $3 \times 3 \times 3$, ou 27 ; on le représentera (fig. 66) par 3 carrés de 9 jetons chacun, juxtaposés, dans la première partie de la figure.

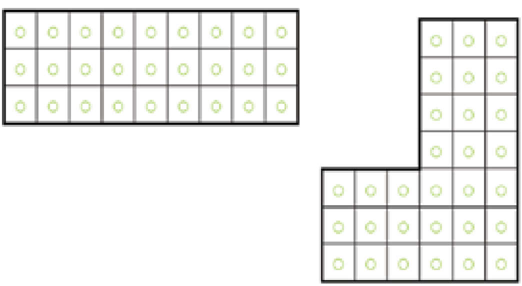


FIG. 66

On obtient la 2ème partie en tardant les 6 premières colonnes et plaçant au-dessus les 3 dernières devenues horizontales.

Enfin, pour le cube de 4, nous ferons de même, en conservant (fig. 67) les 10 premières colonnes de la première partie, et plaçant au-dessus les 6 dernières, rendues horizontales, pour avoir la 2ème partie de la figure.

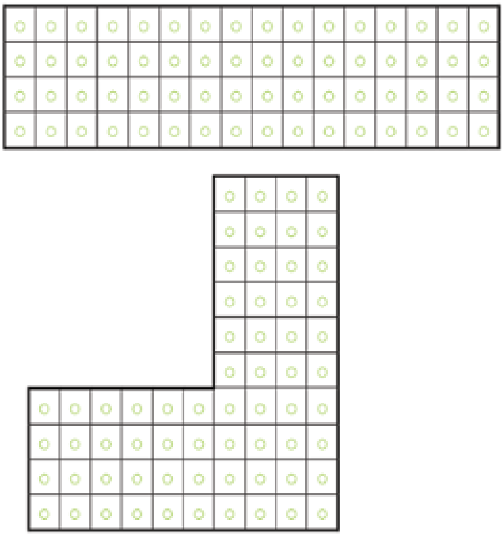


FIG. 67

Si nous assemblons maintenant (fig. 68) les 2èmes parties des figures 65, 66. 67, en y ajoutant un jeton à gauche en haut qui représentera le cube de 1, nous aurons la somme des cubes de 1, 2, 3, 4 sous la forme d'un carré, dans lequel le nombre des jetons d'une ligne ou d'une colonne est 1 + 2 + 3 + 4 ou 10. La somme de ces cubes est donc 100.

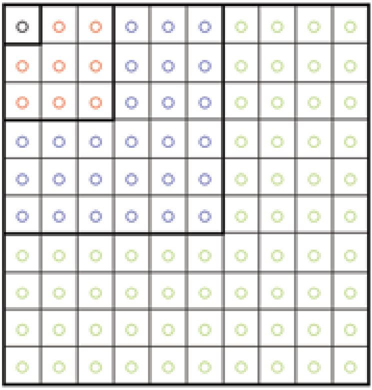


FIG. 68

Il y a intérêt à prendre des jetons de couleurs différentes pour représenter chacun des cubes. La figure sera alors d'autant plus frappante.

La méthode de construction indiquée pourrait être poussée ainsi jusqu'au cube d'un nombre n quelconque, et montre que *la somme des cubes des n premiers nombres entiers est égale au carré de la somme de ces nombres.*

Cela se traduit par la formule :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n)^2$$

C'est une expression qui peut encore s'écrire $(\mathbf{T}_n)^2$, ou

$$\left[\frac{n \times (n+1)}{2}\right]^2$$

C'est encore là un résultat qu'il est beaucoup plus pénible et difficile d'obtenir par le calcul. Nous y arrivons ici par un simple jeu de construction[12].

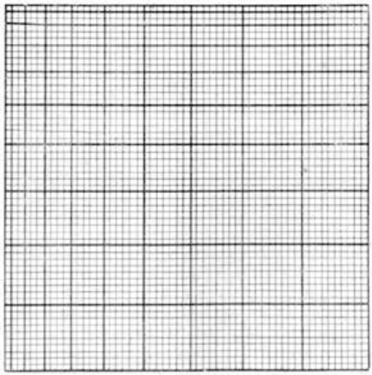


FIG. 12

30. LES PUISSANCES DE 11

Si l'on prend le nombre 11, et qu'on cherche à en former le carré, la multiplication sera bien facile

12. II n'est peut-être pas mauvais de remarquer que dans notre table de multiplication sans chiffres (fig. 12 *[reproduite infra- MD]*) on retrouve justement comme nombres de cases les cubes successifs 2^3, 3^3,... dans les enceintes qui séparent les carrés de 1, 1 + 2, 1 + 2 + 3,...

    À la rigueur, on aurait donc pu, sur cette simple table, constater tout ce que nous venons de voir ici.

$$
\begin{array}{ccc}
 & 1 & 1 \\
 & 1 & 1 \\
\cline{2-3}
 & 1 & 1 \\
1 & 1 & \\
\hline
1 & 2 & 1
\end{array}
\qquad\qquad 11^2 = 121
$$

Pour obtenir le cube, nous aurons

$$
\begin{array}{cccc}
 & 1 & 2 & 1 \\
 & & 1 & 1 \\
\cline{2-4}
 & 1 & 2 & 1 \\
1 & 2 & 1 & \\
\hline
1 & 3 & 3 & 1
\end{array}
\qquad\qquad 11^3 = 1331
$$

La 4ème puissance donnerait lieu à la multiplication ci- dessous

$$
\begin{array}{ccccc}
 & 1 & 3 & 3 & 1 \\
 & & & 1 & 1 \\
\cline{2-5}
 & 1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 & \\
\hline
1 & 4 & 6 & 4 & 1
\end{array}
\qquad 11^4 = 14641
$$

Fixons notre attention sur ces chiffres

1, 2, 1 ;   1, 3, 3, 1 ;   1, 4, 6, 4, 1

qui servent à écrire les puissances.

Nous aurions pu les avoir, avec moins d'écritures, sans poser les multiplications, si nous remarquons, d'abord qu'on commence et qu'on finit par 1 ; et en outre qu'on n'a jamais qu'à ajouter deux chiffres qui se suivent, pour avoir un chiffre de la puissance suivante :

Ainsi de 11 on tire 121 parce que 1 + 1 = 2 ;

> De 121 on tire 1331, parce que 1 + 2 = 3, 2 + 1= 3 ;
>
> De 1331 on tire 14641, parce que 1 + 3 = 4, 3 + 3 = 6, 3 + 1 = 4.

Ces remarques ont conduit à des moyens d'obtenir ces chiffres (et beaucoup d'autres nombres), très facilement, comme nous allons le voir au n° suivant.

C'est d'autant plus utile que les nombres dont il s'agit sont d'une grande importance en Algèbre ; où on les retrouvera plus tard, si on étudie tant soit peu les mathématiques.

31. TRIANGLE ET CARRÉ ARITHMÉTIQUES

Écrivons (fig. 69) des chiffres 1 les uns au-dessous des autres, autant que nous le voudrons. Supposons qu'à droite du premier 1, en haut, il y ait des zéros, que nous nous dispensons d'écrire. Nous formons la 2ème ligne en ajoutant 1 et 0, ce qui donne 1, et écrivant ce 1 à droite de celui qui est déjà inscrit. Passons à la 3ème ligne ; nous lisons dans la 2ème : 1 et 2, que nous écrivons ; puis 1 et 0, 1, que nous plaçons à droite du 2, de même, en partant de la 3ème ligne nous formons la 4ème ; 1 et 2, 3 ; 2 et 1, 3 ; 1 et 0, 1. Et ainsi de suite, aussi loin qu'on le voudra. Les premières lignes de la figure nous donnent les chiffres rencontrés tout à l'heure pour les puissances de 11.

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

FIG. 69

Ce tableau s'appelle du nom de son illustre inventeur, le *triangle arithmétique de Pascal*[13].

Les mêmes nombres (fig. 70) apparaissent dans une figure qui ne diffère de la précédente que par sa disposition. On écrit le chiffre 1 partout dans les cases d'une première ligne et dans celles d'une première colonne d'un carré quadrillé. Ensuite on remplit successivement toutes les autres cases en mettant dans chacune la somme du nombre qu'on lit au-dessus avec celui qu'on lit à gauche.

Ici, les chiffres 1, 1 ; 1, 2, 1 ; 1, 3, 3, 1 ;… apparaissent, non plus dans les lignes horizontales, mais dans les obliques montant de gauche à droite.

Ce tableau de la figure 70 est appelé *carré arithmétique de Fermat*[14].

13. Blaise Pascal, savant et littérateur français, né à Clermont-Ferrand (1623-1662).

14. Pierre Fermat, mathématicien français, né à Beaumont de Lomagne (1601-1666). C'est probablement le plus puissant génie qui ait jamais existé au point de vue arithmétique.

1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8
1	3	6	10	15	21	28	36
1	4	10	20	35	56	84	
1	5	15	35	70			
1	6	21	56				
1	7	28	84				
1	8	36					

FIG. 70

Si l'on considère (fig. 71) un échiquier ordinaire, la case du coin gauche O et une case quelconque X, on peut se demander par combien de chemins différents une tour pourrait se rendre de O en X, sans jamais rétrograder, c'est-à-dire en marchant toujours de gauche à droite et de haut en bas. Le carré arithmétique de Fermat donne la réponse, si on l'applique sur l'échiquier. Ainsi pour la figure 71 telle qu'elle est indiquée, il y a 84 routes différentes à suivre pour une tour partant de O et se rendant en X.

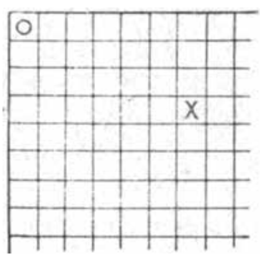


FIG. 71

Les nombres de ces tableaux jouissent encore de curieuses et nombreuses propriétés. Mais il serait prématuré de s'en occuper actuellement.

32. LES NUMÉRATIONS DIVERSES

Quand nous avons commencé (n° 3) à former les nombres au moyen de bâtonnets, puis de paquets, de fagots, etc., ce qui amène à la numération, nous aurions pu tout aussi bien, pour construire un paquet, prendre tout autre nombre que dix bâtonnets.

Par exemple, on aurait pu convenir que 8 bâtonnets formeraient un paquet, 8 paquets un fagot, et ainsi de suite. Il en serait résulté que les chiffres nécessaires pour écrire un nombre quelconque (n° 10) seraient seulement 1,2, 3, 4, 5, 6, 7, auxquels, bien entendu, il faudrait adjoindre le zéro.

Une telle méthode pour écrire les nombres est ce qu'on appelle un système de numération, et le nombre choisi s'appelle base de ce système.

Ainsi, le système que nous avons vu jusqu'ici et qui est universellement en usage s'appelle le système décimal, et a pour base 10. Celui que nous venons d'indiquer aurait pour base 8 et pourrait être appelé système octaval.

Si on prenait 12 pour base d'un système, qu'on appellerait système duodécimal, on réunirait 12 bâtonnets pour faire un paquet, 12 paquets pour faire un fagot, et ainsi de suite. Il faudrait alors, en dehors du zéro, avoir onze chiffres, savoir les 9 de la numération décimale, et deux autres pour représenter 10 et 11.

Quand un système de numération a pour base un nombre B, il exige toujours B-1 chiffres, sans compter le zéro ; et le nombre B s'écrit invariablement 10.

Il n'est pas mauvais de savoir écrire un nombre dans un système de numération quand on vous le donne, écrit dans un autre ; et c'est tout à fait facile.

Par exemple, on nous donne 374 écrit dans le système de hase 8. Tâchons de l'écrire dans le système décimal. Si nous pensons à nos bâtonnets, nous voyons que le nombre en question contient

4 bâtonnets	4
7 paquets de 8 bâtonnets	56
3 fagots de 8 × 8 bâtonnets	192
	252

En pratique, on arriverait encore plus vite au même résultat, en partant de la gauche. en disant : 3 fagots de 8 paquets, plus 7 paquets, cela donne 31 paquets ; 31 paquets de 8 bâtonnets, cela fait 248, plus 4 cela donne 252.

Si au contraire, le nombre 598 étant écrit dans le système décimal, nous voulons l'avoir dans le système de base 8, nous n'aurons qu'à enlever 8 tant que nous le pourrons, et le reste sera le dernier chiffre à droite. Il faut donc faire la division de 598 par 8, et prendre le reste, qui est 6 ; cette opération nous donne en même temps le nombre 74 des paquets de 8 ; en divisant par 8, nous avons le nombre des fagots, 9, et il reste 2 paquets ; 2 est le 2ème chiffre. En divisant 9 par 8, nous voyons enfin qu'il reste un paquet (1 est le 3ème chiffre) et que nous avons 1 boite (1 est le 4ème chiffre).

L'opération d'ensemble s'écrira

$$\begin{array}{ccc|cc} 5 & 9 & 8 & 8 & \\ \cline{4-5} & 3 & 8 & 7 & 4 \\ & & 6 & & 2 \end{array} \quad \begin{array}{|l} 8 \\ \hline 9 \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{|l} 8 \\ \hline 1 \end{array}$$

et 1126 est le nombre demandé, écrit dans le système de base 8.

Si on voulait écrire ce même nombre dans le système de base 12, on aurait

$$\begin{array}{ccc|cc} 5 & 9 & 8 & 12 & \\ \cline{4-5} 1 & 1 & 8 & 4 & 9 \\ & 1 & 0 & & 1 \end{array} \quad \begin{array}{|l} 12 \\ \hline 4 \end{array}$$

et le résultat serait 41 (10) en figurant par (10) le chiffre 10 du système duodécimal.

Nous avons vu plus haut que 374 (système 8) s'écrit 252 (système décimal). Dans le système de base 12, on trouverait qu'il s'écrit 190.

On passe ainsi comme on veut d'un système à un autre par l'intermédiaire du système décimal.

Avec un peu d’habitude on arrive à calculer dans un système de numération quelconque ; le point essentiel, c’est de ne pas oublier que les retenues se feront, non plus par dizaines mais par groupes de B, si B est la base ; et il faut pour cela une certaine habitude.

Nous donnons ci-dessous le nombre 1000 de la numération décimale, écrit dans les systèmes de numération de bases 3, 4, 5,… jusqu’à 12.

B =	3	1101001
»	4	33220
»	5	13000
»	6	4344
»	7	2626
»	8	1750
»	9	1331
»	10	1000
»	11	82(10)
»	12	6(11) 4

Voici une application, digne de remarque du système de numération de base 3, combiné avec l’emploi de chiffres négatifs ; les chiffres se réduisent alors à 0, + 1, −1. Elle est d’autant plus intéressante qu’elle peut se prêter à un emploi pratique dans certaines questions relatives aux ascenseurs hydrauliques[15].

M. Marcel Deprez, membre de l’Institut, à qui nous devons le transport de l’énergie par l’électricité, a bien voulu me communiquer une remarque curieuse

15. Cette application, dans l’édition précédente, figurait à la fin du volume, sous le titre *Note sur une question de pesées*.

sur le système de poids à employer pour effectuer des pesées au moyen d'une balance. On suppose qu'on puisse placer des poids dans les deux plateaux. Dans ces conditions, le problème qu'on se propose est de déterminer un système de poids (un seul poids de chaque espèce) à partir de 1 gramme, par exemple, de manière qu'il soit possible d'équilibrer par ce moyen des corps pesant 1, 2, 3… grammes jusqu'à une limite déterminée.

On voit qu'avec les 2 poids 1 gramme et 3 grammes, on peut peser jusqu'à 4 grammes, puisque $2 = 3 - 1$ et $4 = 3 + 1$.

En prenant les 3 poids 1, 3, 9 grammes, on peut peser jusqu'à 13 grammes.

> En général, si on a pris les n poids, 1, 3… 3^{n-1} grammes, on pèsera jusqu'à $\frac{1}{2} \times (3^n - 1)$ grammes.

Par exemple, avec les 7 poids 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729 grammes, on peut peser depuis 1 jusqu'à 1093 grammes.

Cette question, comme on pourra s'en rendre compte, revient à l'écriture des nombres successifs dans le système de base 3 en utilisant des chiffres négatifs. Alors, au lieu des chiffres 1, 2 on emploie 1, $\bar{1}$; et $\bar{1}$ indique que le poids correspondant doit être placé dans le second plateau de la balance.

Par exemple, 59 s'écrit dans ce système $1\,\bar{1}\,1\,\bar{1}\,\bar{1}$ car $59 = 81 - 27 + 9 - 3 - 1$. Pour peser 59 grammes, on mettra les poids 81 et 9 dans un plateau et, 27, 3, 1 dans le plateau opposé ; en ajoutant dans ce dernier un corps pesant 59 grammes, il y aura équilibre.

Il peut être intéressant d'ajouter ici quelques observations concernant la numération romaine. Elle n'est plus guère en usage que pour marquer les heures sur les cadrans des montres ou des pendules. Il est bon de la connaître aussi pour déchiffrer les dates dans de vieilles inscriptions ; mais voilà tout ; si bien qu'elle présente un médiocre intérêt mathématique actuel. Au point de vue pédagogique, il n'en est pas de même. Je me bornerai à résumer à ce sujet des remarques qui me furent présentées, il y a bien des années, par M. Godard, alors directeur de l'École Monge.

Si l'on trace régulièrement des bâtons régulièrement espacés, sur un tableau noir par exemple, et si on demande brusquement le nombre composant un tel groupe à un observateur non prévenu d'avance, la réponse sera immédiate tant que le groupe sera de deux, trois ou quatre ; au delà, c'est-à-dire pour cinq et au-dessus, il faut une opération préliminaire de l'esprit, qui peut être très rapide, une décomposition mentale du nombre, et la réponse, en réalité, ne résulte plus de la vision directe. C'est là un fait qui semble bien acquis et qui est vérifié par de très nombreuses expériences.

D'autre part, on remarque que le nombre cinq joue un rôle capital dans la numération romaine.

On s'est alors demandé si celle-ci n'aurait pas tiré son origine première du fait physiologique que nous venons de signaler, et ses symboles d'écriture des dispositions anatomiques de la main de l'homme.

Les nombres un, deux, trois, quatre, seraient figurés par un, deux, trois, quatre doigts levés :

I,II, III, IIII ;

Cinq, c'est la main toute entière qui, si l'on tient le pouce en l'air, écarté des autres doigts, représente assez bien la forme de la lettre V. Dix, ce sera la réunion de deux mains, dirigées l'une vers le haut, V, l'autre vers la bas, A, ce qui donne la lettre X.

Nous ne voulons parler ici que des principes même de la numération romaine, et nous nous abstenons de signaler les autres symboles L, C, M,… Remarquons cependant qu'on évite toujours d'arriver à la répétition consécutive d'un même signe au delà de quatre fois.

Pour obtenir les nombres compris entre cinq et six, on met les unités à la suite du signe V :

VI, VII,…

De même pour les nombres supérieurs à dix :

XI, XII,…

Il est vraisemblable que par un perfectionnement ultérieur, mais pourtant fort ancien, on a eu l'idée d'opérer la soustraction en plaçant l'unité, (ou d'autres symboles) à la gauche d'un signe déterminé, au lieu de les mettre à la droite ce qui représenterait l'addition. C'est ainsi qu'on a obtenu les écritures

IV, IX, XL,

signifiant cinq moins un, ou quatre ; dix moins un, ou neuf ; cinquante moins dix, ou quarante ; et bien d'autres analogues. Il est fort remarquable de constater ici, sous forme embryonnaire en quelque sorte, cette première tentative de traduction graphique du signe par le sens.

Ces observations m'ont semblé assez curieuses pour mériter d'être mentionnées. II semble bien en résulter que la numération romaine fut une numération de base cinq, mais incomplète, parce qu'elle n'usait pas de symboles différents pour représenter les quatre premiers nombres, et surtout parce qu'elle n'avait pas la ressource précieuse du zéro, ce pivot central de toute numération rationnelle, ce rien qui est tout en Arithmétique.

33. LA NUMÉRATION BINAIRE

Nous avons vu, dans le numéro précédent, que si B est la base d'un système de numération, ce système exige B – 1 chiffres, en dehors du zéro. Si on prend 2 pour base, il n'y aura donc lieu d'employer qu'un seul chiffre, le chiffre 1.

L'idée de cette numération où tous les nombres s'écrivent au moyen de deux seuls caractères 1 et 0, semble appartenir à Leibniz[16], bien qu'on prétende que les Chinois en auraient fait usage en des temps très reculés.

Pour l'usage habituel du calcul, ce système aurait l'inconvénient d'allonger beaucoup les écritures. Ainsi le nombre 1000 de la numération décimale, s'écrirait, dans le système binaire, 1111101000. Ce serait un nombre de dix chiffres. Mais dans certaines applications scientifiques, la numération binaire est d'un emploi utile et intéressant. Elle donne en outre l'explication de certains jeux, tels que le baguenaudier et la Tour d'Hanoi. Enfin on a imaginé un petit jeu de salon qui repose sur l'emploi du la numération binaire, et dont Ed. Lucas a reproduit la description dans son *Arithmétique amusante* sous le nom d'*Eventail mystérieux*.

Pour faire comprendre en quoi il consiste, supposons qu'on ait écrit les 31 premiers nombres en numération binaire :

Base 10	Base 2	Base 10	Base 2	Base 10	Base 2
1	1				
2	10	12	1100	22	10110
3	11	13	1101	23	10111
4	100	14	1110	24	11000
5	101	15	1111	25	11001
6	110	16	10000	26	11010
7	111	17	10001	27	11011

16. LEIBNIZ, mathématicien et philosophe allemand, né à Leipzig (1646-1716).

Base 10	Base 2	Base 10	Base 2	Base 10	Base 2
8	**1000**	**18**	**10010**	**28**	**11100**
9	**1001**	**19**	**10011**	**29**	**11101**
10	**1010**	**20**	**10100**	**30**	**11110**
11	**1011**	**21**	**10101**	**31**	**11111**

Maintenant, sur un carton A, écrivons (système décimal) tous ceux de ces nombres qui sont terminés par 1 (système binaire) :

A	B	C	D	E
1	**2**	**4**	**8**	**16**
3	3	5	9	17
5	6	6	10	18
7	7	7	11	19
9	10	12	12	20
11	11	13	13	21
13	14	14	14	22
15	10	13	lo	23
17	18	20	24	24
19	19	21	25	25
21	22	22	26	26
23	23	23	27	27
25	26	28	28	28.
27	27	29	29	29
29	30	30	30	30
31	31	31	31	31

Sur un $2^{ème}$ carton B, nous inscrivons de même les nombres dont le $2^{ème}$ chiffre à partir de la droite est un 1 en numération binaire ; puis de même (cartons C, D, E) pour les $3^{ème}$, $4^{ème}$, $5^{ème}$ chiffres.

Si ayant confié ces 5 cartons à une personne, vous l'invitez à penser un nombre, et à vous présenter les cartons sur lesquels le nombre est inscrit, et ceux-là seulement, cela revient à vous indiquer les chiffres qui permettent de l'écrire en numération binaire. Il est bien facile de vérifier que pour trouver le nombre, il n'y a qu'à ajouter les premiers nombres figurant sur chaque carton. Soit par exemple 25 le nombre pensé ; on vous présente les cartons A, D, E, commençant par 1, 8, 16 ; 1 + 8 + 16 = 25.

On peut d'une part, pousser ce jeu jusqu'à 63 au lieu de 31, avec 6 cartons au lieu de 5, et jusqu'à 127 avec 7 cartons. D'un autre côté, on peut rendre l'apparence de la divination plus mystérieuse en remplaçant les nombres par des noms propres. On a une liste de concordance faite une fois pour toutes entre les noms et les nombres, et on se rappelle que les divers cartons commencent par 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64.

Chacun peut composer soi-même, très facilement, cet ensemble de cartons, jusqu'à 7 par exemple. Et si l'on n'arrive pas ainsi à passer pour sorcier, on aura du moins l'avantage de s'exercer à faire rapidement et sûrement des additions de tête. Sans quoi on serait exposé à perdre tout prestige.

34. LES PROGRESSIONS PAR DIFFÉRENCE

Prenons une suite de nombres :

4 7 10 13

par exemple, tels que la différence de deux de ces nombres qui se suivent soit toujours la même :

$$7 - 4 = 10 - 7 = 13 - 10 = 3$$

Une telle suite est appelée *une progression par différence*. La différence constante, 3 dans cet exemple, est la *raison* de la progression.

Les nombres 4, 7, 10, 13 sont les *termes* de la progression. Nous n'en avons ici écrit que quatre, mais on pourrait en former autant qu'on le voudrait.

On peut remarquer que la suite des nombres entiers 1, 2, 3,… forme une progression par différence de raison 1, et que la suite des nombres impairs 1, 3, 5,… forme une progression par différence de raison 2.

Cherchons (fig. 66) à représenter graphiquement la progression 4, 7, 10, 13, prise ci-dessus pour exemple. Sur un papier quadrillé, comptant 4 cases sur une première ligne (et les représentant par des jetons noirs), nous porterons 7 cases sur la 2ème ligne, 10 sur la 3ème, 13 sur la 4ème.

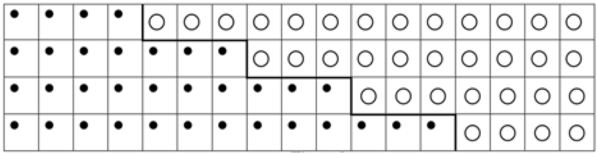


FIG. 72

Puis ajoutant 4 cases à cette dernière ligne et achevant le rectangle, nous voyons que ce rectangle contient deux fois les termes de la progression, représentés par des jetons noirs et des jetons blancs.

Nous vérifions aussi que la somme des termes extrêmes est la même que celle de deux termes équidistants des extrêmes. Enfin, la somme des termes de la progression sera la moitié du nombre des cases du rectangle, c'est-à-dire $\frac{17 \times 4}{2}$.

En général, si a et l sont les deux termes extrêmes et si n est le nombre des termes, cette somme est exprimée par :

$$\frac{(a + l)n}{2}$$

Si a =1 et si la raison est 1, alors $l = n$, et on a $\frac{n(n + l)}{2}$

Si $a = 1$ et si la raison est 2, alors $l = 2\,n — 1$ et on a n^2.

Nous retrouvons ainsi des résultats déjà rencontrés plus haut.

On remarquera l'analogie qui existe entre la formule $\frac{(a + l)n}{2}$ ci dessus, et celle de l'aire d'un trapèze.

Si r est la raison d'une progression par différence, on peut toujours représenter cette progression par :

$$a \quad a + r \quad a + 2r \ldots \quad a + (n - 1)r$$

35. LES PROGRESSIONS PAR QUOTIENT

Si une suite de nombres :

2 6 18 54 162

par exemple, est telle qu'en divisant chacun d'eux par celui qui le précède on trouve toujours le même quotient. ces nombres forment une progression par quotient. Le quotient constant est la raison de la progression. On peut dire encore que dans une progression par quotient, le rapport d'un terme au précédent est constant, et s'appelle *raison*. Dans l'exemple ci-dessus, la raison est 3, le premier terme est 2 et le nombre des termes est 5.

Les nombres 1, 10, 100, 1000…. dans le système décimal, forment une progression par quotient de raison dix. Les mêmes nombres écrits dans un système de numération de base B forment une progression par quotient dont la raison est B.

La raison peut être une fraction, aussi bien qu'un nombre entier. Si elle est plus grande que 1, les termes vont en augmentant sans cesse ; la progression est alors croissante. Si la raison est plus petite que 1, la progression est décroissante, et ses termes vont en diminuant de plus en plus.

Il est intéressant de pouvoir trouver la somme des termes d'une progression par quotient. Reprenons l'exemple ci-dessus :

$$2 \quad 6 \quad 18 \quad 54 \quad 162$$

Si on multiplie un terme quelconque par la raison 3, on a le terme suivant. Si on le multiple par 3 - 1 ou 2, on aura donc la différence de deux termes consécutifs :

$2\,(3 - 1) = 6 - 2,$ $\qquad 6\,(3 - 1) = 18 - 6$

$18\,(3 - 1) = 54 - 18,$ $\qquad 54\,(3 - 1) = 162 - 4$

$162\,(3 - 1) = 480 - 162$

En ajoutant, si la somme est s, on aura donc

$$s(3-1) = 486 - 2\,;\, s = \frac{486-2}{3-1} = 242.$$

En général, soit

$$a \quad b \quad c \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad k$$

la progression de raison q, dont on veut trouver la somme s ; si on la pousse d'un terme de plus $l = kq$, on aura

$a\,(q - 1) = b - a\,,$ $\qquad b\,(q - 1) = c - b\,,$

$k\,(q - 1) = l - k,$

et

$$s(q-1)=1-a\;;\;s=\frac{l-a}{q-1}$$

Si la progression est décroissante, on a, ce qui revient au même, $\frac{a-l}{1-q}$.

Les progressions par quotient jouent un très grand rôle dans le calcul ; elles ont de nombreuses applications.

Alors même que la raison n'est pas beaucoup plus grande que 1, si le nombre des termes devient un peu élevé, les progressions conduisent à des nombres d'une grandeur énorme ; ces résultats tout d'abord frappent d'étonnement, lorsqu'on n'est pas prévenu. Nous allons en voir quelques' exemples dans les n^os^ suivants.

Il est utile de remarquer que si *a* est le premier terme d'une progression par quotient, *q* la raison, et *n* le nombre des termes, on peut écrire la progression :

$$a \quad aq \quad aq^2 \quad aq^3 \quad \ldots \quad \ldots \quad aq^{n-1}$$

36. LES GRAINS DE BLÉ SUR L'ÉCHIQUIER

On ne sait au juste quel est l'inventeur du jeu des échecs ; mais il existe à ce sujet une vieille légende hindoue qui mérite d'être retenue.

Emerveillé de ce jeu nouveau, le monarque, d'après cette légende, aurait fait appeler l'inventeur, lui proposant de fixer lui-même la récompense qu'il désirait :

« *Qu'on daigne simplement, répondit l'intéressé, me donner un grain de blé, qu'on placera dans la première case de mon échiquier ; en mettre 2 sur la 2*^{ème}*, 4 sur la 3*^{ème}*, et continuer ainsi, en doublant toujours, jusqu'à la 64*^{ème} *case.* »

La modestie d'une telle requête frappa, dit-on, le monarque de stupeur, et il donna l'ordre de satisfaire sans retard à la demande. Mais il fut plus étonné encore quand on vint lui annoncer l'impossibilité complète d'exécuter ses ordres. Il aurait fallu environ pour cela huit récoltes annuelles produites par la surface de la terre supposée complètement ensemencée.

Le nombre des grains de blé réclamés est la somme des termes de la progression

$$1 \quad 2 \quad 2^2 \quad 2^3 \quad \dots \quad \dots \quad 2^{63},$$

ce qui donne $2^{64} - 1$. Voici ce nombre, écrit dans le système décimal

$$18 \quad 446 \quad 744 \quad 073 \quad 709 \quad 551 \quad 615$$

Il a, comme on le voit, vingt chiffres. N'essayons pas de le lire. Les mots qu'on prononcerait ne diraient pas grand chose à l'esprit. Et cependant, nous en trouverons prochainement d'autres bien plus grands encore.

37. UNE MAISON À BON MARCHÉ

Un de nos amis, connaissant probablement l'histoire de l'inventeur du jeu des échecs, s'était fait construire une petite maisonnette à un étage. On accédait au rez-de-chaussée, un peu surélevé, par un perron de 7 marches ; et l'escalier qui conduisait ensuite à l'étage avait 19 marches.

Au bout de quelques années, il dut mettre en vente sa bicoque, d'ailleurs bien entretenue et d'agréable aspect. Au premier acquéreur qui se présenta, Dupont (il devait s'appeler Dupont) fit la proposition suivante.

« *Je ne suis pas bien exigeant et je suis pressé de vendre ; vous mettrez un centime sur la première marche du perron, 2 sur la lame, 4 sur la 3ème et vous doublerez ainsi jusqu'au terme de l'escalier. C'est pour rien ; il n'y a que 26 marches en tout* ».

« *Tope là ! marché conclu* » ; s'écria Lenglué, ravi d'une aussi belle aubaine (l'acquéreur s'appelait certainement Lenglué).

Et le lendemain, Lenglué, ayant offert préalablement à Dupont un superbe déjeuner, s'achemina vers le perron pour s'acquitter des 2^{26}-1 centimes qu'il devait payer.

Jusqu'au sommet de l'escalier du perron, cela allait tout seul ; les premières marches de l'escalier étaient assez légères à gravir ; mais bientôt la bourse de Lenglué se vidait plus qu'il ne l'avait prévu.

Très obligeamment, le vendeur s'offrit à présenter le résultat du calcul, sans qu'il fût besoin de continuer l'ascension.—.

« *Mon cher Lenglu,. s'écria-t-il, vous me devez 671 088 fr. 63 centimes ; mais à un ami comme vous, je ne voudrais pas demander les 63 centimes, et je vous en fais remise* ».

Le nez de Lenglué, à ce discours, s'allongea fortement. Depuis cette époque, il a tenu, paraît-il, à ce qu'on apprit à ses enfants ce que c'est qu'une progression.

Il le savait assez bien lui-même, mais la leçon lui semblait avoir coûté un peu cher.

38. LE PLACEMENT DU CENTIME

L'une des applications pratiques les plus importantes des progressions est celle qui concerne l'*intérêt composé*. Si on place 1 franc pendant un an, à 5 pour cent, il rapporte 5 centimes. Si au lieu de toucher les 5 centimes, on les joint au franc, cela fait 1 fr. 05 qu'on peut placer pendant une 27ème année, et ainsi de suite. Lorsque le nombre des années devient considérable, l'accroissement du capital par ce jeu de l'intérêt composé est absolument fantastique.

On a, par exemple, supposé qu'au début de l'ère chrétienne, un centime ait été placé à intérêts composés au taux de 5 pour cent, et on a calculé que vers la fin du 19ème siècle, la valeur acquise serait représentée par plus d'un milliard de sphères d'or pur ayant la grosseur de la Terre.

Soit dit en passant, un tel résultat montre bien l'impossibilité de l'application absolue du jeu de l'intérêt, dans la pratique. Mais l'énormité même qu'il présente empêche qu'on se fasse une idée exacte d'une pareille somme.

Au lieu de cela, nous pouvons nous poser la question que voici : pendant combien de temps faut-il placer 1 centime à intérêts composés, au taux de 5 pour cent, de telle sorte que la valeur acquise soit de un million de francs ?

On trouve 378 ans ; si bien que si l'un de vos ancêtres, vers 1527, du temps de François 1er , avait eu l'heureuse idée de placer la valeur de un franc à votre intention, à 5 pour cent et à intérêts composés, ce franc vaudrait aujourd'hui 100 millions de francs.

Si la même opération avait été faite en l'an 59 de notre ère, au taux de 1 pour cent seulement, le même résultat serait obtenu en 1907, c'est-à-dire que le franc ainsi placé aurait aujourd'hui une valeur de 100 millions de francs (sauf les accidents qui auraient pu survenir dans l'intervalle).

39. LE DÎNER CÉRÉMONIEUX

Un beau soir, douze personnes avaient pris rendez-vous pour dîner en commun. C'étaient des gens attachant une grosse importance à l'étiquette ; or, les places n'ayant pas été marquées à l'avance, une discussion courtoise s'engagea au moment de s'asseoir à table, sans d'ailleurs aboutir à aucun résultat. Quelqu'un, pour sortir d'embarras, proposa d'essayer successivement toutes les manières possibles de résoudre la question : il n'y aurait plus ensuite qu'à choisir la disposition qui semblerait la plus heureuse. On essaya, en effet, pendant quelques minutes ; mais on s'embrouillait, et les choses ne semblaient pas encore s'arranger toutes seules. Heureusement, parmi les convives, il s'en trouvait un, professeur au collège de la ville, ayant quelques notions mathématiques. — « *Mes bons amis*, dit-il, *le potage commence à refroidir. Tirons nos places au sort, ce sera plus tôt fait* ». On suivit ce sage conseil, et le repas s'acheva au milieu de la plus franche cordialité. Au dessert, reprenant la parole : « *Savez-vous*, demanda le professeur, *combien il nous aurait fallu de temps pour épuiser toutes les dispositions possibles que nous pouvions former autour de cette table, en mettant seulement une seconde pour passer d'une disposition à une autre ?* — Et, comme chacun gardait le silence : « *En continuant ce petit jeu, jour et nuit, sans nous arrêter un seul instant, nous y aurions mis plus de 15 ans et 2 mois, même en ne nous occupant pas de savoir combien il se présentera d'années bissextiles. Vous voyez que si le rôti menaçait* *de se dessécher, nous étions sûrs de périr tous de faim, d'épuisement et de privation de sommeil. Soyons donc cérémonieux, si le cœur nous en dit, mais sans excès».*

Et c'était la vérité ; le nombre exact des manières différentes dont 12 personnes peuvent prendre place à une table de 12 couverts est exactement 479 001 600 ; plus de 479 millions, vous avez bien lu.

Ce résultat est fait pour surprendre, quand on pense que pour 2 convives, il n'aurait fallu que 2 secondes ; et que pour 4 convives, l'essai eût été achevé en moins d'une demi-minute.

Les grands nombres que nous voyons apparaître ici sont dus à des permutations, et le décompte est facile à faire.

Quand on a plusieurs objets différents, qu'on veut ranger à des places différentes marquées d'avance, l'une quelconque des dispositions adoptées est une permutation de ces objets.

S'il s'agit de deux objets différents qu'on appelle *a*, *b*, et de deux places différentes, les deux seules permutations possibles sont *a b* et *b a*.

Pour former les permutations de trois objets, *a, b, c*, nous pouvons prendre la permutation *a b* et y adjoindre *c* à trois places différentes ; soit après *b*, soit entre *a* et *b*, soit avant *a*.

La permutation *b a* en donnera trois aussi en y adjoignant *c* ; en sorte que nous aurons le tableau général des permutations de *a, b, c*, en écrivant :

$$\begin{matrix} a\,b\,c & b\,a\,c \\ a\,c\,b & b\,c\,a \\ c\,a\,b & c\,b\,a \end{matrix}$$

Cela donne 2×3 ou 6 permutations.

Si on prend une quelconque de ces permutations, *a b c* par exemple, et si on y adjoint une 4ème lettre, *d*, on aura ainsi 4 permutations

$$a\,b\,c\,d \quad a\,b\,d\,c \quad a\,d\,b\,c \quad d\,a\,b\,c$$

et chaque permutation de 3 lettres en fournissant ainsi 4 de 4 lettres, le nombre des permutations de 4 lettres sera 6×4 ou $2.\ 3.\ 4 = 24$.

En continuant ainsi, on voit que le nombre de permutations de 5 lettres serait 2.3.4.5 ; et en général, celui des permutations de *n* lettres sera $2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times n$. On le représente souvent par $n\,!$

On voit, par les résultats ci-dessous, avec quelle rapidité croissent ces nombres $n\,!$ de permutations, lorsque *n* s'accroît.

n	$n!$
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5040
8	40 320
9	362 880

10	3 628 800
11	39 916 800
12	479 001 600

Les permutations ont une grande importance en mathématiques. Elles s'appliquent en outre à divers jeux ou amusements, tels que les anagrammes. Des études très nombreuses, souvent fort savantes, ont été publiées sur les permutations. Nous n'avons pas à nous en occuper ici ; mais il est bon de signaler l'idée géniale qu'a eue Ed. Lucas de représenter graphiquement, par un dessin, les permutations de plusieurs objets. C'est ce qu'il a nommé les *permutations figurées*. Pour les faire comprendre, imaginons qu'on forme sur un quadrillage un carré de n lignes, de n cases chacune ; et nous bornant aux permutations de 4 objets, faisons $n = 4$. Nous aurons un carré de 16 cases. Si nous remplaçons nos 4 objets *a, b, c, d* par les 4 nombres 1, 2, 3, 4, une permutation quelconque *c b d a* par exemple, s'écrira 3 2 4 1. Prenant alors la 1$^{\text{ère}}$ colonne du carré, nous marquons la 3$^{\text{ème}}$ case, et nous l'ombrons ; de même pour la 2$^{\text{ème}}$ case de la 2$^{\text{ème}}$ colonne, pour la 4$^{\text{ème}}$ de la 3$^{\text{ème}}$ colonne, et pour la 1$^{\text{ère}}$ de la 4$^{\text{ème}}$ colonne. Les quatre cases ombrées figurent ainsi la permutation *c b d a*.

La figure 73 nous montre les 24 permutations de 4 objets Pour en faciliter la compréhension et la lecture, nous reproduisons au-dessous le tableau des permutations correspondantes, avec la même disposition.

a b c d	*a b d c*	*a d b c*	*d a b c*
a c b d	*a c d b*	*a d c b*	*d a c b*
c a b d	*c a d b*	*c d a b*	*d c a b*
b a c d	*b a d c*	*b d a c*	*d b a c*
b c a d	*b c d a*	*b d c a*	*d b c a*
c b a d	*c b d a*	*c d b a*	*d c b a*

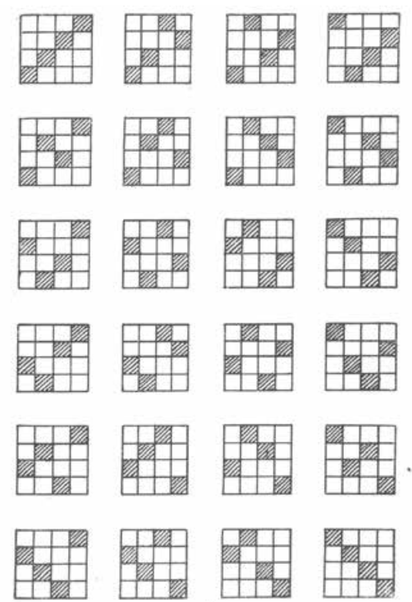


FIG. 73

Si l'on considère un quelconque des carrés de la figure 73 comme un échiquier, les cases ombrées représentent les positions de tours qui ne se trouvent pas en prise les unes des autres ; et cela s'étend à tous les carrés analogues. Il s'ensuit que sur un échiquier ordinaire, de 64 cases, on peut placer, de 40320 manières différentes, huit tours, de telle sorte qu'elles ne soient pas en prise réciproque. Sur un damier de 100 cases, on pourrait placer dix tours, dans les mêmes conditions, de 3 628 800 manières différentes. Consultez-le tableau ci-dessus (p. 117) pour les nombres que nous indiquons. Voilà certainement des questions dont on ne viendrait pas aisément à bout sans le secours des permutations, et qui deviennent, avec ce secours, tout à fait faciles.

Vous pouvez vous demander aussi de combien de manières différentes on peut ranger les cartes d'un jeu de piquet ; c'est 32 ! ou celles d'un jeu de whist ; c'est 52 ! mais je ne vous engage pas à essayer d'écrire ces nombres dans le système décimal. Proposez-vous plutôt de chercher le temps qu'il vous faudrait pour réaliser toutes ces dispositions, en consacrant une seconde à chacune d'elles. C'est un plaisir que je laisse à mes lecteurs, ou plutôt à leurs élèves. Mais qu'ils n'essaient pas non plus d'écrire ces nombres, même évalués en siècles ; cela ne contribuerait guère à la formation de l'esprit.

40. UN ASSEZ GRAND NOMBRE

Nous venons, par les progressions d'un côté, par les permutations de l'autre, de nous élever à d'assez grandes hauteurs sur l'échelle des nombres.

Dans l'espoir de revenir à des limites plus raisonnables et d'échapper ainsi au vertige, demandez à quelqu'un de vous écrire avec trois 9, le plus grand nombre possible. Le plus souvent, la réponse sera

999

nombre modeste en effet, honnête et modéré, qui n'a pas la prétention de vous mettre la cervelle en ébullition.

Seulement, si par malchance votre interlocuteur est un mathématicien consciencieux, désireux de répondre à votre question dans les termes où vous l'avez posée, une toute petite modification d'écriture se produira, et vous lirez

999

Cela veut dire qu'il faut élever 9 à une puissance marquée par le nombre 9^9. Ce dernier est facile à obtenir en quelques minutes. Votre élève vous le donnera certainement sans aucune hésitation, si vous ne voulez pas le calculer vous-même. C'est

387 420 489

et ce résultat est fort intéressant, car vous savez. grâce à lui, qu'il ne vous reste plus qu'à effectuer 387 420 488 multiplications, pour avoir dans le système décimal, le nombre désiré. Ce sont des multiplications très simples, n'ayant jamais que 9 pour multiplicateur ; mais le nombre en est peut-être assez grand pour vous inspirer quelque hésitation.

Décidément, je ne saurais vous encourager à entreprendre cette tâche. Laissez-moi seulement vous dire – et répétez-le à votre élève, qui vérifiera le fait plus tard – que le nombre 999 , s'il était écrit en numération décimale aurait

369 693 100 chiffres.

Pour l'écrire sur une seule bande de papier, en supposant que chaque chiffre occupe une longueur de 4 millimètres, il suffirait que cette bande eût une longueur de

1478 kilomètres 772 mètres 40 centimètres.

C'est un peu plus de deux fois la distance de Paris à Avignon par le chemin de fer.

Dans les mêmes conditions, pour écrire 101010, il faudrait une bande de papier ayant pour longueur le tour entier de la Terre[17].

Le temps matériel nécessaire pour écrire le nombre 999 , en mettant une seconde par chiffre et en travaillant 10 heures par jour, n'excéderait guère 28 ans et 48 jours, à la condition de supprimer tous dimanches et toutes fêtes. c'est-à-dire de ne prendre aucun jour de repos.

Pour plus de renseignements, je peux vous affirmer encore que le premier chiffre du nombre que nous cherchons est un 4, et que le dernier est un 9. Il ne

17. Cette remarque a été faite par M. Ch.-Ed. Guillaume, dans un très intéressant article de la *Revue générale des sciences* (30 octobre 1906).

nous en reste donc plus à trouver que 369693098. Vous estimerez peut-être que la simplification est mince ; c'est un avis que je partage. En revanche, je l'espère, vous conviendrez que le titre de ce n°, « *Un assez grand nombre* », est vraiment justifié.

Une dernière remarque assez curieuse, c'est que 111 est simplement 1, que 222 = 16, et que 333 est un nombre de 13 chiffres

7 625 597 484 987[18].

41. COMPAS ET RAPPORTEUR

Dans les exercices de dessin, que nous avons dû poursuivre sans discontinuer, peut-être s'est-il déjà présenté des cercles ou des fragments de lignes circulaires qu'il nous a suffi de tracer à peu près à main levée.

Pour des tracés dans lesquels nous voulons avoir une certaine précision, le moment est venu d'accoutumer

18. Malgré les explications données, plusieurs lecteurs ont fait une confusion sur la signification de 333 , et quelques-uns m'ont écrit qu'ils trouvaient pour résultat 19 683, et non pas un nombre de 13 chiffres. Cela provient d'une fausse interprétation du symbole abc, dans lequel on peut voir (ab)c ou a(bc). Cette dernière interprétation est la seule raisonnable ; car $(a^b)^c = a^{bc}$.

Il serait peu logique d'employer l'écriture abc pour représenter l'opération plus simple a^{bc}.

Dès lors 999 ne peut signifier que 9(99)et 333 veut dire 3^{27} et non pas 27^3.

l'enfant à l'usage du compas. On l'exercera au tracé d'arcs de cercles, puis de cercles tout entiers, au crayon d'abord, à l'encre ensuite. On apprendra, suivant des procédés indiqués dans tous les traités classiques, à mener ainsi des perpendiculaires à des droites, à construire des triangles et diverses autres figures, etc.

Ces constructions, quand on veut les rendre un peu précises, doivent en outre comporter l'emploi de l'instrument appelé *rapporteur*, lequel est très simple aussi, et rend des services à peu près équivalents sous les diverses formes qu'il affecte ; demi-circulaire ou rectangulaire, métallique ou en corne, etc.

Quant au mode de division du rapporteur, il faudra donner la préférence à la division en *grades*, où *l'angle droit est divisé en 100 grades*, et ensuite le grade en dixièmes, centièmes, etc. Ce mode de mesure des angles avait été institué en même temps que le système métrique. On l'a abandonné pour l'ancien système des degrés, minutes. etc. Aujourd'hui, et avec raison, on y revient, même dans certains programmes officiels ; et plusieurs services publics importants ont constamment employé cette division en grades. Il convient donc de la rendre, dès le début, familière aux enfants, et de leur montrer sous le nom de 50 grades (plutôt que 45 degrés), la moitié d'un angle droit.

Les constructions à faire exécuter doivent être très simples, souvent laissées à l'initiative de l'enfant. Mais ce qui est très important, c'est de lui faire exécuter une même construction avec des échelles différentes. Il prendra de lui-même, ainsi, la notion de figures ayant même forme, avec des grandeurs différentes, c'est-à-dire des *figures semblables*, en dehors de toute définition doctrinale.

L'enfant s'apercevra bien vite que l'échelle choisie pour faire une construction n'amène aucun changement dans les angles, qu'au contraire, s'il adopte une échelle double, ou triple, toutes les longueurs correspondantes deviennent en même temps doubles, ou triples. Bref, sans faire aucune étude géométrique quant à présent, il prendra, par l'expérience, la connaissance, accompagnée de certitude, de beaucoup de vérités dont les démonstrations seront plus tard d'autant plus facilement assimilables.

Il est certaines autres propriétés utiles à connaître, certaines dénominations utiles à retenir, pour lesquelles il faudra provisoirement demander à votre élève de vous croire sur parole, et de vous faire crédit. Ceci va faire l'objet des numéros suivants.

42. LE CERCLE

Le cercle est la figure ronde (fig. 74) qu'on trace avec un compas, l'une des pointes restant fixe.

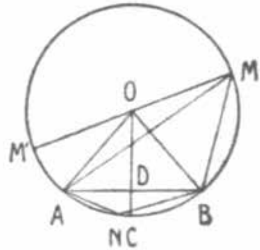


FIG. 74

Le point O où est fixée cette pointe est *le centre* : la distance du centre à un point quelconque M du cercle est *le rayon*. Le double du rayon est <u>*le*</u> *diamètre* : toute droite MM' passant par le centre est <u>*un*</u> *diamètre* ; la longueur du segment MM' est double du rayon. Quand on prend deux points A, B sur un cercle, la portion du cercle limitée à A et B, soit dans un sens, soit dans l'autre, s'appelle un *arc de cercle*. Le segment de droite AB est *une corde* qui sous-tend les deux arcs AB. La portion du plan comprise entre la corde et l'arc s'appelle *un segment de cercle*. Quand on joint le point O à deux points A, B du cercle, l'angle AOB est nommé un *angle au centre*. L'angle AMB, dont les côtés passent par A, B, et dont le sommet est en M sur le cercle, est un *angle inscrit* dans le segment AMB ; cet angle est la moitié de l'angle AOB. Quand on joint le centre au milieu C de l'arc AB, la droite OC est perpendiculaire à la corde AC, et elle la coupe en D par moitié.

Si on prend un point N sur le cercle, en dessous de la corde AB sur la figure, la somme des deux angles AMB, ANB est égale à deux angles droits.

Quand on considère (fig. 75) un cercle et une droite, celle-ci peut (D1) être extérieure au cercle ; ou (D2) la couper en deux points ; on dit alors qu'elle est *sécante ;* ou enfin (D3) toucher le cercle en un seul point, auquel cas elle est *tangente* au cercle. La distance du centre à la droite est

plus grande que le rayon pour une droite extérieure

plus petite » » » » » » sécante

égale au rayon » » » tangente.

Le point commun à la tangente et au cercle est *le point de contact*. La tangente est perpendiculaire au rayon qui aboutit au point de contact.

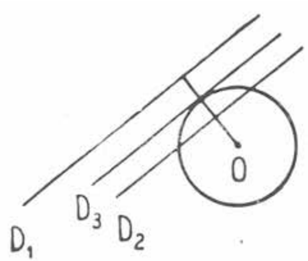


FIG. 75

Dans un cercle quelconque, on a la notion de la longueur : ce serait par exemple celle d'un fil très fin qui entourerait le rond tout entier. Bien que cette idée générale manque de rigueur, elle fait image et parle à l'esprit ; elle se précisera plus tard. La longueur du cercle dont nous venons de parler, s'appelle circonférence.

Si (fig. 76) on considère deux cercles quelconques O, O', le rapport des circonférences est égal au rapport des diamètres. Cela veut dire aussi que le rapport de la longueur de la circonférence à celle du diamètre est la même dans chacun des deux cercles, et par suite dans tout cercle.

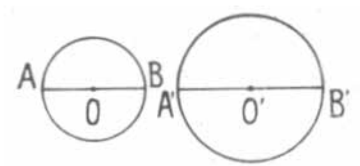


FIG. 76

Ce rapport de la circonférence au diamètre, qu'on ne peut exprimer exactement par des fractions quelconques, est plus grand que 3,14 ; il est plus petit que 3,1416 ; on le désigne par la lettre grecque π. Pour beaucoup d'usages ordinaires, 3,14 est une valeur suffisamment approchée ; et 3,1416 convient à presque tous les cas où l'on a besoin d'une plus grande précision.

Si C est la longueur de la circonférence, et si $D = 2R$ est le diamètre, R étant le rayon, le rapport est donc π.

Cela veut dire que $C = \pi D = 2 \pi R$. Dans la pratique courante, $C = 3{,}14 \times D = 6{,}28 \times R$

Cela permet de connaître facilement la circonférence d'un objet circulaire quelconque quand on connaîtra le rayon, ou le diamètre ; et aussi de trouver le diamètre, par exemple. d'une tour ronde, d'un tronc d'arbre, d'une colonne, quand on peut en mesurer le tour avec un ruban divisé ou de toute autre façon. Poussez le plus possible les enfants à ces exercices sur des objets réels ; et lorsqu'on peut à la fois mesurer la circonférence et le diamètre, ne manquez pas d'en profiter pour faire vérifier la valeur approchée de π dont on a fait usage.

43. L'AIRE DU CERCLE

De même que nous avons l'intuition de la longueur de la circonférence du cercle, de même aussi nous sentons que la portion du plan comprise à l'intérieur de la ligne a une certaine étendue, une aire qui doit pouvoir être mesurée. On établit que cette aire est obtenue en multipliant la longueur de la circonférence par la moitié du rayon. Et, comme nous avons vu que $C = 2\pi R$, il s'ensuit que l'aire $S = 2\pi R \times R = \pi R^2$ ou encore que $S = \frac{1}{4} \pi D^2$. Il en résulte aussi que les aires de deux cercles ont entre elles un rapport qui est le même que celui des carrés des rayons, ou des diamètres.

Ici encore, des exemples pratiques, aussi variés que possible, pourront servir de thèmes à des exercices sur ces questions d'aires ; massifs circulaires dans un jardin ; bassins dans les jardins publics, manèges dont on veut sabler le sol, peinture d'une table ronde ; évaluation de couronnes circulaires par différences entre deux cercles, etc., etc.

44. LUNULES ET ROSACES

Dans la plupart des traités de dessin, on trouvera des modèles de figures formées d'éléments circulaires, pouvant être tracées à l'aide du compas, et constituant d'intéressants exercices.

Uniquement à titre de spécimen, nous indiquerons ici un petit nombre seulement de ces figures, dont quelques-unes sont classiques.

Uniquement à titre de spécimen, nous indiquerons ici un petit nombre seulement de ces figures, dont quelques-unes sont classiques. Si l'on dessine (fig. 77) une demi-circonférence ayant pour diamètre BC, et si l'on prend un point A quelconque sur cette ligne, le triangle ABC est toujours rectangle, l'angle A étant droit. Maintenant, décrivons deux autres demi-circonférences sur AB et sur AC comme diamètres. Nous aurons ainsi deux sortes de croissants (ombrés sur la figure). Ce qui fait l'intérêt de cette figure, c'est que la somme des aires des deux croissants, ou *lunules*, est justement égale à l'aire du triangle ABC. Cette propriété était connue dès l'antiquité grecque, et la construction que nous venons d'indiquer est devenue classique sous le nom de *lunules d'Hippocrate*[19].

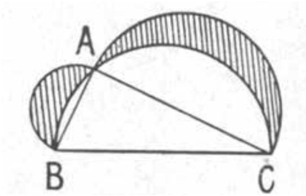


FIG. 78

Une autre construction intéressante est celle qu'indique la figure 78. Un cercle ayant pour diamètre A B, on a partagé ce diamètre en cinq parties égales par les points C, D, E, F. Sur AC, AD, AE, AF, comme diamètres, on trace des demi-circonférences au-dessus ; puis sur CB, DB, EB, FB, des demi-circonférences au-dessous. Par l'ensemble de ces lignes circulaires, le cercle est partagé en cinq parties qui ont même aire. Au lieu de cinq, on pourrait prendre un autre nombre *n* quelconque.

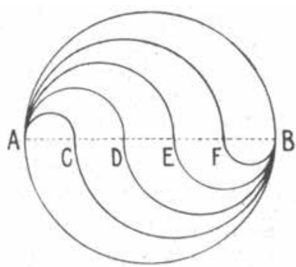


FIG. 77

19. Hippocrate de Chio, géomètre grec (Vème siècle avant J.-C.).

Il suffirait de partager le diamètre AB en n parties égales.

Dans un cercle (fig. 79) prenons deux diamètres perpendiculaires entre eux AB, CD. Ayant formé le carré OBEC, traçons de B en C un quart de cercle dont E est le centre ; traçons de même trois autres quarts de cercles CA, AD, DB ; et l'ensemble (partie ombrée) forme une sorte d'étoile à quatre pointes. L'aire de cette étoile est $(4 - \pi) R^2$, soit à peu près $0{,}86 \times R^2$.

Si (fig. 80) nous prenons encore deux diamètres perpendiculaires l'un sur l'autre AB, CD, et si nous traçons les demi-circonférences ayant pour diamètres BC, CA, AD, DB, nous obtenons une rosace à quatre feuilles. L'aire de cette rosace est $(\pi - 2) R^2$ ou, à peu près, $1{,}14 \times R^2$, le rayon étant toujours représenté par R.

En ouvrant le compas d'une longueur égale au rayon, si on porte cette longueur (fig. 81) successivement sur le cercle en B, C,… on retombe exactement sur le point A après la 6ème opération, en sorte qu'on a les points A, B, C, D, E, F.

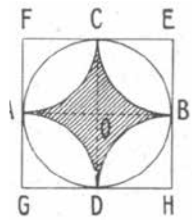


FIG. 79

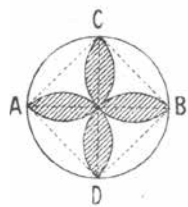


FIG. 80

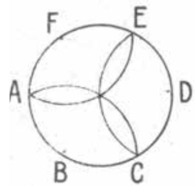


FIG. 81

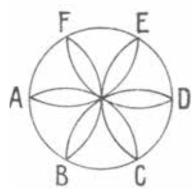


FIG. 82

Si de B, D, F comme centres, avec le rayon R, on décrit des arcs de cercles AC, CE, EA, qui passent tous par le centre, on a une rosace à trois feuilles.

En traçant (fig. 82) avec la même construction les six arcs de cercle de centres A, B, C, D, E, F, on obtient une rosace à six feuilles.

Nous bornons là ces indications, fournies uniquement à titre d'exemples. En réalité, on devra les varier, et pousser l'enfant à imaginer spontanément des formes nouvelles. Dès qu'il aura acquis un peu d'habileté dans le maniement du compas et des divers instruments élémentaires de dessin, il prendra goût à ces constructions et y mettra de lui-même tous ses soins et toute son attention[20].

45. QUELQUES VOLUMES

S'il est important de déterminer les aires des surfaces, il ne l'est pas moins, dans la pratique, de déterminer

20. Pour tout ce qui concerne les exercices de dessin géométrique et aussi pour commencer l'étude de la Géométrie, qui doit suivre l'initiation, nous ne saurions assez recommander l'ouvrage de M. C. Bourlet, *Cours abrégé de Géométrie; Géométrie plane*; Paris, Hachette, 1906. On pourrait aller jusqu'à dire que l'auteur a atteint à la perfection pédagogique, si la perfection était humainement possible. En tous cas, il se passera bien du temps avant qu'on fasse mieux en cette matière. Il est seulement à regretter que les programmes aient empêché M. Bourlet de mener de front l'étude de la Géométrie de l'espace avec celle de la Géométrie plane, au moins en ce qui concerne les translations rectilignes.

les volumes des corps. Il faut pour cela une unité de volume, de même que pour les longueurs il fallait une unité de longueur, pour les aires, une unité d'aire. Cette unité de volume, c'est invariablement le volume d'un cube qui aurait pour côté l'unité de longueur.

Partant de là, pour un certain nombre de corps ayant des formes régulières, on a trouvé des moyens très simples pour obtenir les volumes.

Nous allons les résumer tout à l'heure, de façon à ce qu'on n'ait pas besoin d'aller faire des recherches pour résoudre certaines questions usuelles. Auparavant, rappelons les corps que nous avons précédemment définis, et indiquons-en trois autres, qu'on rencontre fréquemment dans les applications courantes.

Nous avons vu ce que c'est qu'un *cube*. un *parallélépipède*, un *prisme*, une *pyramide*.

Dans tous ces corps, on ne voit que des lignes droites et des plans ; on les appelle en général des *polyèdres*. Dans les trois autres dont nous allons parler maintenant, il n'en est plus ainsi.

Imaginons (fig. 83) qu'un rectangle AOO'A' tourne autour tour de son côté OO' ; il engendre ainsi un corps qu'on appelle un *cylindre droit*.

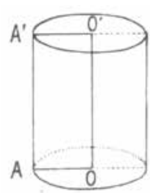


FIG. 83

Une boite à chapeau ou à manchon, un verre de lampe, l'intérieur d'un litre en métal, ou d'un décalitre en bois, nous montrent ce qu'est la forme générale d'un cylindre. Les deux côtés OA, O'A' du rectangle décrivent deux cercles pareils de rayons OA = O'A' et qu'on appelle les bases du cylindre ; OO', qui n'a pas bougé, représente la distance des plans des deux bases ; c'est la *hauteur du cylindre.*

Soit (fig. 84) un triangle rectangle AOS, dans lequel 0 est un angle droit, et supposons que ce triangle tourne autour de SO ; il engendrera ainsi un corps qu'on appelle un *cône droit*. Un pain de sucre, un entonnoir, une carotte affectent la forme générale d'un cône. Le côté OA du triangle décrit un cercle qu'on appelle la base du cône. Le point S, qui n'a pas bougé, est le *sommet*. La longueur SO, distance de S au plan de la base, est la *hauteur du cône*.

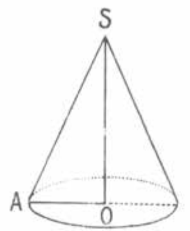


FIG. 84

Enfin si un cercle tourne autour d'un diamètre, le corps qu'il engendre s'appelle une *sphère*. La forme d'une sphère est celle d'une boule ronde. Le centre du cercle est le *centre* de la sphère, et le rayon du cercle est le *rayon* de la sphère. Tout plan qui passe par le centre coupe la sphère suivant un cercle qui a même rayon qu'elle et qu'on appelle *un grand cercle*. Toute droite qui passe par le centre coupe la sphère en deux points également distants du centre, et le segment déterminé par ces deux points est *un diamètre*, dont la longueur est double de celle du rayon.

Remarquons qu'un cylindre est déterminé quand on connait le rayon de sa base et sa hauteur, qu'il en est de même pour un cône, et qu'une sphère est déterminée quand on connaît son rayon.

Tout ceci bien établi, nous aurons le volume :

- ***d'un cube***, en multipliant deux fois par elle-même la longueur de son côté. Si a est le nombre qui mesure cette longueur, cela nous donne $a \times a \times a$ ou a^3 ; — Formule : $\mathbf{V = a^3}$;
- ***d'un parallélépipède***, en multipliant l'aire de la base par la hauteur ; l'aire B de la base étant elle-même un produit $a\ b$, si a est un côté du parallélogramme de base ayant b pour hauteur, on devra former le produit $a\,b\,h$ par la hauteur du parallélépipède : formule $\mathbf{V = B}h \mathbf{=} a\,b\,h$;
- ***d'un prisme***, dont le parallélépipède n'est qu'un cas particulier, en multipliant l'aire de la base par la hauteur ; formule $\mathbf{V = B}\ h$;
- ***d'une pyramide***, en prenant le tiers du produit de l'aire de la base par la hauteur ; cette détermination –du volume de la pyramide a été donnée pour la première fois par Archimède[21] ; formule $\mathbf{V} = \frac{1}{3}\ \mathbf{B}h$;
- ***d'un cylindre***, en multipliant l'aire de la hase par la hauteur. Comme la base est un cercle, de rayon r, si la hauteur est h il s'ensuit pour la formule $\mathbf{V} = \pi\, r^2\, h$;

21. Archimède, illustre géomètre, né à Syracuse, (287 – 212 avant J.-C.).

- ***d'un cône***, en prenant le tiers du produit de l'aire de la base par la hauteur ; il s'ensuit pour la formule $\mathbf{V} = \frac{1}{3}\, \boldsymbol{\pi}\, \boldsymbol{r^2}\, \boldsymbol{h}$;
- ***d'une sphère***, en multipliant le cube du rayon par les 4/3 de π ; formule $\mathbf{V} = \frac{4}{3}\, \boldsymbol{\pi}\, \mathbf{r^3}$.

On établit aussi que l'aire d'une sphère est égale à 4 fois celle d'un grand cercle ou $\mathbf{4\, \boldsymbol{\pi}\, r^2}$. On peut par conséquent dire encore que le volume d'une sphère est égal à son aire multipliée par le tiers du rayon.

Enfin le volume d'une sphère peut aussi se déterminer par la formule $\mathbf{V} = \frac{1}{6}\, \boldsymbol{\pi}\, \boldsymbol{d^3}$, et son aire par $\boldsymbol{\pi}\, \boldsymbol{d^2}$, si on appelle *d* le diamètre.

Tous ces résultats seront obtenus plus tard. On ne les communique actuellement à l'enfant que pour lui rendre possibles certains exercices pratiques. Mais ne lui demandez pas de surcharger sa mémoire de toutes ces formules.

Mettez-les de nouveau sous ses yeux chaque fois qu'il en aura besoin. Si par l'usage elles se fixent dans son esprit, tant mieux. Sinon, n'en ayez cure.

46. LES GRAPHIQUES ; ALGÈBRE SANS CALCUL

Dans un grand nombre de revues ou de journaux, on trouve aujourd'hui des graphiques, figures dont on peut tirer un grand parti pour l'éducation mathématique première des enfants. Il faut leur faire comprendre ce que ces figures signifient, et les pousser ensuite à en construire eux-mêmes d'analogues.

Le plus habituellement, les graphiques dont il s'agit représentent les variations d'observations météorologiques, par exemple hauteur barométrique, température, ou celles des cours à la Bourse d'une valeur déterminée, pendant une certaine période de temps. Il y aura lieu de rappeler que les graphiques servent aussi, dans l'exploitation des chemins de fer, à représenter la marche des trains, et que c'est même le seul moyen vraiment pratique de s'en rendre compte.

Mais il importera surtout de faire remarquer que les mêmes procédés peuvent permettre de représenter les variations de n'importe quelle espèce de grandeur mesurable, qui dépend d'une autre grandeur, que cette dernière soit un temps ou autre chose.

Par exemple, quand on suspend un poids à un fil de caoutchouc, ce fil s'allonge. On pourra faire un graphique qui permette de savoir la longueur du fil quand on connaît le poids. Quand on presse un gaz, son volume diminue ; un graphique permettra de savoir quel est le volume du gaz quand on connaît la pression. Quand on chauffe de la vapeur d'eau, sa pression augmente ; un graphique permettra de connaître la pression, si on sait quelle est la température.

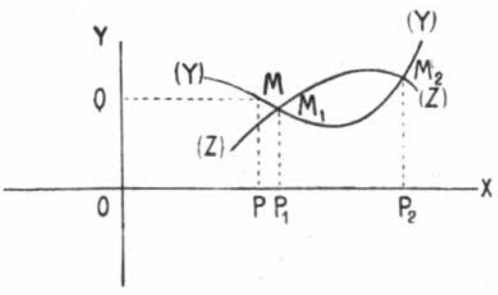


FIG. 85

Dans ces divers exemples, la longueur du fil dépend du poids suspendu ; on dit que c'est une *fonction* de ce poids ; le volume du gaz dépend de la pression ; c'est une fonction de la pression ; la pression de la vapeur d'eau, dépendant de la température, est une fonction de la température. Dans les exemples précédents, la hauteur du baromètre, le chemin fait par un train, etc., dépendaient de l'époque, c'est-à-dire du temps écoulé depuis une certaine époque fixe. C'étaient des fonctions du temps.

Cette idée de fonction est en soi tout à fait naturelle, simple, et un enfant la saisira aisément si on met quelque soin à la lui présenter, en employant le plus possible des exemples. Quand une grandeur Y dépend d'une grandeur X, et quand elles sont l'une et l'autre mesurables, la première est une fonction de la seconde.

Les graphiques ont pour but de représenter aux yeux les fonctions, par des figures dont la construction repose invariablement sur le même principe. Voici comment.

Prenons, sur un papier quadrillé (fig. 85) deux lignes perpendiculaires OX, OY. Pour représenter une valeur particulière x de la quantité variable X, nous porterons sur OX une longueur OP qui soit mesurée par le même nombre que X, en prenant, une certaine unité de longueur. A la valeur x, correspond une valeur particulière y de Y ; nous la représenterons de même en OQ, sur OY, en prenant telle unité de longueur que nous voudrons ; cela fait, nous menons les droites PM, parallèle à OY, et QM, parallèle à OX, qui viennent se couper en un point M ; ce point représente l'ensemble des deux valeurs correspondantes x, y. En construisant ainsi des points, tels que M, autant qu'on voudra, et les joignant par un trait continu, on aura le graphique peignant aux yeux les variations de la fonction Y.

Si la quantité X comporte des valeurs négatives, et que x soit une de celles-là, le point P au lieu d'être à droite de O se trouvera à gauche, sur OX.

Si la quantité Y comporte des valeurs négatives et que y soit une de celles-là. le point Q au lieu d'être au-dessus de O se trouvera au-dessous, sur OY.

Pour deux valeurs quelconques x, y qui se correspondent, c'est-à-dire pour l'ensemble de deux points P, on n'a jamais qu'un seul point M.

Si les points M qu'on obtient ne sont pas très rapprochés les uns des autres, on peut les joindre par des segments de droites ; on n'essaie même pas alors de figurer par une courbe la fonction Y ; mais les points qui montrent ce tracé en segments de droites donnent quand même une idée générale de la manière dont cette fonction varie.

En Algèbre, — on le verra plus tard — on ne fait guère autre chose qu'étudier des fonctions qui peuvent se déterminer par le calcul et qu'on appelle pour cette raison des fonctions algébriques : et le problème fondamental de l'Algèbre consiste à trouver les valeurs de X, telles que deux fonctions Y, Z de X, deviennent égales entre elles. On voit (fig. 85) que si l'on a tracé les deux graphiques (Y), (Z) des fonctions Y, Z, ces lignes se coupent en des points M_1,M_2 ;en menant M_1P_1, M2P2 parallèles, à OY, jusqu'à OX, les longueurs OP1, OP2, donneront donc, avec l'unité adoptée pour mesurer les longueurs sur OX, les deux, nombres x_1, x_2, qu'il s'agissait de trouver.

C'est en ce sens qu'on peut dire que les graphiques permettent de faire de l'Algèbre sans calcul, et même quelque chose de plus, puisque des graphiques ont pu être établis pour des fonctions qui ne sont pas algébriques. Il est juste d'ajouter que tous les résultats qu'on obtient ainsi ne sont obtenus que par à peu près, qu'ils ne sont pas rigoureux. Mais dans la pratique, dans un très grand nombre de cas, si les graphiques sont faits avec soin, cela peut suffire. Il y a donc beaucoup de questions auxquelles s'appliquent avantageusement ces tracés, qui ont en outre l'avantage de parler à l'esprit par l'intermédiaire des yeux, de figurer les choses elles-mêmes. C'est là une qualité précieuse en matière de pédagogie.

Dans les n^{os} suivants, quelques exemples achèveront d'éclaircir la construction et l'emploi des graphiques. Leur application la plus naturelle semble se trouver dans le type de problèmes connus sous le nom de problèmes des courriers : c'est donc à ceux-là que nous nous attacherons surtout, sous diverses formes.

47. LES DEUX MARCHEURS

Voici, sous l'une de ses formes les plus simples, en quoi consiste le problème des courriers : un marcheur part à une heure donnée, d'un endroit donné, avec une certaine vitesse connue. Quelque temps après, un second marcheur, allant à une vitesse plus grande, part dans la même direction, suivant la même route. Quand rencontrera-t-il le premier, et à quelle distance de son point de départ ?

Pour résoudre cette question, et les autres de même nature, il faut voir comment nous établirons le graphique d'un marcheur. Pour cela, sur un papier quadrillé (fig. 86) prenons nos deux droites perpendiculaires OT (sur laquelle nous marquerons les temps) et OY (sur laquelle nous marquerons les distances). Le point O correspondant à midi, par exemple, prenons 2 divisions pour représenter une heure, et marquons sur OT, 1 h, 2 h, 3 h,… ,… De même sur OY, à partir de O, prenons une demi-division pour représenter un kilomètre, et marquons 2 km , 4 km, 6 km,… ,…

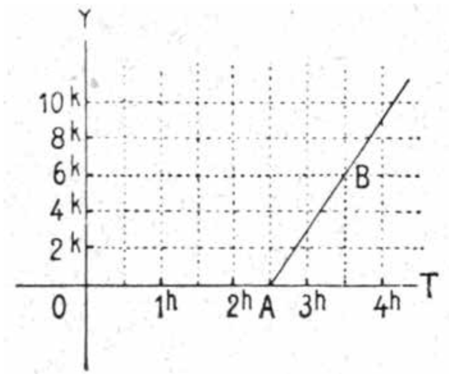


FIG. 86

Si un marcheur part à 2 h et demie avec une vitesse de 6 kilomètres à l'heure, on voit d'abord que le graphique contiendra le point A sur OT ; puis, qu'à 3 h et demie, il aura fait 6 kilomètres ce qui donne le point B ; enfin, comme le marcheur continue à faire constamment 6 kilomètres à l'heure régulièrement, la droite AB sera le graphique cherché. On voit par exemple qu'à 4h il sera rendu à 9 km de son point de départ, et que le simple tracé de la droite AB nous montre à quelle distance se trouve le marcheur à une heure déterminée, et quelle heure il est lorsque le marcheur a parcouru une distance donnée.

Revenons maintenant à notre question, et précisons-la en disant que le premier marcheur a une vitesse de 4 kilomètres à l'heure, et que le 2$^{\text{ème}}$ marcheur part 1 h après lui et a une vitesse de 6 kilomètres à l'heure. Prenons (fig. 87) les mêmes unités que tout à l'heure, et comptons le temps à partir du départ du premier marcheur. Alors la droite OB1 est le graphique du 1$^{\text{er}}$ marcheur, et A2B2 est le graphique du 2$^{\text{ème}}$. Elles se coupent en M, qui correspond à 3h et à 12 kilomètres. La rencontre aura donc lieu à 12 kilomètres du point de départ, et 3h après le départ du 1$^{\text{er}}$ marcheur.

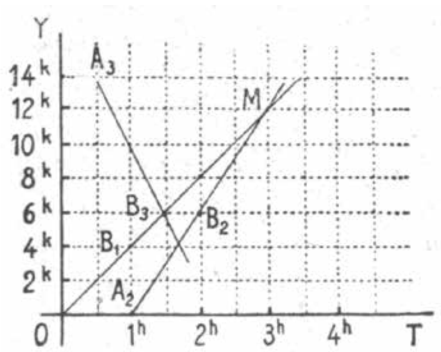


FIG. 87

On peut maintenant compléter le problème, en le compliquant un peu. D'une localité à 14 kilomètres du point de départ, une voiture se met en route, allant au devant des deux voyageurs, c'est-à-dire en sens contraire. Elle part une demi-heure après le 1$^{\text{er}}$ et elle fait 8 km à l'heure. Où rencontrera-t-elle chacun des deux et à quelles heures ?

A_3B_3 est le graphique de la voiture. Cette droite coupe OB, au point B3 qui correspond à 1 h et demie et à 6 km ; cela donne la rencontre avec le 1er marcheur. Le point de rencontre. avec A_2B_2, correspond à environ 1h ¾, plutôt un peu moins, et à 4 km ¼, plutôt un peu plus.

En traitant la question par le calcul on trouverait à peu près 1 h 43 minutes pour le temps et 4 km 286 mètres pour la distance. On voit, malgré les petites dimensions de notre figure 87, combien elle nous donne, à simple vue, des résultats s'approchant de la rigueur, et satisfaisants dans la pratique.

48. DE PARIS À MARSEILLE

Dans les marches de trains entre Paris et Marseille, nous avons, au début de l'année 1905, fait choix du rapide 1, de Paris à Marseille, et du rapide 16, de Marseille à Paris, tous deux de jour, pour en donner les graphiques sur une même figure (fig. 88).

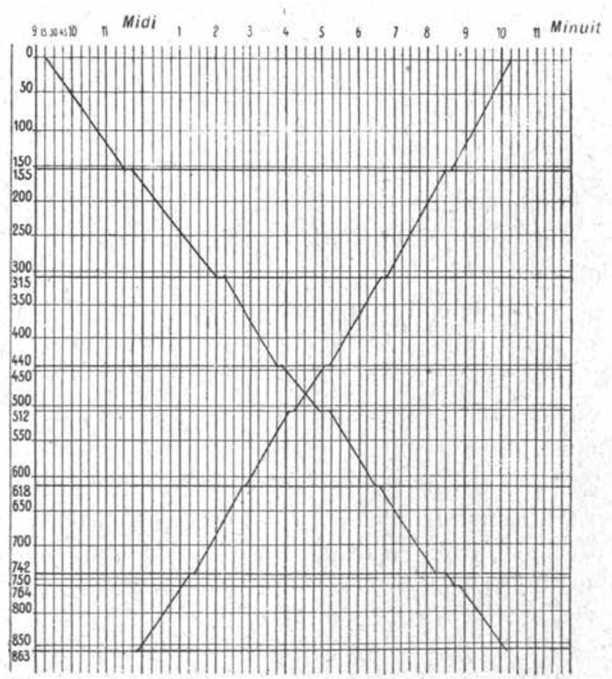


FIG. 88

Pour qu'on puisse faire le rapprochement des diverses circonstances de la marche de ces trains avec la réalité des faits, malgré les dimensions très restreintes de la figure, nous donnons ci-dessous les tableaux des heures précises qui définissent ces marches.

Rapide 1.			Rapide 16.		
	Arr.	Dép.		Arr.	Dép.
Paris		$9^{h}20$ m.	Marseille		$11^{h}53$ m.
Laroche	$11^{h}34$	$11^{h}39$	Avignon	$1^{h}20$	$1^{h}26$ s.
Dijon	$1^{h}59$	$2^{h}15$ s.	Valence	$2^{h}51$	$2^{h}54$
Mâcon	$3^{h}51$	$3^{h}54$	Lyon	$4^{h}08$	$4^{h}14$
Lyon	$4^{h}57$	$5^{h}14$	Mâcon	$5^{h}10$	$5^{h}13$
Valence	$6^{h}39$	$6^{h}42$	Dijon	$6^{h}40$	$6^{h}46$
Avignon	$8^{h}16$	$8^{h}27$	Laroche	$8^{h}31$	$8^{h}36$
Tarascon	$8^{h}45$	$8^{h}53$	Paris	$10^{h}20$ s.	
Marseille	$10^{h}11$ s.				

Nous profiterons de l'occasion pour faire remarquer combien il serait désirable qu'on prit l'habitude d'indiquer les heures, dans les chemins de fer, de 0 à 24, en partant de minuit, afin d'éviter les désignations matin et soir, qui sont une source fréquente de confusions et d'erreurs. Dans quelques pays civilisés, cela se fait déjà ; mais pas encore en France. Il faut espérer que d'ici un siècle ou deux, on sera capable de comprendre qu'il est au moins aussi facile de dire « 17 heures » que « 5 heures du soir ».

Je ne saurais trop recommander de faire construire aux enfants des graphiques de cette nature, en utilisant les indicateurs des chemins de fer, et en choisissant de préférence des régions voisines, des localités qu'ils connaissent déjà, au moins de nom. En se servant de papier quadrillé, et en faisant les tracés à main levée, cela prendra peu de temps, et ce seront de très utiles exercices.

Les lignes à voie unique donneront matière à d'intéressantes remarques sur le tracé des graphiques, pour les croisements de trains qui marchent en sens contraires.

Il y a lieu de remarquer aussi comment un train marchant plus vite qu'un autre peut le dépasser, ce dernier se garant dans une station où il séjourne dans ce but, pendant le temps nécessaire. Nous ne saurions indiquer les mille détails intéressants que suggèrent la construction et l'observation de ces graphiques.

49. DU HAVRE À NEW YORK

Il y a longtemps déjà, au cours d'un Congrès scientifique, et à la fin d'un déjeuner où se trouvaient réunis plusieurs mathématiciens connus, quelques-uns illustres, appartenant à diverses nationalités, Edouard Lucas leur annonça brusquement qu'il allait leur poser une question des plus difficiles. « *Je suppose* — dit-il — (ce n'est malheureusement qu'une supposition) *que chaque jour, à midi, un paquebot parte du Havre pour New York, et qu'en même temps un paquebot de la même compagnie parte de New York pour le Havre. La traversée se fait exactement en sept jours, soit dans un sens, soit dans l'autre. Combien le paquebot qui part du Havre aujourd'hui à midi rencontrera-t-il en route de navires de sa compagnie faisant la route opposée ?* »

Quelques-uns des illustres auditeurs répondirent étourdiment : sept. La plupart gardèrent le silence, paraissant surpris. Pas un ne donna la solution juste, qui apparaît sur la figure 89 avec une entière clarté.

Cette anecdote, *absolument authentique*, contient deux enseignements. Elle montre d'abord combien il faut être indulgent et patient envers les élèves qui ne comprennent pas du premier coup des choses nouvelles pour eux. En plus, elle fait ressortir la haute utilité des représentations graphiques. Si, en effet, le plus ordinaire des mathématiciens avait eu cette notion, la figure 89 se serait construite d'elle-même dans son esprit. Il l'aurait vue et n'aurait pas hésité. Les auditeurs de Lucas, au contraire, ne pensaient qu'aux navires devant partir, et oubliaient ceux déjà en route, raisonnant, mais ne voyant pas.

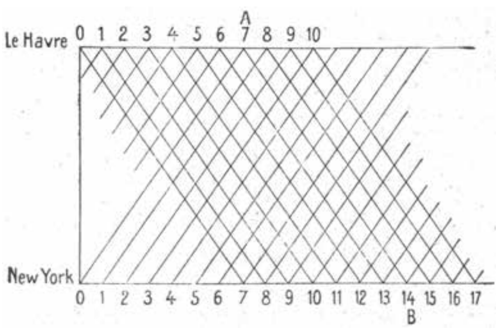


FIG. 89

Il est donc certain que tout paquebot dont le graphique est AB rencontrera en mer 13 navires, plus celui qui entre au Havre à l'instant du départ, plus celui qui part de New-York à l'instant de l'arrivée, soit 15 en tout. Le graphique montre en même temps que les rencontres se feront chaque jour à midi et à minuit.

C'est à Lucas également qu'est dû le problème qu'on trouve dans son *Arithmétique amusante* sous le titre de « *La Ballade de l'escargot rétrograde* », formulé ainsi :

« *Un escargot se lève un dimanche à six heures du matin et monte le long d'un arbre ; pendant le jour, c'est-à-dire jusqu'à six heures du soir, il monte de cinq mètres ; mais pendant la nuit, il descend de deux mètres. A quelle époque sera-t-il monté de neuf mètres ?* »

C'est encore un problème de courriers (de courriers lents). Un enfant étourdi répondra : mercredi matin ; ce qui est faux. Je laisse à mes lecteurs et surtout à leurs élèves le plaisir de trouver la solution, en construisant le graphique de la marche de l'escargot rétrograde.

50. LE TEMPS QU'IL FAIT

Nous donnons ici (fig. 90) deux graphiques à la fois, l'un relatif a la pression barométrique, l'autre à la température, pendant la dernière semaine de l'année 1881. Nous les empruntons au journal *La Nature*, mais en enlevant, pour simplifier, diverses autres indications.

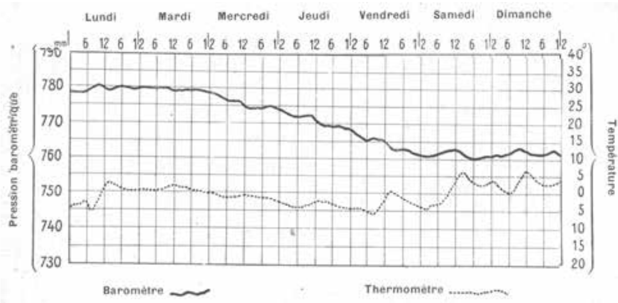


FIG. 90

Ici, nous voulons seulement montrer comment les variations de fonctions sur lesquelles on n'a d'autres données que celles de l'expérience sont heureusement représentées par la méthode graphique.

II nous parait intéressant aussi de montrer comment deux fonctions différentes peuvent être représentées a la fois sur une même figure avec une entière clarté.

La ligne des variations du baromètre est dessinée par un trait plein ; celle des variations du thermomètre par un trait pointillé.

Pour lire les pressions barométriques, il faut se reporter a la gauche de la figure, et pour lire les températures, à la droite.

Aucune confusion n'est possible.

Ces graphiques ont rendu les plus grands services en météorologie et ils ont largement contribue à répandre cette science si utile, qui n'en est encore qu'a ses débuts, mais qui progresse chaque jour.

51. DEUX CYCLISTES POUR UNE BICYCLETTE

Deux bicyclistes ayant entrepris un voyage, l'un d'eux se trouve démuni de sa machine, qu'il ne pourra retrouver qu'au bout d'un certain temps, une fois les réparations faites. En attendant, ils ont résolu de ne pas interrompre leur voyage. Dans ce but, ils le poursuivront en allant, tantôt à pied, tantôt à bicyclette, de la façon suivante. Ils partiront ensemble, l'un sur la machine, l'autre à pied. A un certain point, le bicycliste déposera sa machine dans un fosse sur le bord de la route, et continuera la route à pied. Son compagnon, arrive à l'endroit convenu, montera la machine et rejoindra l'autre. A cet instant, ils changeront de nouveau et pourront continuer suivant le même procédé.

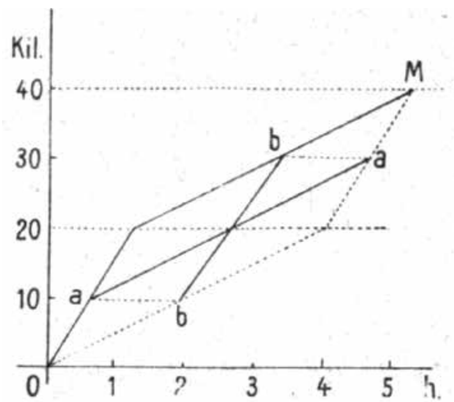


FIG. 91

Aujourd'hui, ils ont seulement 40 km à faire ; à bicyclette, chacun d'eux fait 15 km à l'heure, et à pied, 5 km. A quel endroit la machine doit-elle être mise de côté par le premier voyageur, en supposant qu'on ne fasse plus d'autre échange, de façon que les deux voyageurs arrivent ensemble à destination ?

La réponse est évidente. Comme chacun doit faire la même route à pied, et à bicyclette, pour arriver en même temps, c'est évidemment à moitié route, soit à 20 km du point de départ que la machine doit être déposée.

La figure 91 nous donne alors les graphiques des marches des deux voyageurs, le premier en trait plein, le second en pointillé. Pour faciliter le langage, supposons que le départ ait lieu à midi. Le bicycliste arrive à moitié route à 1 heure 20 minutes ; il laisse la machine de côté et continue à pied ; il lui reste 20 km à faire et il arrivera à 5 h 20 minutes.

Son compagnon, parti à pied, arrive à 4 h à moitié route. Il monte alors sur la bicyclette et arrive également à 5 h 20 minutes.

En somme, ils ont tous deux mis 5 h 20 minutes pour faire 40 km, ce qui représente 7 km 5 à l'heure. C'est, on le voit, un mode de locomotion qui fait gagner sensiblement sur la vitesse d'un piéton, et qui peut être recommandable pour deux jeunes gens ayant eu juste de quoi se procurer une seule machine, en mettant en commun leurs économies.

Pour que le procédé soit vraiment pratique, il faut, à moins que le pays soit très désert ou d'une honnêteté exceptionnelle, rendre assez fréquents les échanges de la machine, afin qu'elle ne reste pas trop longtemps abandonnée sur le bord de la route. Sur la figure 91 elle-même, nous avons indiqué cette variante ; en supposant que la machine soit abandonnée à 10km, puis à 30 du point de départ, OaaM serait alors le graphique de l'un des voyageurs, et ObbM serait celui de l'autre. Ici les deux compagnons se rejoignent à moitié route ; mais le cycliste continue, dépassant l'autre. Les graphiques rendent compte de toutes ces circonstances.

Ils s'appliqueraient également à deux voyageurs n'ayant pas les mêmes vitesses moyennes, soit comme piétons, soit comme bicyclistes. On résoudrait aisément ainsi des questions qui se prêtent au calcul sans grande difficulté, mais qui alors exigent des connaissances mathématiques que nous ne supposons pas ici, même dans la moindre mesure.

52. LA VOITURE INSUFFISANTE

Quatre voyageurs (M. et Mme Arnaud, M. et Mme Bernard) arrivant un matin en chemin de fer à la gare de X…, avaient projeté de se rendre le jour même à Y…, petite ville distante de 63 km, où ils se proposaient d'arriver pour l'heure du dîner. On les avait prévenus qu'ils pourraient trouver à louer une automobile, qui les conduirait rapidement, par une belle route. Le renseignement était exact ; seulement l'unique voiture disponible de la localité n'avait que deux places, en dehors de celle du chauffeur. Sa vitesse était de 30 km à l'heure.

Vous voyez l'embarras. Nos voyageurs ne se piquaient pas d'être des marcheurs émérites ; ils pouvaient modestement faire 4 km à l'heure. Il fut convenu que deux d'entre eux, le ménage Arnaud (appelons-les pour abréger les voyageurs A), partiraient en automobile, et qu'en même temps M. et M^me^ Bernard (les voyageurs B) se mettraient en route à pied. A une certaine distance, la voiture déposerait les A, qui continueraient la route à pied, reviendrait en arrière au devant des B, les prendrait et les conduirait à destination. Comment s'arranger pour que tout le monde arrive en même temps ? Combien de temps aura-t-on mis en tout pour faire le voyage ?

Questions pas bien embarrassantes, mais qu'il était utile de pouvoir cependant résoudre.

Ce problème, sauf des changements insignifiants dans les données, a été posé dans quelques concours. Il a une certaine analogie avec celui du numéro précédent, mais présente en plus une petite complication, résultant de ce que la voiture doit revenir en arrière chercher les voyageurs B.

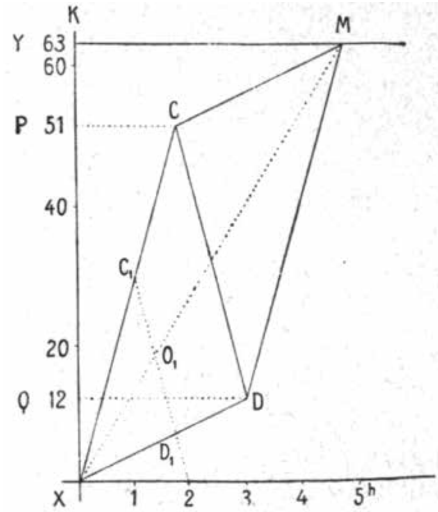


FIG. 92

Si on désigne par P l'endroit de la route où la voiture dépose les A, par Q celui où elle rejoint les B, les quatre points X, Q, P, Y sont échelonnés dans cet ordre ; les A vont de X à P en automobile, de P à Y à pied ; les B vont de X à Q à pied, de Q à Y en automobile. Pour que tout le monde arrive en même temps, il faut donc que XP = QY, et XQ = PY, ce qui en résulte ; et par conséquent, comme tout à l'heure, le graphique de la marche des A et celui de la marche des B formeront à eux deux un parallélogramme (fig. 92). Mais tandis que dans la figure 91 la diagonale de ce parallélogramme était parallèle à l'axe sur lequel sont portés les temps, la bicyclette restant immobile dans le fossé, ici il en sera tout autrement. La diagonale CD ne sera autre que le graphique de la marche de l'automobile, lorsqu'elle revient au devant des voyageurs B.

Sur cette figure 92, XCM représente donc la marche des A, XDM celle des B, et XCMD est un parallélogramme. Cette remarque fournit le moyen de construire très facilement la figure. Il suffit pour cela de construire tout d'abord les deux droites XC et XD, ce qui se fait tout de suite puisqu'on a la vitesse de l'automobile (30 km par heure) et celle des piétons (4 km par heure). Prenant alors un point C1 quelconque sur XC, par exemple celui qui correspond à 1 heure et 30 kilomètres, on mène C1D1 qui représente le graphique de retour de l'automobile, si elle revenait e,n arrière à partir de C_1 ; cette droite coupe en D_1 la droite XD. On prend le milieu O_1 de C_1D_1 et en joignant X et O, la droite XO, menée jusqu'au point M qui correspond à une distance de 63 km, nous donnera l'extrémité M des deux graphiques ; on mènera alors MC parallèle à XD, MD parallèle à XC ; le parallélogramme sera complètement dessiné, et XCDM représentera le graphique de l'automobile. On voit alors sur la figure que D correspond à 3 h et 12 km, C à environ 1 h ¾ et 51 km, M à 4 h ¾ et naturellement, à 63 km.

En conséquence, l'automobile devra déposer les A à 51 km ; il sera environ 1 h ¾ ; elle reviendra rejoindre les B, qu'elle trouvera à 3 h, à 12 km du point de départ, et elle arrivera à destination à 4 h 45 mn, en même temps que les A.

Un calcul précis donnerait 4 h 42 minutes au lieu de 4 h 45 minutes. On voit que la différence est bien faible dans la pratique.

En résumé, les voyageurs ont dû faire 51 km en automobile et 12 km à pied, et le trajet total s'est effectué en 4 h 42 minutes. La vitesse moyenne est à peu près de 13 km 400, c'est-à-dire qu'on arrive à destination à la même heure que si on avait fait tout le trajet dans une voiture ayant une vitesse de 13 km 400 à l'heure. Les voyageurs — les A comme les B — en marchant pendant 3 heures, auront fait 12 km et le reste en automobile ; quant à l'automobile, elle aura parcouru en tout 141 km, savoir : 51 en avant, 39 en rétrogradant, et 51 encore en avant.

Cet exemple, traité avec quelque détail, pourra servir de thème à autant d'exercices analogues qu'on voudra, en prenant d'autres données.

53. LE CHIEN ET LES DEUX VOYAGEURS

Deux piétons parcourent une route en allant dans le même sens. Le premier, A, a 8 km d'avance sur l'autre et fait 4 km à l'heure ; le second, B, fait 6 km à l'heure. L'un des deux voyageurs a un chien, qui à l'instant précis dont nous partons, court jusqu'à l'autre voyageur avec une vitesse de 15 km à l'heure, puis revient aussitôt vers son maître ; l'ayant rejoint, recommence le même manège, et continue ainsi jusqu'à ce que les deux voyageurs se rencontrent, en oscillant de l'un à l'autre. Il s'agit de savoir quel chemin aura parcouru l'animal, jusqu'à la rencontre.

Il semble que la question peut se poser de deux façons, suivant que le chien appartient à l'un des piétons ou à l'autre. Dans la figure 93, on compte les temps à partir de l'instant où le chien est lâché. Les graphiques des deux voyageurs sont OM et 8M, et le point M, qui représente la rencontre, correspond à 24 km et à 4 h de marche. Si le chien appartient au voyageur qui est en arrière, son graphique est O*aa*… ligne en zigzag qui oscille entre les graphiques des marches des deux piétons. S'il appartient au voyageur qui est en avant, son graphique est 8*bb*… ligne de même nature, mais différente de la première. Dans les deux

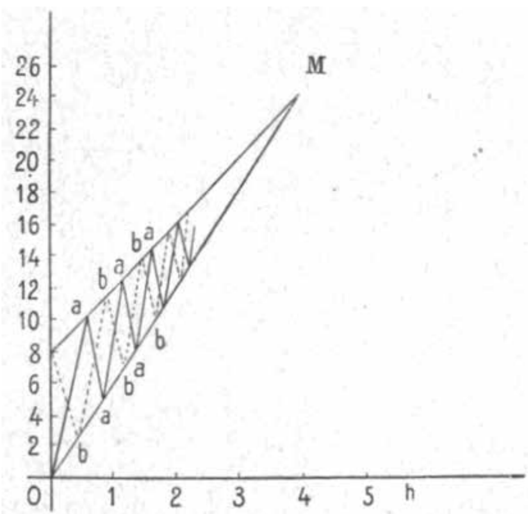


FIG. 93

cas cependant, l'animal n'a cessé de courir pendant 4 heures, et comme il fait 15km à l'heure, il aura de la sorte parcouru 60 km. On voit donc que dans les deux hypothèses, le résultat sera le même.

Nous avons pris des données exceptionnellement simples, pour rendre plus aisées les explications. Il conviendra de les varier, dans les exercices qui pourront être proposés à ce sujet. On pourra aussi bien supposer que les voyageurs marchent à la rencontre l'un de l'autre, et non plus dans le même sens.

54. LA PIERRE QUI TOMBE

Dans les graphiques de marche que nous avons vu jusqu'ici, qu'il s'agisse de piétons, de voitures, de trains de chemin de fer, de chiens, le chemin parcouru dans un temps donné, dans une seconde par exemple, était toujours le même, et il s'ensuivait que le graphique était une ligne droite. On exprime encore cela en disant que la vitesse était constante ou que le mouvement était uniforme.

Il n'en est plus de même pour le mouvement d'une pierre qu'on lâche à une certaine hauteur, et qu'on laisse tomber. L'expérience apprend, si l'on ne tient pas compte de la résistance que l'air oppose au mouvement, qu'au bout d'une seconde, la pierre aura tombé d'environ 4 m 90. Au bout de 2 secondes, elle aura parcouru 19 m 60, au bout de 3 secondes, 44 m 10.

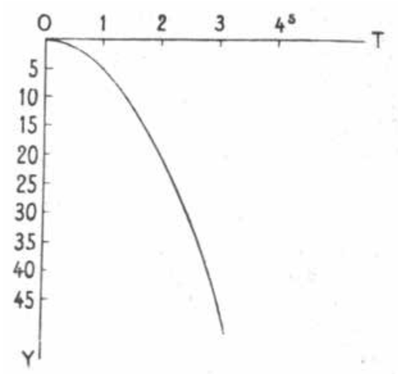


FIG. 94

Cela nous montre que le graphique de ce mouvement (fig. 94) aura la forme d'une courbe, et non plus d'une ligne droite. Cette courbe sera à peu près celle indiquée sur la figure. C'est un fragment d'une ligne dont on dira plus loin quelques mots et qu'on appelle la *parabole*.

En écrivant la formule $y = 4{,}9 \times t^2$, on a la distance y parcourue par la pierre dans sa chute, quand elle a tombé pendant un certain temps t, pourvu que le temps soit mesuré en prenant la seconde pour unité ; alors le nombre y qu'on obtiendra sera un nombre de mètres.

Par exemple, en 1/10 de seconde, la pierre lâchée ne tombe que de 49 millimètres, et comme nous venons de le dire, au bout d'une seconde, elle est rendue à 4 m 90. En 10 secondes, elle aurait parcouru 490 mètres. On voit ainsi qu'elle va de plus en plus vite ; on dit que son mouvement est accéléré.

Pour tomber d'une hauteur de 300 m, soit du sommet de la Tour Eiffel jusqu'à terre, il faudrait à une pierre un peu moins de 8 secondes, environ 7 secondes 8 dixièmes, en supposant toujours qu'on ne tienne pas compte de la résistance de l'air. En pratique cette résistance ne compte que fort peu pour de petites hauteurs, mais elle devient très appréciable lorsque la chute se prolonge, et il ne faudrait pas croire qu'alors notre graphique représente la réalité des choses.

55. LA BALLE DE BAS EN HAUT

Si on lance une balle de plomb à la main, de bas en haut, elle s'élèvera jusqu'à une certaine hauteur, puis retombera ensuite. En suivant l'objet des yeux avec une certaine attention, il n'est pas difficile de constater que le mouvement se ralentit de plus en plus, tant que l'ascension se produit, tandis qu'au contraire pendant la descente de la balle, celle-ci va de plus en plus vite. Dans la première période, le mouvement est retardé, et dans la seconde il est accéléré.

Qu'au lieu de se servir de la main, on emploie un instrument, et par exemple une arme à feu dont le canon serait bien vertical, et toutes les mêmes circonstances se produiront. Seulement, plus on aura lancé la balle avec une grande vitesse, plus elle s'élèvera, et plus il s'écoulera de temps avant qu'elle retombe à terre.

Il est intéressant de connaître les diverses circonstances du mouvement, c'est-à-dire de savoir, notamment : à quelle hauteur la balle s'élèvera ; combien il lui faudra de temps pour arriver à cette hauteur : combien il lui en faudra pour descendre.

Lorsqu'on connaît la vitesse *a* avec laquelle on a lancé la balle, et qu'on appelle *vitesse initiale*, toutes les réponses à ces questions sont données par la formule.

$$y = at - 4{,}9 \times t^{2}.$$

Pour comprendre ce qu'elle signifie, et en faire usage au besoin, il faut savoir :

1° que la hauteur y est mesurée en mètres ;

2° que la vitesse initiale a est mesurée en mètres à la seconde : c'est-à-dire que la balle est lancée de telle sorte que si rien ne la ralentissait, elle ferait indéfiniment a mètres par seconde ;

3° que le temps t est mesuré en secondes.

Si simples que puissent être les calculs auxquels conduit cette formule, on se rendra encore plus exactement compte du mouvement, au moyen d'un graphique (fig. 95).

Il a été construit en supposant que $a = 20$, c'est-à-dire que la balle est lancée de telle sorte qu'elle ferait 20 mètres par seconde, si rien ne venait s'opposer à son mouvement.

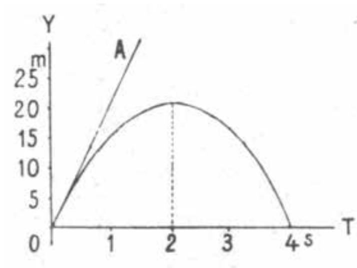


FIG. 95

Si on construit la droite OA qui serait le graphique de ce mouvement uniforme de 20 mètres par seconde, il y a un moyen très simple d'obtenir celui que nous cherchons :

c'est, reprenant la figure 94, de porter exactement les mêmes hauteurs, pour 1 seconde, 2 secondes, 3 secondes etc., mais au-dessous de OA (fig. 95) au lieu de les porter au-dessous de OT (fig. 94).

Un autre moyen, c'est de se servir de la formule ci-dessus $at - 4{,}9 \times t^2$, pour avoir chaque valeur de y.

De toutes façons, on verra, dans l'hypothèse que nous avons faite $a = 20$, que la balle s'élèvera pendant 2 secondes et 4 centièmes environ, qu'elle atteindra une hauteur de 20 m 40 et qu'elle mettra encore 4 secondes et 4 centièmes pour redescendre. La ligne obtenue a encore ici la forme d'une parabole.

D'une manière générale, le temps employé à la descente sera toujours le même que celui employé à la montée. Et la hauteur à laquelle la balle s'élève est toujours $\frac{a^2}{19{,}6}$ exprimée en mètres.

Ici comme dans le n° précédent, il est bien entendu qu'on ne tient pas compte de la résistance de l'air, qui cependant pour des vitesses initiales un peu fortes aurait une action sensible, aussi bien à la montée qu'à la descente.

56. LES TRAINS DU MÉTRO

Le chemin de fer métropolitain de Paris présente des conditions d'exploitation toutes spéciales, imposées par les obligations d'un service de voyageurs dans une grande ville. D'abord, les stations sont extrêmement rapprochées ; en général de quelques centaines de mètres seulement. En outre, les trains se succèdent à de courts intervalles de temps ; il en résulte que l'arrêt d'un train à chaque station doit être réduit à la plus faible durée possible.

Dans de telles conditions, une bonne partie du temps nécessaire pour aller d'une station à la station suivante est employé, au départ, à accélérer le mouvement ; puis, un peu avant d'arriver, à le retarder, en faisant usage des freins ; car en voulant s'arrêter trop brusquement, des accidents s'ensuivent.

On pourrait dire qu'il en est de même pour tous les trains de chemins de fer. C'est en partie vrai ; mais comme les distances entre deux stations sont assez grandes, les périodes de mise en marche et de freinage comptent pour bien peu de chose dans l'ensemble. C'est pour cela qu'on peut, sans s'éloigner de la vérité pratique, représenter par une ligne droite le graphique de la marche d'un train entre deux stations.

La marche d'un train du métropolitain est donc intéressante, en raison de ces particularités, et de la forme du graphique correspondant, qui est représenté par la figure 96.

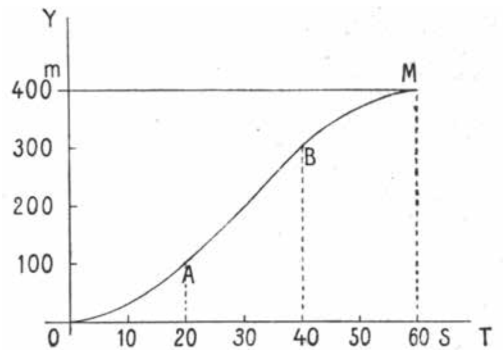


FIG. 96

Pour établir ce graphique, nous avons supposé deux stations distantes de 400 m l'une de l'autre, une vitesse de pleine marche de 36 kilomètres à l'heure, ce qui correspond à 10 m par seconde[22] ; enfin on

22. Une remarque pratique, intéressante et fort utile, consiste en ce qu'on passe de la vitesse en kilomètres à l'heure à celle en mètres à la seconde, en multipliant par $\frac{5}{18}$. Ici $36 \times \frac{5}{18} = \frac{180}{18} = 10$.

admet qu'il faut 20 secondes, en partant du repos, pour arriver à prendre toute sa vitesse ; et qu'il faut également une période de 20 secondes de freinage pour s'arrêter progressivement.

Avec ces données qui correspondent à celles de l'exploitation réelle, un train partant du repos, marche d'abord d'un mouvement accéléré, à la manière d'une balle qui tombe, venant d'être lâchée ; il parcourt ainsi 100 m pendant 20 secondes ; il file alors en pleine marche, à 10 m par seconde pendant 20 secondes, et parcourt ainsi 200 m alors il serre les freins, marche d'un mouvement retardé, parcourt 100 m en 20 secondes, et s'arrête. Il est alors à la station qu'il s'agissait d'atteindre, et il a mis une minute, ou 60 secondes pour effectuer son parcours.

Le graphique (fig. 96) rend compte de toutes ces circonstances ; de O en A, c'est la période de mise en marche (100 m en 20 secondes) ; de A en B, la période de pleine marche (200 m en 20 secondes) ; et de B en M la période de freinage pour arriver à l'arrêt (100 m en 20 secondes).

Il suffit de regarder la figure pour sse rendre compte de l'importance des périodes de mise en marche et de freinage sur d'aussi faibles parcours. Si deux stations étaient distantes de 200m, au lieu de 400m, la

---

Réciproquement, on passe de la seconde à la première en multipliant par $\frac{18}{5}$ ou $\frac{36}{10}$. Il suffit pour cela d'enlever $\frac{1}{10}$ et de multiplier par 4 ; ainsi un train qui ferait 30 m à la seconde aurait une vitesse de 108 kilomètres à l'heure ; car $30 - 3 = 27$; et $27 \times 4 = 108$.

période de pleine marche disparaîtrait complètement, et il faudrait 40 secondes pour parcourir ces 200 m.

57. GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

L'idée générale qui préside à la construction de tout graphique a été indiquée au n° 46 et appliquée sous diverses formes dans les n° suivants. Elle consiste, rappelons-le, ayant tracé deux droites perpendiculaires OX, OY, à porter sur OX une longueur x = OP, sur OY une longueur y = OQ et à déterminer un point M en menant par P et Q des parallèles à OY et OX qui se coupent en ce point M.

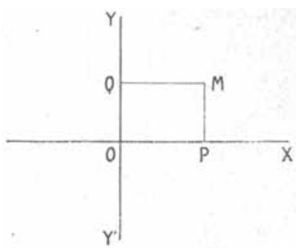


FIG. 97

Si y est la valeur d'une fonction de x qu'on veut représenter, la ligne obtenue en unissant tous les points M qu'on a construits représentera les variations de la fonction y.

Au prix de quelques dénominations nouvelles, nous allons retrouver là tout ce qui est à la base d'une science importante et très utile, la *Géométrie analytique*, due au génie de Descartes[23].

Et il faut bien ajouter que sans la Géométrie analytique, on n'aurait sans doute pas imaginé les graphiques.

Les deux droites OX, OY (fig. 97) s'appellent des *axes coordonnés*. OX est l'axe des x, ou l'axe des *abscisses*. OY, l'axe des y, ou l'axe des *ordonnées*.

OP = x et OQ = y sont les coordonnées du point M ; OP est *l'abscisse de M* et OQ *son ordonnée.*

Une abscisse négative serait portée dans la direction OX', une ordonnée négative dans la direction OY'.

Il en résulte que si un point, comme sur la figure, est dans l'angle XOY, son x et son y sont positifs ;

s'il est dans l'angle YOX', son x est négatif, son y est positif : X'OY', son x et son y sont négatifs ; Y'OX, son x est positif, son y négatif.

Si on marque un point sur le plan de la figure, ses deux coordonnées s'ensuivent. Si on donne deux coordonnées quelconques, la position du point correspondant s'ensuit.

Si les deux coordonnées x, y sont, non pas quelconques, mais liées entre elles par une relation algébrique, c'est-à-dire de telle sorte qu'une des coordonnées étant connue, l'autre s'en puisse déduire par

23. René DESCARTES, illustre philosophe et savant français, né à la Haye en Touraine (1596-1650).

des opérations de calcul bien définies, le point M alors décrira une ligne. On dira que la relation algébrique en question est *l'équation de la ligne*.

- Construire une ligne, et trouver ses propriétés, connaissant son équation ;
- Trouver l'équation d'une ligne, quand elle a été définie d'une manière bien précise par un moyen quelconque ;

Tels sont les deux grands problèmes généraux dont s'occupe la Géométrie analytique.

Nous n'avons pas l'ambition d'apprendre quoi que ce soit en ce moment, en Géométrie analytique. Mais il n'était pas inutile de remarquer qu'en construisant nos divers graphiques, nous avons fait un peu de *Géométrie analytique* sans nous en douter, avant de connaître même le nom de cette science. Il était bon aussi de profiter de cette occasion pour saluer en passant la mémoire d'un des plus grands génies dont ait le droit de s'enorgueillir l'humanité.

C'est depuis l'invention de la Géométrie analytique que l'étude des lignes courbes a fait d'immenses progrès, grâce aux ressources nouvelles qu'apportait cette science.

Trois de ces lignes courbes, cependant (et aussi quelques autres), avaient été étudiées dans l'antiquité par les géomètres grecs, avec le seul secours de la Géométrie. L'esprit reste confondu quand on considère quelle puissance intellectuelle, quels prodigieux efforts cérébraux il a fallu à ces savants, il y a une vingtaine de siècles et plus, pour arriver aux découvertes dont nous profitons encore.

Les trois lignes dont nous voulons parler sont encore aujourd'hui d'un usage continuel, même dans les applications.

C'est ce qui nous détermine à en dire quelques mots dans les numéros qui suivent, non pas pour les étudier, bien entendu, mais pour qu'on sache simplement ce que c'est, et pour qu'on puisse entrevoir quel plaisir et quel intérêt on prendra plus tard à leur étude.

58. LA PARABOLE

Nous l'avons déjà rencontrée, cette courbe, dans les graphiques de la pierre qui tombe, de la balle lancée de bas en haut, et dans une partie du graphique des trains du Métro. Quand, en nous promenant dans la campagne, il nous arrive d'apercevoir un pont suspendu, la forme courbe qu'affectent les câbles du pont est celle d'une parabole.

La définition précise de la parabole consiste (fig. 98) en ce que chacun de ses points M est à égale distance d'un point donné F, et d'une droite donnée (D), en sorte que MF = MP. La courbe a alors la forme indiquée par la figure ; si par F, qu'on appelle *foyer de la parabole*, on abaisse une perpendiculaire sur la droite (D) nommée *directrice*, cette droite FY est *l'axe* [de symétrie, MD] de la courbe ; cette dernière a la même forme d'un côté et de l'autre de cet axe. L'axe coupe la courbe en A, à moitié distance entre le foyer F et la directrice. Le point A est le *sommet* de la parabole.

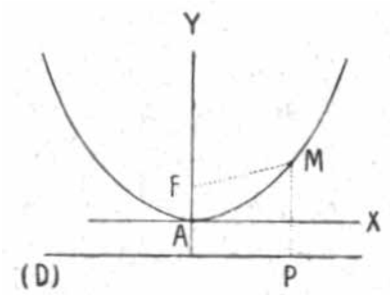


FIG. 98

Si l'on prenait AY pour axe des ordonnées, et une perpendiculaire AX pour axe des abscisses, l'équation de la parabole serait $y = kx^2$.

59. L'ELLIPSE

Beaucoup d'arches de ponts ont la forme d'une demi-ellipse. Quand on coupe obliquement, avec un couteau, une carotte de forme un peu régulière, la section est une ellipse. En éclairant un disque rond, par exemple une pièce de monnaie, avec une lampe, et en projetant l'ombre sur une feuille de papier blanc, cette ombre est encore une ellipse.

L'Astronomie enfin nous apprend que toutes les planètes, et la nôtre en particulier, tournent autour du Soleil en décrivant des ellipses.

On définit l'ellipse par cette propriété que la somme des distances d'un de ses points à deux points donnés F, F' est constante ; F, F' sont les *foyers* de l'ellipse. De là un moyen de tracer une ellipse sur un sol sablonneux en fixant deux piquets en F, F', et y attachant par les deux bouts un cordeau dont la longueur a été donnée, on tend ce cordeau au moyen d'une pointe de fer M ; si on promène cette pointe, sur le sol en gardant toujours le cordeau bien tendu, elle tracera l'ellipse ; ce procédé est connu sous le nom de « *tracé des jardiniers* ».

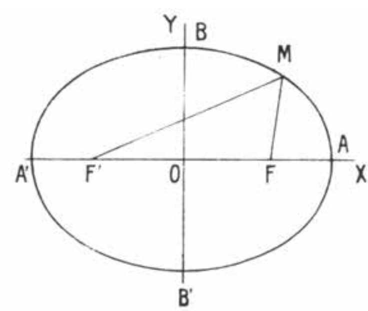


FIG. 99

On voit (fig. 99) que l'ellipse est une courbe fermée ; la droite FF' s'appelle *axe focal* ou *grand axe* : le milieu O de FF' est le *centre* ; la perpendiculaire OY à FF' est le *petit axe* ; la courbe a une forme exactement pareille au-dessus et au-dessous du grand axe, à droite et à gauche du petit axe.

Le grand axe coupe la courbe en deux points A, A' ; le petit en B, B' ; les 4 points A, A', B, B' sont les sommets de l'ellipse. On voit facilement que la longueur constante MF + MF' est égale à A'A ou 2 OA ; on l'appelle la *longueur du grand axe* ; la *longueur du petit axe* est BB' ou 2 OB.

Si les deux points F, F' étaient confondus en un seul, en O, alors l'ellipse deviendrait un cercle et on aurait OA = OB.

Si on prenait OA et OB pour axes des x et des y, l'équation de l'ellipse serait, en appelant a la longueur OA et b la longueur OB.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

L'équation du cercle, si b devient égal à a, est $x^2 + y^2 = 1$.

60. L'HYPERBOLE.

Bien que cette courbe soit fort importante aussi, on en voit moins facilement des exemples usuels que pour les deux précédentes. Cependant si un abat-jour circulaire étant adapté sur une lampe, on le place de telle sorte que la lumière soit au-dessous, et si l'on regarde l'ombre que porte alors le bord inférieur de l'abat-jour sur un mur vertical, c'est un fragment d'hyperbole.

L'hyperbole se trouve définie par cette propriété que la différence des distances de l'un quelconque de ses points à deux points fixes F, F', qu'on appelle *foyers*, est constante,

Comme tout à l'heure pour l'ellipse, la droite FF' (fig. 100) et la perpendiculaire OY élevée sur le milieu de FF' sont les axes de la courbe. Celle-ci est de même forme au-dessus et au-dessous de FF', à droite et à gauche de OY. L'axe FF' coupe la courbe en deux points A, A', qui sont les *sommets* ; on l'appelle *axe transverse* ; l'axe OY ne rencontre pas la courbe. Le segment A'A a une longueur égale à la différence constante des distances d'un point de la courbe à F et à F'.

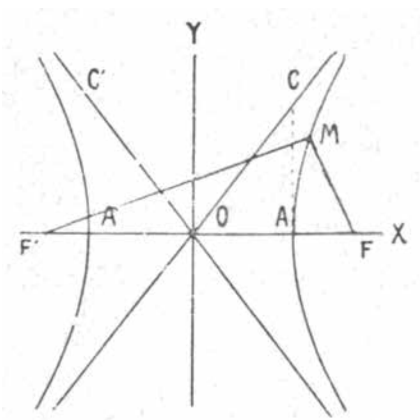


FIG. 100

Ce que nous voyons apparaître ici de nouveau, c'est que la courbe, qui peut d'ailleurs s'étendre aussi loin qu'on voudra, se compose de deux parties, de deux branches, comme on dit, complètement séparées l'une de l'autre.

Il faut noter l'existence de deux droites OC, OC' qu'on appelle les *asymptotes* et qui sont telles qu'en les prolongeant et prolongeant aussi la construction de la courbe, on verra la courbe et la droite se rapprocher l'une de l'autre, indéfiniment, sans jamais se confondre. On peut construire aisément les asymptotes, en sachant que le point C est tel que CA est perpendiculaire à FF', et que OC = OF. Si OA = a, OC il s'ensuit que $AC^2 = c^2 - a^2$; en posant AB = b, et en prenant OA, OY pour axes des x et des y, l'équation de l'hyperbole serait :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ce qu'il faut surtout retenir de ces indications ultra-sommaires sur les trois courbes très importantes dont nous venons de parler , c'est qu'elles peuvent fournir matière à des constructions nombreuses et variées, et contribuer à faire acquérir l'habileté de main nécessaire dans le tracé des courbes géométriques. Là encore il faudra, successivement ou alternativement, faire usage du papier quadrillé, des instruments usuels de dessin , des croquis à main levée, etc.

61. LE SEGMENT PARTAGÉ

Soit AB un segment de droite que nous supposons prolongé dans les deux sens (fig. 101) et M un point mobile sur la droite AB. Si le point M est placé par exemple entre A et B, il partage AB en deux segments AM, MB, et c'est le rapport $y = \frac{AM}{MB}$ de ces deux segments que nous voulons étudier. Il varie évidemment suivant la position de M.

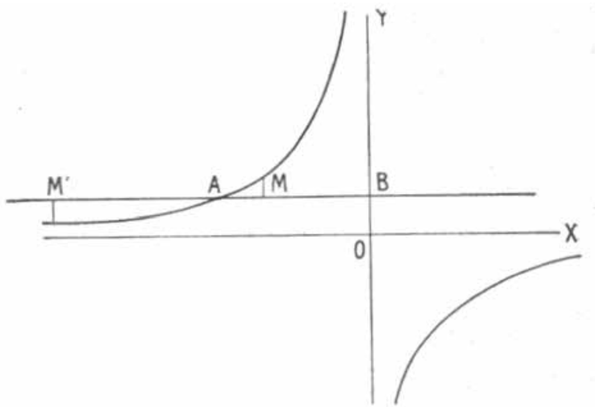


FIG. 101

Plaçons d'abord M en A; le rapport est nul puisque MA est nul; si M se promène de A vers B, le rapport augmente; quand M est au milieu de AB, le rapport y est égal à 1; quand M s'approche de B, y prend des valeurs qui deviennent de plus en plus grandes, et on dit que lorsque M arrive en B, le rapport est infini, ce qui n'est qu'une manière de parler.

Si maintenant M dépasse un, peu le point B, AM sera toujours positif, MB sera négatif, et très petit ; donc y, c'est-à-dire $\frac{AM}{MB}$ sera négatif et très grand ; M s'éloignant de plus en plus de B, le rapport restera négatif, sa grandeur diminuera, en restant toujours plus grande que 1, mais en se rapprochant de 1 de plus en plus.

Si maintenant, ayant toujours placé le point M en A, nous le faisons mouvoir vers la gauche, le rapport MB devient encore négatif ; sa grandeur est plus petite que 1, et elle se rapproche de 1 de plus en plus, à mesure que M s'éloigne de A.

En représentant, pour chaque position du point M, la valeur du rapport y par une ordonnée élevée perpendiculairement à la droite AB, nous obtenons, comme graphique représentant les variations de ce rapport, la courbe représentée sur la figure 101 ; cette courbe est une hyperbole, dont les asymptotes sont BY, perpendiculaire à AB, et OX, parallèle à AB, à une distance marquée par l'unité, et au-dessous, c'est-à-dire dans le sens négatif.

La forme même de la figure montre qu'il n'y a pas deux points M pour lesquels le rapport $\frac{AM}{MB}$ puisse être le même.

Dès qu'on donne la valeur y de ce rapport, avec son signe, la position précise de M est déterminée sur la droite AB.

62. DO, MI, SOL; HARMONIES GÉOMÉTRIQUES

Sur la figure 101, avons-nous dit, il ne peut pas exister deux points M différents tels que le rapport $\frac{AM}{MB}$ soit le même. Mais étant donné un point M, on peut en trouver un autre M' et un seul, tel que les deux rapports $\frac{AM}{MB}$, $\frac{AM'}{M'B}$ aient même grandeur. Puisqu'alors les signes sont contraires, on a donc $\frac{M'A}{M'B} = \frac{AM}{BM}$. Lorsque quatre points M', A, M, B sont tels, sur une même droite, qu'il en soit ainsi, on dit qu'*ils forment une division harmonique.*

Le mot peut paraître étrange. Avant de l'expliquer, nous allons écrire la proportion $\frac{M'A}{M'B} = \frac{AM}{BM}$ un peu différemment; appelons *a, m, b*, les segments M'A, M'M, M'B.

Alors AM = $m - a$, MB = $b - m$, et la relation devient

$$\frac{a}{b} = \frac{m-a}{b-m} \text{ ou encore } \frac{m-a}{a} = \frac{b-m}{b};$$

$$\frac{m}{a} - 1 = 1 - \frac{m}{b};\ m\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 2;\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{m}.$$

D'autre part, on sait, depuis qu'on a commencé à étudier l'acoustique, que les longueurs d'une corde vibrante donnant les trois notes do, mi, sol qui constituent l'accord parfait majeur sont proportionnelles à :

$$1, \frac{4}{5}, \frac{2}{3}$$

Les longueurs inverses sont donc proportionnelles à

$$1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}$$

ou

$$4, \quad 5, \quad 6\,;$$

et, comme 4 + 6 = 2,5, nos trois longueurs de cordes *a, m, b*, satisferont à la relation

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{m}$$

écrite ci-dessus.

C’est ce rapprochement qui a conduit à la dénomination de division harmonique.

Plus généralement, quand on a une progression par différence quelconque

a b c…

et qu’on divise 1 par chacun des termes, la suite

$$\frac{1}{a}\ \frac{1}{b}\ \frac{1}{c}$$

ainsi obtenue s’appelle une *progression harmonique*.

Une des propriétés les plus remarquables des divisions harmoniques, qui jouent un rôle très important en Géométrie, est la suivante.

Soit (fig. 102) M'AMB une division harmonique ; si on joint les 4 points qui la composent à un point P quelconque, et si on coupe les 4 droites PM', PA, PM, PB par une droite quelconque, on aura encore une division harmonique. Ainsi sur la figure, $M'_1A_1M_1B_1$, $M'_2A_2M_2B_2$ sont des divisions harmoniques.

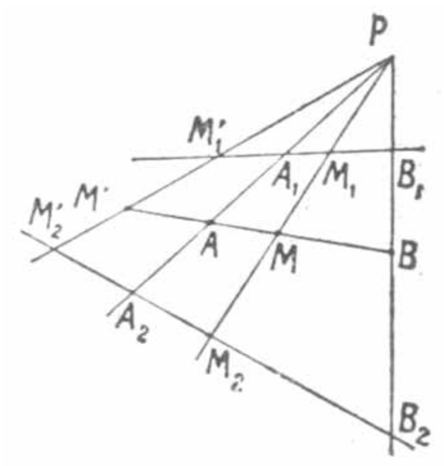


FIG. 102

Le système des 4 droites PM', PA, PM, PB s'appelle un *faisceau harmonique*.

63. UN PARADOXE : 64 = 65.

En mathématique, on rencontre souvent des paradoxes, c'est-à-dire des résultats qu'on obtient, croyant avoir opéré juste, et qui cependant sont notoirement faux.

Tout paradoxe non expliqué est dangereux, car il jette dans l'esprit le trouble et le doute.

Tout paradoxe expliqué, au contraire, est instructif, car il attire l'attention sur un piège, montre de quelles illusions on peut être victime. Tantôt c'est un raisonnement incorrect, tantôt c'est une construction trop légèrement faite, qui conduiront à une flagrante absurdité.

Mais si les paradoxes, bien présentés et expliqués, ont ainsi leur place *dans l'enseignement*, il faut garder en cette matière une très prudente réserve *dans l'initiation*, où il n'est pas question d'approfondir les choses, où l'on se borne à les montrer et à les faire toucher du doigt.

C'est ce qui m'a décidé à ne présenter jusqu'ici aucune question de ce genre. Mais, arrivé au terme ou à peu près, je ne vois aucun inconvénient grave, bien au contraire, à faire exception pour une seule question, d'ailleurs très répandue aujourd'hui, qu'on pourra même laisser chercher (pas trop longtemps) à l'élève. Il est peu probable qu'il trouve le joint de lui-même ; et vous ne tarderez pas à venir à son secours.

Prenons (fig. 103) un carré de 64 cases sur un papier quadrillé, et collons-le sur un carton. Ceci fait, traçons les lignes marquées sur la figure ; elles décomposent le carré en deux rectangles ayant 8 côtés de cases pour base, et des hauteurs de 5 et 3 côtés ; puis le grand rectangle est décomposé en deux trapèzes, et le petit en deux triangles.

Découpons notre carton, avec un canif ou des ciseaux, en suivant les 3 lignes tracées, ce qui nous donnera les 4 morceaux A, B (trapèzes) et C, D (triangles).

Assemblons maintenant les 4 morceaux comme l'indique la 2ème partie de la figure. Nous avons un rectangle, qui présente 5 colonnes de 13 cases chacune ; nous voyons donc 5 × 13 ou 65 cases avec ce second arrangement ; dans le carré, il n'y en avait que 8 × 8 ou 64. Et c'est avec les mêmes morceaux de carton que l'on obtient ces deux résultats différents.

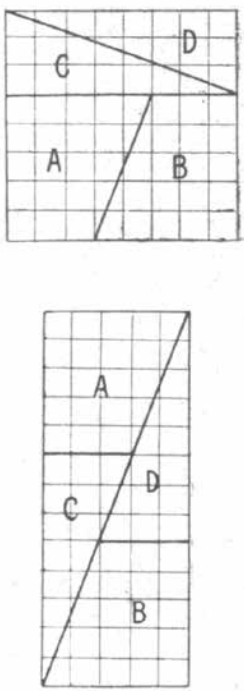


FIG. 103

On est donc tenté, en croyant voir que 64 = 65, de se demander si on a perdu la tête.

L'explication n'est pas bien compliquée, une fois qu'on la connaît ; mais il faut réfléchir un peu pour la découvrir.

En regardant la grande diagonale du rectangle, sur la 2ème partie de la figure, on arrive à se demander si c'est réellement une ligne droite. Elle se compose de deux parties : l'hypoténuse du triangle rectangle C et le côté du trapèze A. D'après le tracé, la pente de l'hypoténuse sur le grand côté est 3/8 ; celle du côté du trapèze est 2/5. Si ces deux fractions étaient exactement égales, on aurait une droite. Mais elles sont 15/40 et 16/40 ; la première est un peu plus petite que la seconde, et ce qui paraissait une droite est en réalité un quadrilatère très mince et très allongé qui correspond à l'aire de la case ajoutée. Le raccordement paraissait se faire, mais en réalité ne se faisait pas exac

Si on prenait un carré de $21 \times 21 = 441$ cases, et en divisant le côté en 13 et 8, on aurait par une construction pareille, en apparence, $441 = 442$. Seulement les deux fractions dont l'égalité serait nécessaire pour un assemblage parfait seraient alors 8/21 et 5/13 ; elles diffèrent seulement de 1/273, de telle sorte que le raccordement semblerait être parfait pratiquement.

64. CARRÉS MAGIQUES.

Si l'on écrit les 9 premiers nombres 1, 2,… 9 dans les cases d'un carré de la manière suivante :

4	9	2
3	5	7
8	1	6

on peut vérifier qu'en ajoutant les nombres contenus dans une ligne, dans une colonne, ou dans l'une quelconque des deux diagonales, on trouve toujours

$$4 + 9 + 2 = 3 + 5 + 7 = 8 + 1 + 6 =$$
$$4 + 3 + 8 = 9 + 5 + 1 = 2 + 7 + 6 =$$
$$4 + 5 + 6 = 8 + 5 + 2 = 15$$

Une pareille figure est ce qu'on appelle un carré magique de 3 ; la somme 15 est la somme magique constante ; si on enlevait 1 à chaque nombre, ce qui donnerait

3	8	1
2	4	6
7	0	5

le carré serait encore magique, mais la constante serait 12 au lieu de 15.

En prenant les nombres 0, 1, 2,… 24 qu'il s'agirait de placer dans un carré de 25 cases, on aurait, en satisfaisant aux mêmes conditions, un carré magique de 5 ; la constante serait 60.

Voici un exemple sur lequel on peut vérifier que toutes les conditions requises sont bien remplies :

0	19	8	22	11
23	12	1	15	9
16	5	24	13	2
14	3	17	6	20
7	21	10	4	18

Il y a plus : si on coupe le carré par une droite verticale entre deux colonnes quelconques, et si on fait permuter les deux morceaux, on aura encore un carré magique. Si on le coupe par une droite horizontale entre deux lignes, et si on fait de même, le carré obtenu sera encore magique.

Ed. Lucas a donné le nom de « diaboliques » aux carrés qui ont cette propriété.

Les carrés magiques ont fait l'objet de beaucoup de travaux. Bien qu'ils puissent paraître un simple jeu, ils donnent naissance à des questions présentant de grandes difficultés, et les plus illustres mathématiciens, Fermat entre autres, n'ont pas dédaigné de s'en occuper.

De nos jours : l'un des plus remarquables ouvrages publiés sur cette question, est celui de M. G. ARNOUX : *Arithmétique graphique ; Les Espaces arithmétiques hypermagiques* ; Paris, Gauthier-Villars, 1894.

Nous avons tenu à signaler ici ces figures à titre de curiosité, dont il n'est guère permis d'ignorer l'existence.

65. DISCOURS FINAL

Si j'avais eu à initier quelques enfants à la connaissance des choses mathématiques essentielles qui ont été examinées ci-dessus, voici, à peu près ce que je leur dirais, arrivé au terme de notre course.

Vous allez commencer votre instruction, en matière mathématique. Suivant vos dispositions naturelles, suivant la direction que vous serez appelés â prendre plus tard dans la vie, cette instruction sera plus ou moins étendue ; mais, restreinte à certaines limites, elle est indispensable à tous.

Jusqu'à présent, vous n'avez rien étudié, mais vous avez appris un certain nombre de choses utiles, en vous amusant. S'il y a eu de votre part quelque effort, ce n'a jamais été qu'un effort volontaire, on n'a jamais rien exigé de vous et surtout rien exigé de votre mémoire.

Avant même de savoir lire ou écrire, vous avez pu composer des nombres avec divers objets et faire quelques opérations simples. Lorsque l'emploi des chiffres a été possible, la pratique du calcul vous est devenue plus courante. Grâce à l'habitude de vous reporter aux objets eux-mêmes, et de ne pas considérer seulement les chiffres qui ne font que les traduire, vous êtes arrivés de très bonne heure à prendre la notion des nombres négatifs et à vous la rendre tout à fait familière. Quelques notions de Géométrie, constatées, non pas démontrées, ont suffi pour commencer à vous faire voir le lien étroit qui unit la science des nombres à celle de l'étendue.

L'étude des fractions n'a pas été faite par vous, pas plus qu'aucune autre étude, mais vous savez ce que c'est qu'une fraction et vous possédez assez bien la pratique courante du calcul qui s'y rapporte.

Des progressions, d'abord de formes simples, puis un peu plus généralisées, vous ont amenés ensuite, quelques exemples aidant, à l'idée de nombres énormes. D'autres grands nombres ont apparu à vos yeux lorsque vous avez vu ce que c'est que les permutations.

Avec quelques notions pratiques complémentaires de Géométrie et de dessin, vous avez pu prendre l'idée de la construction et de l'usage des graphiques, et en faire quelques applications, à des questions de mouvements surtout. Vous êtes arrivés ainsi jusqu'aux portes de la Géométrie analytique ; vous avez aperçu tout au moins la forme des trois principales courbes que la Géométrie analytique permet d'étudier plus à fond, mais que les anciens connaissaient déjà.

Qu'il soit, de toutes ces notions, resté beaucoup ou peu dans votre mémoire, vous en avez toujours gardé quelque chose. Vous y avez pris en même temps, et bien certainement sans vous eu douter, des habitudes d'esprit qui vont vous devenir très précieuses.

Désormais ; il ne va plus s'agir de jeu, mais d'étude. Vous devrez vous assujettir à des efforts intellectuels, peut-être aussi à quelques efforts de mémoire. Ils seront d'autant plus atténués que jusqu'ici vos forces ont été ménagées, et que cependant vous savez beaucoup plus de choses que n'en savaient les enfants de votre âge qu'on instruisait en les soumettant à une véritable torture, qu'on forçait à retenir des mots sans y rien comprendre.

Dans la plupart des objets de vos études, vous retrouverez d'anciennes connaissances ; le trouble que produit la nouveauté sera effacé le plus souvent. Ne croyez pas cependant que vous ne rencontrerez pas de difficultés ; vous en trouverez, mais vous saurez qu'elles tiennent à la nature même des choses, qu'elles sont indispensables à surmonter pour arriver à des résultats utiles et intéressants, et cela vous donnera le courage nécessaire. Par le jeu, vous avez acquis bien des notions, et vos études à venir s'en trouvent facilitées. Par le travail, désormais, vous allez tirer parti de ce que vous savez, vous exercerez votre raison, vous augmenterez l'étendue de vos connaissances. Mais ce travail, s'il n'est plus un jeu, ne sera pas non plus une corvée ! Vous y prendrez goût, le sachant utile ; peu à peu il deviendra pour vous comme un besoin de la vie ; il vous sera, non plus seulement aisé, mais nécessaire.

En cas d'embarras, du reste, vous aurez des maîtres qui seront pour vous des guides ; mais ne leur demandez rien de plus. L'effort personnel, l'effort libre seul peut donner des résultats. Vous en avez pris inconsciemment l'habitude dans les jeux de votre enfance. A vous d'en tirer profit maintenant, en apportant vous-même, à l'œuvre de votre instruction, tout ce que vous avez de patience, de volonté, d'énergie mise en réserve !

Tel est donc à peu près, sauf de nombreuses variantes, le langage qui devrait être tenu à l'enfant parvenu au terme de son initiation, et à la veille d'entreprendre ses études. Ce n'est pas en un discours, mais en dix ou cent séances au besoin qu'il y aura lieu de le pénétrer de ces idées. C'est à l'initiateur qu'il appartiendra d'en tirer parti pour orienter l'enfant sur les sentiers nouveaux qu'il est appelé à suivre.

Cet initiateur, dans ma pensée, devrait être surtout la famille. Mais alors même que par des raisons quelconques, personnelles ou sociales, il n'en serait pas ainsi, le père et la mère doivent bien se dire que leur premier devoir est de ne pas se désintéresser de l'évolution cérébrale de l'enfant, et de rester au moins les auxiliaires de l'éducateur, s'ils n'ont pu être éducateurs eux-mêmes.

Et, la tâche d'initiation achevée, celle de l'instruction devant être entreprise demain, le devoir des parents devient plus impérieux encore s'il est possible ; leur responsabilité est lourde, car suivant la décision qu'ils vont prendre, la destinée entière de leur enfant peut être influencée, soit en bien, soit en mal.

C'est donc du côté des familles que je me retourne à présent, pour leur adresser quelques conseils, utiles à mon avis, présentés un peu au hasard de la plume, et où chacun prendra ce qu'il jugera bon.

D'abord, nous sommes d'accord sur ce point, que l'initiation mathématique est indispensable à tout enfant, sans aucune distinction de fortune, de situation sociale, de sexe ; j'affirme maintenant, que toujours sans distinction, sans réserve, l'instruction mathématique est également indispensable. Les femmes en ont besoin routine les hommes ; la vie courante, l'économie domestique aussi bien que l'industrie, dont les applications enveloppent toute notre vie, exigent de nous des connaissances sur la science des grandeurs et de l'étendue.

Ici, une objection que j'ai cent fuis réfutée mais que je ne me lasserai pas de réfuter encore. Mon enfant a-t-il des dispositions pour les études mathématiques ? s'il n'est pas doué, c'est perdre son temps que de le diriger par là ; je ne tiens pas à en faire un mathématicien.

C'est à merveille. Mais, quand vous avez appris au même enfant la lecture et l'écriture, vous êtes vous demandé s'il avait pour ces branches d'étude des dispositions naturelles ? Quand vous lui avez inculqué les premières notions du dessin, avez-vous pensé qu'il fût appelé à devenir un grand peintre : Nul ne conteste l'utilité pour chaque homme et chaque femme de savoir exprimer correctement ses idées dans sa langue maternelle ; et nul ne s'imagine pas pour cela que chaque élève soit destiné à devenir un Paul-Louis Courier, un Goethe ou un Shakespeare.

Pas plus en mathématique qu'ailleurs, l'instruction ne fait des savants ; et il ne s'agit pas d'en faire ; mais il existe en toute nature un fonds général de connaissances utiles, nécessaires même à tout le monde et d'une acquisition facile, pour tout être dont le cerveau n'est pas atteint d'une tare.

L'ensemble de ces connaissances, grâce il l'initiation préalable, peut être assimilé eu un temps beaucoup plus court que celui qu'on y consacre dans l'enseignement habituel.

Ce bagage, en ce qui touche notre sujet, est à peu pris représenté en France par ce qu'on appelle les mathématiques élémentaires. Tout enfant peut, qu'il soit doué ou non d'une manière spéciale, s'assimiler l'ensemble de ces connaissances, de même qu'il peut arriver à lire et écrire avec correction, sinon avec élégance. S'il a le goût inné des mathématiques, il en fera ensuite de lui-même ; s'il est littérateur par tempérament, il écrira. L'enseignement n'a jamais fait de savants ni d'artistes ; son but devrait être de préparer des hommes.

Donc, sur ce point, pas d'hésitation possible. Votre enfant devra acquérir les notions mathématiques fondamentales nécessaires à tous. Mais suivant votre situation, vos goûts, votre tournure d'esprit, où et comment va-t-il recevoir cette instruction.

Je ne peux parler ici que de la France. Avec quelques variantes, le problème se posera de même, à peu près partout. Nous avons un enseignement primaire dont une bonne part a ou devrait avoir pour objet l'initiation ; un enseignement primaire supérieur qui le complète ; un enseignement secondaire partagé en compartiments nombreux et variés. Dans tout cela, il faut choisir, et vous choisirez, car, malheureusement sur ce point précis, je ne peux vous donner aucun conseil utile.

Notre enseignement primaire est passable ; l'enseignement primaire supérieur serait le moins mauvais de tous si beaucoup de familles ne restaient hypnotisées par l'attrait des « carrières libérales » et du fonctionnarisme.

Quant à l'enseignement secondaire, pour ne pas m'étendre outre mesure, je me bornerai à citer un très court passage d'une étude de M. Ascoli ; on pourrait y voir la plus charmante des ironies, et peut-être ne se tromperait-on guère :

« *Ce que l'on s'est proposé en augmentant l'importance des sciences dans l'enseignement secondaire, c'est de leur attribuer la large part qui doit leur revenir dans la formation des esprits. Jusqu'ici, ce rôle était dévolu aux lettres, tandis que les sciences étaient surtout des matières d'examen, dénuées de tout caractère éducateur.* »

Traduisez : *jusqu'ici*, notre enseignement secondaire a eu pour mission d'abrutir la jeunesse, *tandis que* dans l'avenir, il en sera de même.

Et quand on pense que les professeurs de l'enseignement secondaire sont des hommes de haute instruction, dévoués à leur tâche, consciencieux autant qu'on peut l'être, on frémit à la pensée des ravages que peut produire l'esprit de routine, servi par une administration monstrueuse, n'ayant de puissance que pour le mal.

Quelle que soit la décision prise, en tous cas, n'abandonnez à aucun instant le contrôle de l'éducation de votre enfant. Avant même de le confier à un établissement quelconque, vous avez le droit et le devoir de vous enquérir de l'esprit de l'enseignement, des méthodes suivies, des conditions de travail, sans pour cela qu'il vous soit besoin d'être mathématicien vous-même.

Et surtout, ne vous laissez pas intimider par le directeur, proviseur, principal, peut importe le titre, qui prétendrait que vous vous mêlez de ce qui ne vous regarde pas.

Deux observations seulement vont vous donner une idée de la façon dont vous pouvez vous défendre.

Pour enseigner le système métrique, il existe des lycées où il n'y a pas un instrument de mesure : mètre, litre, poids, etc.

Pour l'enseignement de la Géométrie, on procède, depuis des siècles, on pourrait dire depuis les géomètres grecs, suivant une méthode fatigante, antirationnelle, qui décourage et dégoûte les élèves, surtout les commençants. Cependant, il y a plus de trente années, en 1874, un savant de haute valeur, M. Charles Méray, professeur à l'Université de Dijon, publia sous le titre « Nouveaux éléments de Géométrie » un livre tout à fait remarquable, menant de front l'étude du plan et de l'espace, et mettant en évidence les vérités d'ordre expérimental que la méthode classique dissimule avec hypocrisie. L'administration universitaire fut prise de fureur ; puis, le progrès aidant, et le temps s'étant écoulé, la nouvelle méthode s'est introduite dans un grand nombre d'écoles, surtout dans l'enseignement primaire supérieur. Partout elle donne les plus remarquables résultats. Mais l'enseignement secondaire, lui, reste fermé jusqu'ici, comme les oreilles d'un sourd qui ne veut pas entendre, bien qu'une 2ème édition du livre ait été publiée[24].

Si donc vous faites des démarches pour l'entrée de votre enfant au collège ou au lycée, par exemple, demandez à visiter le matériel d'enseignement des poids et mesures, les instruments d'arpentage, etc. Si on vous répond qu'il n'y a rien de tout cela dans la maison, sauvez-vous, et ne revenez jamais,

Posez aussi la question que voici, très simplement :

« *Pour enseigner la Géométrie, employez-vous la méthode Méray ?* » – Trois réponses sont possibles, sauf les variantes de forme : oui, non, je ne sais pas ce que c'est. Dans le premier cas, vous pouvez poursuivre ; dans le second, saluez très poliment le personnage, et tachez de ne plus le revoir ; dans le troisième cas, donnez-lui le bon conseil d'apprendre ce qui concerne sa profession, et dites-lui bien que vous pourrez continuer la conversation une fois son apprentissage achevé, mais pas avant.

Si les pères et les mères finissaient une bonne fois par avoir le souci profond de l'avenir intellectuel de leurs enfants, ils parleraient net, exigeraient ce qu'ils ont le

24. Ceci était écrit en mai 1905. Depuis lors, un décret du 27 juillet, complété par des instructions publiées le 9 septembre, a modifié les programmes de Mathématiques dans l'Enseignement secondaire.

On a introduit les principes de la méthode de M. Méray en Géométrie, et il faut en féliciter le ministre de L'Instruction publique. Mais on n'a pas même cité le nom de l'Inventeur de la méthode. C'est à la fois un acte d'ingratitude et une injustice.

droit d'exiger, et bien des résistances opiniâtres disparaîtraient comme par enchantement.

Cela finira ,je crois, par arriver. Mas il faudra pour cela que soit plus profondément empreinte dans les cerveaux cette pensée si ,juste, énoncée par M. Emile Borel dans une remarquable conférence, et sous l'impression de laquelle je tiens à vous laisser :

« *Une éducation mathématique à la fois théorique et pratique peut exercer la plus heureuse influence sur la formation de l'esprit.* »

L'ÉDUCATION DE DEMAIN[1]

1. Ce texte est paru dans : *Les Temps Nouveaux*, nº 68, 1913.

PRÉFACE À LA DEUXIÈME ÉDITION

En publiant, à plusieurs années d'intervalle, cette deuxième édition de L'*Éducation de demain,* je n'y vois aucune modification à faire.

Les événements accomplis au cours de ces dernières années n'ont fait qu'apporter une confirmation constante aux idées qu'on trouvera développées ci-après, et dont je suis pénétré depuis longtemps déjà.

Elles pourraient presque se résumer dans les deux propositions suivantes :

Éducation veut dire libération ;

L'éducation est le gage de la transformation sociale qui s'apprête.

On pourrait croire que la bourgeoisie gouvernante s'est dirigée dans les voies de la réaction avec une résolution plus accentuée, à juger superficiellement les choses. Ce serait une erreur. La bourgeoisie a toujours été farouchement réactionnaire. Mais elle tentait de masquer son jeu. Aujourd'hui, elle est forcée de se montrer telle qu'elle est ; c'est un signe de faiblesse.

Contre elle se dressent toutes les consciences. Contre elle doivent se liguer tous les amis de l'éducation.

Je remercie de tout cœur, en terminant, la vaillante escouade des *Temps Nouveaux* ; c’est grâce à elle que peut voir le jour cette édition nouvelle. Il serait à souhaiter, pour la cause de l’éducation, qu’elle pût trouver beaucoup de défenseurs aussi résolus et courageux.

C.A. LAISANT

I. POSITION DU PROBLÈME

Le grand problème de l'éducation, ainsi que j'ai déjà eu l'occasion de l'écrire[2], se pose de la façon suivante dans toute son ampleur :

Étant donné un être humain venu au monde, développer harmonieusement toutes ses facultés, de manière à porter au maximum son activité, dans une direction utile à lui-même et à ses semblables.

Cet énoncé indique le but vers lequel doit toujours tendre, sans avoir la prétention de jamais l'atteindre définitivement ; il comprend le développement intégral de l'être humain, au point de vue physique, intellectuel, moral et social.

Je ne m'occuperai pas, ici, de l'éducation physique, qui mériterait à elle seule une étude détaillée. Il me suffira de dire une fois pour toutes que c'est folie de vouloir développer une intelligence robuste dans un corps débile. L'être chétif, affaibli par manque d'exercice ou par la privation que lui impose la fatalité de son état social, ne développera jamais son cerveau normalement, sauf de très rares exceptions.

Non seulement, dans l'état présent des choses, le problème, impossible à résoudre absolument, n'est pas

---

2. *L'éducation fondée sur la science*, Bibliothèque de Philosophie contemporaine, F. Alcan, Paris, p. 105.

résolu relativement ; mais à peu près partout, dans le monde soi-disant civilisé, on tourne le dos au but qu'il s'agit d'atteindre. Pour préciser, c'est surtout de la France dont nous parlerons ; à peu de choses près, il en est de même dans les autres pays.

On confond assez volontiers les mots « Éducation et Enseignement » ; ce dernier cependant ne comprend que l'éducation intellectuelle.

La confusion est sans inconvénient grave, car (après le développement physique) c'est le développement intellectuel qui domine tout. C'est assez dire que toute éducation saine ne peut reposer que sur la raison, sur des données positives, sur le respect de la vérité scientifique ; et qu'on en doit proscrire l'emploi d'hypothèses métaphysiques qui sont le poison du cerveau et le vouent à la paralysie.

Si la plupart des enseignements officiels ont fait appel au secours des religions révélées, ou d'une métaphysique nuageuse non moins dépourvue de raison, c'est parce que les gouvernements se donnent pour but de former des gouvernés, non pas des hommes. Tout esprit libre est un agent de révolte. Par suite, chaque progrès vers la solution du problème de l'éducation marque un recul de la puissance des gouvernants, d'ordre religieux ou laïque, soutiens naturels de la discipline des cerveaux et des consciences. Éducation veut dire libération ; gouvernement veut dire soumission à une autorité. Éducation officielle, par conséquent, signifie conciliation entre la liberté et l'esclavage, ou plutôt la tentative de conserver l'esclavage en ayant l'air de faire des concessions à la liberté. Ces concessions, mêmes apparentes, ont une grosse importance, parce que, imposées par la peur, chacune d'elles correspond à un pas de plus vers les idées d'affranchissement.

II. LES DIVISIONS DE L'ENSEIGNEMENT

Chacun sait qu'en France, l'enseignement officiel est divisé en trois branches : enseignement primaire, enseignement secondaire, enseignement supérieur. De ce dernier, il y a peu de choses à dire. On le distribue à des adultes, hommes ou femmes, préparés à le recevoir par leurs études antérieures, et dont le cerveau a déjà reçu un commencement de formation. L'action éducative directe est donc à peu près nulle. De ce que dit le maître, l'élève ne prend que ce qu'il veut bien ; il est à même de discuter et de critiquer ; bien ou mal, – là n'est pas la question – il critiquera et il discutera. Restent donc les deux autres divisions : enseignement primaire et enseignement secondaire. En apparence, l'enseignement primaire doit comprendre les connaissances simples, générales, indispensables à tous, et servant de préparation à l'enseignement secondaire pour les enfants qui seront appelés à recevoir celui-ci. En fait, nous allons le constater bientôt, il n'en est pas ainsi, tant s'en faut. Quant à l'enseignement secondaire, il n'a cessé de subir des crises successives et des transformations multiples qui sont l'indice de son état de lamentable misère. Il n'y a pas bien longtemps encore, les connaissances distribuées par cet enseignement comprenaient surtout un fatras artificiel de langues mortes, d'histoire conventionnelle, dénommé par antiphrase *humanités* ; les vérités scientifiques y occupaient une place nulle ou insignifiante. Malgré les changements opérés, rappelant assez bien les changements de position d'un malade qui se retourne dans son lit, un universitaire qui doit s'y connaître, M. Gaston Téry, pouvait écrire récemment :

> « Il est impossible de comprendre notre système d'éducation si l'on ne commence par se bien pénétrer de ce principe que l'Université se propose simplement d'enseigner l'ignorance [...] Oui, faire des ignorants, voilà notre idéal pédagogique [...] Notre lycée est une solide boîte en briques, où nos élèves sont si parfaitement retranchés du monde que s'ils vivaient dans un souterrain. Pauvres fils ! On les habitue si bien à ne rien voir qu'ils finissent par devenir aveugles, comme les poissons des mers profondes. »

C'est dans les lycées et dans les collèges que se donne l'enseignement secondaire officiel. C'est aux écoles qu'appartient l'enseignement primaire. Or, la plupart des lycéens ont institué des classes primaires recevant de tout jeunes enfants. D'autre part, sur tous les points où l'enseignement primaire a pris un développement considérable, on a été conduit, sous le nom d'enseignement primaire supérieur, à instituer des établissements qui en fait distribuent une instruction secondaire, avec un peu moins de langues mortes en général.

Cette invasion réciproque des deux enseignements suffit à montrer combien la division est fausse, combien mensongères sont les apparences.

La vérité, c’est que les établissements d’enseignement secondaire sont réservés aux enfants de la bourgeoisie, les écoles primaires aux enfants du peuple.

C’est une coupure sociale, et pas autre chose.

Il faudrait être aveugle pour se refuser à le voir. Et cela s’explique par ce fait que les divers gouvernements qui ont sévi sur notre pays depuis la Révolution n’ont été que des syndicats d’intérêts bourgeois, ayant pour but s’assurer la prédominance de la classe dirigeante, sa puissance d’exploitation, la conservation de ses privilèges. Il importait donc de réserver aux petits bourgeois le monopole d’un enseignement d’ordre plus élevé, en laissant aux petits prolétaires la connaissance rudimentaire du français et de quelques règles d’arithmétique, bien suffisante pour de futurs exploités.

Le calcul s’est trouvé déjoué, cependant, comme le sont souvent les calculs inspirés par la peur. Logiquement, il eût fallu refuser au peuple jusqu’à l’enseignement de l’alphabet. Et, à l’heure actuelle, la possibilité de lire et d’écrire, donnée à tous les prolétaires des jeunes générations, est le plus terrible des germes de révolution sociale. Il est même arrivé une chose assez curieuse ; c’est qu’en dépit de tous les efforts administratifs et gouvernementaux, l’enseignement soi-disant privilégié est tombé dans un état de marasme et de décrépitude dont donne bien l’idée la citation de M. Téry, que nous produisions plus haut. Lycée et école primaire sont deux *abrutissoirs* ; mais le premier est d’un effet beaucoup plus puissant que la seconde, parce que l’élève de l’école primaire conserve encore le contact avec la vie, alors que l’élève du Lycée est enfermé dans le domaine de la mort.

Et tous les efforts n’y sauraient rien faire ; malgré la valeur des maîtres, malgré les sacrifices d’argent, la bourgeoisie dirigeante, dans son horreur du prolétariat, recevra de plus en plus une éducation fausse, artificielle, anti-humaine et deviendra de plus en plus incapable de rien diriger.

D’autre part, l’instituteur primaire prend chaque jour plus d’importance et son action ne cesse de gagner du terrain.

Modestement instruit, pourvu d’un salaire de famine, persécuté, calomnié, accablé d’un travail ingrat et absurde, il fait tête à chaque obstacle. Il lutte, il s’élève, et bientôt les colères soulevées contre lui de tant de côtés seront réduites à l’impuissance.

Il n’y a donc pas lieu de trop se désoler de l’état de choses actuel, en ce sens qu’il produit des résultats justement contraires à ceux qui sont proposés les créateurs du système. Néanmoins, nous n’exagérions pas en affirmant plus haut que tous nos établissements d’instruction sont des officines d’abrutissement.

il en est ainsi, surtout pour l’éducation des tout petits enfants ; et cela, parce qu’on méconnaît systématiquement les qualités et les lacunes du cerveau de l’enfant, parce qu’on ignore ou qu’on méprise sa psychologie.

L’enfant a une mémoire prodigieusement facile, mais fugace ; il enregistre merveilleusement les faits qui l’intéressent ; mais pour que la trace en demeure permanente, il faut que l’intérêt existe et il faut souvent aussi des enregistrements réitérés. D’autre part, sa curiosité est grande ; il a le goût de savoir, de comprendre, tout en étant radicalement rebelle aux raisonnements de la logique formelle qui ne disent rien à son esprit.

De cet état psychologique, il résulte que le premier enseignement devrait avoir exclusivement une apparence d’amusement, de jeux ; portant sur des objets concrets, réels, il se proposerait d’exciter sans cesse la curiosité, de provoquer à la découverte et parviendrait de la sorte à emmagasiner sans efforts, sans ennui, dans l’esprit de l’enfant, au bout de quelques années, un précieux ensemble de notions utiles.

Reposant sur le respect de la liberté de l’être humain, sur l’observation consciencieuse des dispositions cérébrales propres à chaque élève, cette méthode l’amènerait ainsi vers l’âge de 11 à 12 ans, à pouvoir aborder la période *d’étude*. Celle-ci, longue ou courte, qu’elle s’arrête à 13 ou 14 ans ou se prolonge au-delà de 20, sera dans tous les cas singulièrement plus fructueuse qu’aujourd’hui.

La raison amène donc à dire qu’à la division artificielle : enseignement primaire – enseignement secondaire – devra être substitué le suivante : Initiation à l'Étude.

Or, dans la pratique de l'enseignement primaire actuel, on fait à peu près juste le contraire de ce que nous venons de dire. La mémoire est heureuse, on en abuse ; on fait apprendre par cœur, on enseigne des raisonnements, des formules qui ne peuvent rien dire à l'esprit de l'enfant ; on les lui met de force dans la mémoire et, en le torturant, on lui fait retenir, quoi ? Des mots, rien que des mots. Sa curiosité, on lui en fait un crime ; ses questions, on les élude ou on le fait taire.

Il est difficile qu'il en soit autrement quand on voit, ce qui n'est pas rare, des classes de 60 ou 80 jeunes enfants confiés à un seul instituteur. Ce ne sont plus là des écoles, mais des bergeries, des garderies de petits animaux qu'on essaie simplement de réduire au silence. Cet odieux spectacle ne se prolongera pas longtemps, même dans notre monde barbare, qui se prétend civilisé. Il faudra bien et à bref délai, qu'à la fiction succède la réalité, qu'à l'apparente instruction primaire succède l'initiation véritable, préparatoire à l'étude future, et reposant sur la base solide des connaissances rationnelles, scientifiques, dont l'humanité est déjà en possession, et qui cependant ne sont rien, en comparaison de ce qu'elle possédera un jour.

III. L'INITIATION SCIENTIFIQUE

Dans un domaine, qui m'est plus spécialement familier que les autres, j'ai publié un petit livre[3] qui s'inspire des considérations indiquées ci-dessus et résume près d'un demi-siècle de réflexions et d'observations. En vertu d'un préjugé très général, les sciences mathématiques, ayant un caractère abstrait, il pouvait paraître qu'ici la tâche était particulièrement difficile; J'ai montré qu'au contraire elle était tout à fait simple si l'on voulait y mettre un peu de conscience et de bonne volonté. Les correspondances reçues à l'occasion de cette publication de l'*Initiation Mathématique* et la rapidité avec laquelle ont été enlevées les exemplaires mis en vente, m'ont montré quel écho j'avais rencontré, surtout dans le monde de l'enseignement primaire; car si j'étais sûr de la justesse de ma thèse, je ne l'étais pas autant de moi-même; et je me demandais si, du premier coup, j'arriverais à me faire comprendre.

Or, ce qui semblait malaisé dans le domaine mathématique, ne peut plus le paraître quand il s'agit des autres sciences.

En physique, en chimie, par exemple, en suivant la trace marquée par Gaston Tissandier dans son bel ouvrage: *La Physique sans Appareils, La Chimie sans Laboratoire*, il est facile d'instituer toute une série d'expériences, réalisables à l'aide d'objets usuels, et

3. *Initiation Mathématique*, ouvrage étranger à tout programme, dédié aux amis de l'enfance; Paris, Hachette; Genève, Georg.

d'une action éducative efficace ; en astronomie, avec quelques promenades, le jour et le soir, quelques figures explicatives, quelques appareils improvisés donnant des images schématiques, on amuserait au plus haut point les enfants, on développerait en eux l'esprit d'observation et on meublerait sans effort leur mémoire de bien des notions précieuses ; les merveilleux livres de Flammarion nous montrent que donner une « initiation Astronomique » ne serait qu'un jeu pour lui[4].

Dans les sciences naturelles, Géologie et Minéralogie, Biologie végétale (Botanique) et anomale (Zoologie) on arrive peut-être plus facilement à intéresser les petits enfants[5].

A la campagne, notamment, des promenades fréquentes, des classes au grand air fourniraient des occasions incessantes d'accumuler une foule d'observations, de former des collections scolaires, de véritables petits musées d'histoire naturelle.

Enfin, l'initiation géographique devrait également prendre place ici, se rattachant à la géologie d'un côté, à l'astronomie de l'autre ; elle ferait usage des cartes, des plans des villes, des images représentant les paysages, les monuments, les costumes divers, les types d'habitants des différentes parties du monde.

4. *L'Initiation Astronomique* a été publiée depuis la première édition de la présente brochure et a obtenu un grand succès.

5. Des *Initiations* à la Zoologie et à la Botanique ont également été publiées ; toutes deux sont de Brucker ; celles consacrées à la Chimie (Dargens) et à la Physique (Carré) ont aussi reçu du public un excellent accueil.

C’est certainement l’une des branches de l’enseignement des tout petits qui peut les intéresser le plus vivement si l’on s’y prend bien et si surtout l’on évite avec soin la récitation fastidieuse de noms appris par cœur, simples mots logés dans la mémoire et qui ne répondent à rien de réel.

IV. L’INITIATION LITTÉRAIRE, ARTISTIQUE ET MORALE

Les bases de tout enseignement doivent être scientifiques, c’est-à-dire rigoureusement conformes à la raison ; il importe de proscrire tout appel direct ou indirect à des notions surnaturelles ou extra naturelles. Mais conclure de là que l’enseignement doit exclusivement se confiner dans le domaine technique de la science serait un véritable sacrilège, une diminution de l’être humain ; il était réservé à notre époque de mensonge et d’absurdité de créer une opposition, une contradiction même, entre les sciences et les lettres, comme si l’esprit humain pouvait se découper ainsi par tranches. La vérité, c’est que, même dans le premier enseignement, dans la période d’initiation, il faut faire à ce qu’on appelle « les lettres » une place importante. Arriver à posséder sa langue maternelle, à la manier par la parole ou par l’écriture, s’exercer à exprimer sa pensée le plus clairement et le plus élégamment possible, tel est le premier point ; avec de nombreuses lectures, bien choisies, des dictées courtes, des exercices simples, on peut arriver facilement ; mais il faudrait commencer par jeter au feu le tas des infâmes grammaires écrites par des cuistres infâmes, tortureurs d'enfants et piliers d'ignorance. C'est tout au plus si dans l'enseignement supérieur, il peut y avoir quelque intérêt à se livrer à des études grammaticales ; mais les imposer à un petit enfant, c'est un crime.

Il y aurait aussi intérêt, chaque fois que la chose serait possible, à enseigner au petit enfant la pratique élémentaire d'une langue étrangère. Ce serait tout simple, pourvu qu'on eût un instituteur connaissant cette langue, mais à la condition, là encore, de proscrire rigoureusement tout enseignement grammatical.

Par contre, on peut et on devrait dès maintenant donner partout aux enfants les éléments de la langue internationale Esperanto qui, avant un siècle d'ici, sera universellement adoptée comme idiome second et auxiliaire, à côté de la langue maternelle, pour toutes les relations internationales.

L'histoire, dans notre période d'initiation, doit occuper une place importante. On commencerait pour bien expliquer aux enfants qu'on va leur exposer des faits que nous ne pouvons pas vérifier nous- mêmes, puisqu'ils se sont passés il y a bien longtemps ; mais qu'en rapprochant et en comparant les narrations qui nous en ont été faites, des hommes très patients et très habiles sont parvenus à donner à ces faits une grande chance de véracité. On s'en tiendra du reste aux grandes lignes, aux événements considérables, en essayant de montrer leur enchaînement quand la chose est possible, mais en prenant toujours la forme anecdotique, simple, et éclairée le plus possible par les images, les projections, etc.

Dans cet ordre d'idées, le premier enseignement pourrait s'intituler : Initiation à l'histoire des sociétés humaines. Depuis l'époque des cavernes jusqu'au XXe siècle, on montrerait comment ont successivement vécu, comment se sont groupés, comment ont évolué les animaux bimanes qu'on appelle les hommes. Il y aurait besoin, dans cet aperçu rapide, de prononcer très peu de noms propres, de signaler à peine les grands crimes que sont les guerres, et les grands scélérats qui les ont commis. C'est plus tard seulement que l'enfant a l'esprit droit, dont la conscience n'aura pas été comme aujourd'hui systématiquement déformée, prendra, au simple récits des faits, l'horreur des scélérats, des fléaux de l'humanité que glorifient les monstres universitaires, et auxquels les nations imbéciles ont élevé des statues, qu'il faudra réunir plus tard dans un musée spécial.

Une fois l'enfant arrivé à l'âge de huit ou neuf ans, il y aurait lieu de l'initier à l'histoire des mythologies, en insistant sur celles que nous connaissons le mieux, la mythologie grecque et la mythologie juive, puis chrétienne. On lui montrerait de quelle manière naissent et meurent les religions, comment elles évoluent, comment, à côté, progressent les connaissances humaines et s'accroît en nombre et en importance la somme des vérités découvertes.

Socrate, Hypathie, Galilée par exemple, peuvent fournir matière à des récits qui n'ont pas besoin de longs commentaires pour laisser dans l'esprit de l'enfant une trace durable et bienfaisante.

On dira peut-être que c'est là un enseignement anti-religieux. Nous l'avouons sans honte. Les religions, et plus spécialement ce qu'on appelle de nos jours « la religion » représentent l'absurdité, l'exploitation de la bêtise et de la peur ; elles distribuent la mort, et nous voulons vivre ; elles subsistent par le mensonge, et le monde a soif de vérité ; et aux défenseurs de ces tristes vestiges du passé, il ne reste même plus l'excuse de la foi.

Tout enseignement rationnel et humain doit donc être anti-religieux, par la nécessité même des choses.

Au surplus, nous n'avons guère en vue que l'éducation des enfants du peuple.

S'il plaît à quelques bourgeois attardés de continuer à empoisonner leurs petits, moralement et intellectuellement, nous n'y pouvons rien, tant qu'existera ce qu'on appelle « la liberté du père de famille » ; nous avons le droit de le déplorer pour les pauvres victimes de cet empoisonnement, et voilà tout.

Mais au point de vue social, le mal ne sera pas grand ; car si la bourgeoisie dirigeante ajoute, de son fait, aux autres monopoles qu'elle détient, celui de l'ignorance et de la stupidité, cela ne la fortifiera pas beaucoup dans sa lutte contre l'avènement inévitable d'une société nouvelle.

L’être humain n’a pas seulement soif de vérité, mais de beauté. L’initiation artistique ne doit donc pas être négligée. Non seulement par les premières notions du dessin et de la musique on développera les facultés de l’œil, de la main, de l’oreille ; mais les richesses artistiques des musées, dans les villes, les promenades dans les régions voisines de l’école où se trouvent des sites remarquables seront autant de moyens à utiliser. On devra s’attacher aussi à accumuler des reproductions des œuvres les plus célèbres des peintres et des sculpteurs de tous les temps et de tous les pays. La photographie permet aujourd’hui de former de telles collections facilement et à peu de frais. Quelques entretiens sur l’histoire de l’art et des artistes, permettraient aussi à un instituteur digne de sa tâche, de fixer l’esprit de l’enfant, d’attacher son admiration à la mémoire de ceux qui embellissent le monde, à l’acheminer, pourrions-nous dire, vers la *religion* de la beauté, s’il était permis d’employer un terme aussi vil pour exprimer une idée aussi noble.

L’initiation morale a droit, également, à une place dans l’éducation de l’enfant. Mais elle l’a, nous dira-t-on peut-être. L’instruction morale et civique figure dans les programmes actuels de notre enseignement primaire.

Ah ! laissez-nous rire. Si vous comptez sur la collection des manuels d’instruction civique et morale répandus dans nos écoles pour former autre chose que des monstres, vous êtes vraiment pourvu d’une belle crédulité ; plus bêtes que les catéchismes, parce que les catéchismes au moins n’ont pas la prétention de faire appel à la raison, prétendant inspirer le respect de ce qu’il y a de moins respectable, ces affreux petits livres ne pourraient que dégrader et pourrir les consciences s’ils produisaient réellement un effet quelconque. Leur plus grand mérite, c’est de rester incompris des jeunes enfants qui les récitent par force.

La morale rationnelle ne s’enseigne pas par des préceptes, surtout au début de la vie. On dit à l’enfant : sois bon, et on lui fait l’apologie de la méchanceté ; sois juste, et on lui apprend à respecter l’injustice triomphante.

Il suffirait de se montrer juste et bon envers lui. Il n’y aurait même pas à lui dire : sois libre ; mais il faudrait, par la pratique des actes de chaque jour, lui montrer qu’on a le respect de cette liberté, en ajoutant qu’elle ménage des mécomptes à ceux qui prétendent en user sans respecter eux-mêmes la liberté des autres.

Un peu plus tard, une fois que l’enfant aura pu acquérir ainsi par voie expérimentale des notions morales, peut-être un peu confuses et inconscientes, mais justes et utiles quand même, on pourra se risquer avec prudence à formuler quelques préceptes ; mais il faut se montrer bien réservé dans cette voie. Une saine morale pourrait se résumer à deux aphorismes : sois libre, et respecte la liberté des autres. De là découlent toutes les conséquences morales, les unes accaparées par les religions, les autres proscrites au contraire par elles ; par exemple : Rends le bien pour le bien ! Aime les autres hommes ! Oppose-toi à l’injustice !

Révolte-toi contre elle, même lorsqu'elle ne t'atteint pas directement.

Mais ces diverses formules resteraient vaines si on les apportait toutes faites. Elles pousseront d'elles-mêmes dans l'intelligence et la conscience si on y a jeté à propos les germes nécessaires, et permettront alors de s'élever jusqu'à la haute notion scientifique de la solidarité, de l'association, de l'effort libre en commun, destiné à accroître chaque jour l'empire de l'homme, sa puissance contre les forces antagonistes de la nature, et à détruire définitivement l'action abusive de l'homme sur l'homme.

Ce qu'on appelle communément *morale*, à l'heure actuelle, ce qu'on enseigne sous ce nom, spécialement sous le couvert des doctrines religieuses, c'est ce qu'il y a de plus immoral au monde. La maxime qui prescrit de rendre le bien pour le mal, par exemple, est une sorte de prime aux violents et aux méchants, leur garantissant l'impunité.

Le précepte qui ordonne la résignation est un enseignement propre aux lâches et favorable aux criminels. Notre hypocrite morale officielle est empoisonnée de mysticisme, et destinée à des esclaves. La morale humaine de demain sera génératrice de liberté.

Encore une fois, elle ne peut être enseignée que par la vie ; mais c'est dès le début de la vie qu'il importe d'orienter l'être humain dans la direction où plus tard il marchera lui-même.

V. LA PÉRIODE DE L'ÉTUDE. L'ENSEIGNEMENT INTÉGRAL

L'enfant ayant terminé la première période de son éducation, à laquelle nous avons donné le nom d'Initiation, saurait, à l'âge de onze ou douze ans, beaucoup plus de choses utiles que n'en savent aujourd'hui les élèves au terme de leurs études primaires. Il en serait arrivé là sans efforts, sans contrainte, sans qu'on eût jamais fait appel direct à sa mémoire.

Son cerveau aurait en réserve toutes les énergies que détruit notre système actuel ; et sa curiosité, mise en éveil sur les grands problèmes que nous présentent la nature et la vie, le pousserait à vouloir avancer plus loin.

Il faut aller plus loin, en effet, et aborder l'étude, exigeant l'emploi du raisonnement formel, l'attention soutenue sur un même sujet. Mais tous les enfants ne sont pas doués d'aptitudes égales, et cela dans des directions quelconques. Aussi, dans la période de l'étude, et surtout au début de cette période, est-il nécessaire et même indispensable de pousser aussi loin qu'on le peut l'observation psychologique de chaque élève et de commencer à le diriger en conséquence.

A tous, cette éducation qui donne l'habitude et le goût du travail personnel doit être distribuée. Pour quelques-uns, elle se bornera peut-être à deux ou trois années ; pour d'autres, elle s'étendra jusqu'à l'âge d'homme.

Mais quel que soit l'instant où l'élève quittera les bancs de l'école, il faut que l'ensemble des connaissances acquises représente pour lui un bagage intellectuel effectif, utile, devant lui servir dans la vie.

Il y a donc une sélection graduelle à opérer, suivant les capacités et les aptitudes. Aujourd'hui, comment se fait-elle ? Uniquement par la situation sociale des familles, ou pour mieux dire par le degré de fortune. Aux pauvres, l'étude primaire suffit. Aux riches, le lycée, avec ses études classiques. Les premiers devront rester des prolétaires ; les autres, fils de bourgeois, doivent devenir des bourgeois. Exceptionnellement, je le sais, et par une sorte de charité, sous forme d'allocation de bourses, on permet à quelques petits pauvres, ayant bien travaillé, ou entourés de protecteurs assez puissants, de prétendre à devenir de petits bourgeois. Mais ce n'est qu'une exception.

Donc, pour les élèves, bourgeois ou boursiers, admis à l'enseignement secondaire, le lycée ouvre ses portes. Il les referme plus vite encore, et pendant huit ou dix ans, travaille à déformer les intelligences par une éducation artificielle, anti-humaine, malfaisante, qui laisse de côté les éléments utiles à la vie, s'attachant seulement à ce qui ne pourra servir à quoi que ce soit.

En enseignant surtout les langues mortes, le culte de la force et du succès, l'adoration de la laideur morale, on prépare des bacheliers au lieu de former des hommes, et on jette dans la vie de pauvres êtres ahuris, désemparés, qui ne comprennent rien au monde moderne et son appelés à devenir demain nos dirigeants. Ce sont des monstres ; mais on ne saurait le leur reprocher ; c'est l'éducation qui les a fait tels.

Dans un système raisonnable d'éducation, au contraire, l'enseignement serait intégral, c'est-à-dire porterait sur l'ensemble des connaissances humaines vraiment utiles, et irait en s'élevant sans cesse, pour se spécialiser ensuite dans telle ou telle direction, suivant les aptitudes diverses des élèves, et les conduire, au besoin, jusqu'aux portes de l'enseignement supérieur.

Il n'est pas possible que la stupidité du régime actuel n'en amène pas la disparition, et peut-être plus vite qu'on ne l'imagine. Bien des symptômes permettent de l'espérer, parmi lesquels on doit noter ce qu'on a appelé la crise de l'enseignement secondaire.

Et dans l'inévitable transformation qui se produira, on trouvera au premier rang, parmi les démolisseurs, les professeurs de l'enseignement secondaire eux-mêmes.

Il est en effet très remarquable et très étonnant que l'horrible enseignement actuel soit donné par un corps de professeurs instruits, éclairés, consciencieux, désireux de bien faire, et dont beaucoup ont le dégoût du métier qu'on leur impose. Que demain l'enseignement intégral populaire soit institué, et il n'y aura pas à se mettre l'esprit à la torture pour trouver le personnel enseignant. Il est là, tout prêt ; et c'est avec joie qu'il fera demain sa bonne tâche, au lieu du métier répugnant auquel on le condamne aujourd'hui.

Les mêmes professeurs, chargés de déformer les cerveaux, seront heureux de les éclairer et de les libérer, en se libérant eux-mêmes.

VI. L'AUTO-ÉDUCATION

Quand nous quittons l'école primaire, le lycée ou les écoles supérieures, pour entrer dans la vie, nous pouvons dire sans rien exagérer que notre éducation commence. Nous voulons parler de l'éducation vraie, celle que nous nous donnons à nous-mêmes avec le concours des faits de la vie. Cette *Auto- éducation,* pour tout être humain digne de ce nom, se poursuit jusqu'à la mort et ne cesse de produire son effet à tout instant.

Suivant la très juste expression de Spencer, dans l'éducation de l'enfance et de la jeunesse, le gouvernement vient du dehors ; dans la période de l'auto-éducation, il vient du dedans.

Et comme il n'y a rien qui puisse exister cérébralement en nous sans être accepté par nous-mêmes, il s'ensuit que le but principal de l'éducation première, doit être de préparer l'auto-éducation. Alors même que le gouvernement semble venir du dehors, il doit s'attacher à rendre facile l'exercice du pouvoir pour son successeur, ce gouvernement du dedans, seul souverain légitime, puisqu'il est en possession de notre conscience.

Sous cette autre forme, on peut dire que faire l'éducation d'un enfant, c'est faire de lui un être libre. La liberté seule lui donnera l'énergie nécessaire pour poursuivre utilement ensuite ce travail incessant sur soi-même, qui nous perfectionne et nous modifie continuellement, sans que nous puissions avoir la conscience très exacte de ces modifications.

L'auto-éducation, théoriquement comprise et définie comme nous venons de le dire, est le plus puissant facteur d'accroissement de l'être humain, en science et en conscience.

Dans la pratique des choses, et dans nos sociétés actuelles, il n'en va pas tout à fait ainsi. D'une part, la masse des prolétaires, des exploités, écrasés physiquement par un labeur quotidien excessif, est par cela même assez déprimée au physique comme au moral pour devenir incapable de l'effort soutenu qu'exige l'auto-éducation.

Quand on rentre au logis le soir après une journée d'extrême fatigue, quand on se dit qu'il faudra être debout le lendemain de bonne heure, on n'a guère le cœur à sortir pour aller entendre un cours, pour augmenter le champ de son activité intellectuelle. Le repos, le repos physique seul, s'impose impérieusement, et il faut un certain courage pour s'assujettir à une simple lecture ; pour travailler, pour méditer, il faut un véritable héroïsme dont bien peu sont capables.

Hâtons-nous d'ajouter que sur l'autre versant social, le tableau n'est pas plus brillant. Les dirigeants, les possédants, les pourvus, les satisfaits, arrivent à la vie avec toutes les idées fausses, toutes les erreurs, tous les préjugés qu'entraîne l'éducation classique, fortifiés par l'influence du milieu social où ils sont nés. L'égoïsme, l'ambition, la vanité, les frappe d'un irrémédiable aveuglement, et leur existence entière s'écoulera, pour la plupart d'entre eux, sans qu'ils soupçonnent même l'existence du monde qui les entoure, le jeu des forces qui animent ce monde. Beaucoup, parmi ces privilégiés, arrivent à perdre totalement le goût du travail, à ne poursuivre que les plaisirs les plus futiles ou la satisfaction des plus bas instincts ; d'autres consacrent entièrement l'énergie qui leur reste à écraser leurs concurrents pour arriver plus vite, à se perfectionner dans l'intrigue, dans la ruse, dans la perfidie. Graduellement ainsi, au lieu d'un perfectionnement, c'est à une dégradation morale que nous assistons dix-neuf fois sur vingt.

En fin de compte, l'auto-éducation qui devrait être presque tout, se réduit à peu près à rien. Les uns ne peuvent pas se la donner, les autres ne le veulent pas. Il n'est pas extraordinaire, dans ces conditions, que le progrès des esprits s'accomplisse avec une lenteur désespérante, et que le monde actuel, malgré sa prétention comique à la civilisation, reste en moyenne à une période de sombre barbarie. Il n'y aurait aucune raison de voir jamais une issue à cette situation absurde, si quelques être humains, faisant exception à la grosse masse, ne pratiquaient quand même l'auto-éducation. Ce sont ceux-là qui préparent le monde à venir et transforment le monde présent. En s'exerçant à cette œuvre terriblement révolutionnaire : penser par eux-mêmes, et n'acceptant pas les sottises toutes faites ; en cherchant la vérité, en la criant de toutes leurs forces quand ils croient sincèrement l'avoir trouvée, ils changent à tout instant l'équilibre des choses, ils provoquent les autres à les imiter. Or, si chacun les imitait, si le quart seulement du genre humain s'avisait de réfléchir, faisait travailler son cerveau, ce serait le bouleversement du monde actuel, l'effondrement de la barbarie et le début de la civilisation.

VII. L'ÉDUCATION POPULAIRE. LES U.P.

L'insuffisance des notions acquises à l'école primaire, depuis longtemps, a frappé de bons esprits qui s'attachèrent à former des associations ayant pour objet de compléter l'enseignement des enfants du peuple. Des cours du soir, des leçons destinées aux adultes furent créés en grand nombre, dans quelques villes surtout, et ont rendu des services qu'il serait injuste de méconnaître. Cet enseignement a porté sur des sujets très divers, mais principalement sur des matières techniques pouvant avoir une utilité immédiate. Dans l'ensemble, cependant, les résultats n'ont pas été en proportion avec les généreux efforts mis en œuvre, et cela par une raison d'ordre général, parce qu'on venait se heurter à un obstacle insurmontable, dans l'état social actuel.

Si jadis on retirait prématurément un enfant de l'école, si maintenant même, sous le régime apparent de la gratuité et de l'obligation, on ne l'y laisse que le moins longtemps possible, c'est qu'on s'y voit forcé par la nécessité de la vie. Il faut, si jeune soit-il, que cet enfant, garçon ou fille, ne reste pas plus longtemps une bouche inutile ; il faut qu'il vienne prendre son rang dans la grande armée du travail ; donnant son énergie, sa santé, tout ce qu'il a de force au Minotaure capital, afin d'empêcher les siens de mourir de faim. Qu'on vienne parler à ceux-là de la nécessité de s'instruire, de l'auto-éducation, de la bienfaisante libération des cerveaux, ne sont-ils pas en droit de répondre avec le fabuliste populaire :

Ne parle pas de liberté ; La pauvreté, c'est l'esclavage.

Il y a des exceptions, je le répète. Mais au point de vue général, l'enfant du peuple ne peut pas s'instruire ; il ne peut pas faire son éducation. Le travail forcé auquel il est condamné s'y oppose. Pour qui veut voir les choses telles qu'elles sont, il n'y a aucune illusion à se faire là-dessus.

Au cours des dernières années, à Paris principalement, un mouvement s'est dessiné dans une direction un peu différente, et il en est sorti une rapide floraison d'institutions qu'on a appelées, assez improprement, des *Universités Populaires.*

Il eût mieux valu les appeler sociétés coopératives de fêtes et de conférences.

Je me garderais de médire des U.P., mais elles n'ont pas donné, en général, la dixième partie de ce qu'en espéraient les fondateurs. Quelques-unes, grâce à des efforts soutenus, à une excellente organisation, marchent à merveille ; mais elles sont en petit nombre, et ne répondent pas au programme primitif.

La donnée première était en effet celle-ci : pour les gens de loisir animés de curiosités intellectuelles, l'enseignement supérieur, avec ses facultés, ses universités, offre de précieuses ressources. Il donne des cours publics dont peuvent profiter non seulement les étudiants régulièrement inscrits, qui poursuivent la conquête de grades universitaires et passeront des examens, mais encore toutes les personnes qui veulent et qui peuvent simplement s'instruire en écoutant des leçons intéressantes.

Le peuple, s'est-on dit, n'a rien de semblable à sa disposition ; nous allons lui donner cet enseignement supérieur ; ou mieux, nous allons lui fournir le moyen de se le procurer lui-même. Le jour étant absorbé par le travail, c'est le soir qu'on réservera aux leçons ; les auditeurs ne pouvant aller chercher la manne intellectuelle, c'est chez eux, dans leur quartier, qu'on viendra la porter.

J'ai un peu travaillé, comme beaucoup d'autres, à créer des universités populaires ; j'ai essayé d'y apporter un mince concours en disposant des soirées qui pouvaient me rester libres ; et c'est de mes yeux qu'il m'a été donné de pouvoir constater ainsi de bien singuliers résultats. Je vais m'efforcer de résumer le plus brièvement possible les impossibilités générales qui s'opposent au fonctionnement qu'on avait rêvé.

D'abord, du côté des auditeurs, excès de fatigue après une journée de travail intensif ; il faut de l'héroïsme, je l'ai déjà dit, pour aller écouter des leçons dans des conditions pareilles, et les héros sont rares ; j'en ai vu, qui dormaient consciencieusement, et n'étaient pas venus dans l'intention de dormir.

Du côté des conférenciers, loisirs irréguliers, entrecoupés ; donc pas de cours, pas de leçons suivies ; conférences sur des sujets disparates, et ne pouvant guère contribuer à la formation de l'esprit.

Du côté des fondateurs, fréquemment, une énorme majorité de petits bourgeois, d'employés, de gens très bien intentionnés, mais sans aucune connexion avec la classe laborieuse. On a ainsi des Universités Populaires sans peuple. Dans l'une de celles-là, un soir, je trouvai trois auditeurs ; le secrétaire m'avait écrit la veille pour me rappeler ma promesse ; il était absent. La conférence, à nous quatre, fut pleine de cordialité. Et comme je déplorais cette décadence : « Nous marchons au contraire fort bien, me fut-il répondu ; il y a 200 à 250 inscrits ; seulement chacun verse sa cotisation, en se disant que l'instruction est nécessaire pour le peuple, mais que personnellement, lui, *le souscripteur,* n'en a aucun besoin. »

Et toutes les conférences se passaient à peu près dans les mêmes conditions.

Enfin, toutes les difficultés signalées vinssent-elles à disparaître, il en resterait encore une, supérieure à toutes les autres : c'est le manque de flexibilité du cerveau qu'apporte l'âge, joint à l'inaction. Lorsque l'intelligence n'a pu s'exercer de façon continue, lorsque les années ont passé, que certaines idées se sont incrustées, le nombre est bien faible de ceux qui peuvent encore avoir la capacité d'écouter, de raisonner, de critiquer. La conséquence, c'est qu'en matière d'éducation populaire, c'est sur la jeunesse, sur l'adolescence exclusivement qu'il faut faire porter l'effort. Ce sont ces générations qui ont en germe, dans leurs têtes et dans leurs cœurs, les transformations prochaines du monde.

Les vieux sont trop vieux, trop peu modifiables ; leur suprême désir doit être que leurs enfants soient mieux armés pour la lutte qu'ils ne le furent eux-mêmes ; leur suprême effort doit être de tout faire pour qu'il en soit ainsi.

Quelques U.P. se sont orientées dans cette voie ; quand aux autres, il est à désirer qu'elles subsistent. Mais leur rôle se bornera à l'organisation de bibliothèques de prêts, à l'institution de spectacles intellectuels, ou de fêtes familiales. Leur portée sociale et éducative ne franchira pas ces modestes limites.

VIII. LE PROLÉTARIAT DEVANT L’ÉDUCATION

Il est peut-être plus facile maintenant au lecteur de comprendre l’exactitude de certaines affirmations que j’ai produites plus haut, sans avoir la possibilité ni le désir de les appuyer de preuves. La bourgeoisie contre-révolutionnaire, sortie de la Révolution, a commis, à son point de vue, une faute capitale, lorsqu’elle a fait le simulacre d’instituer l’instruction gratuite et obligatoire. L’adoption de la République, celle du suffrage universel, n’étaient rien à côté de cette concession. La classe gouvernante a démontré que sous le nom de République, on peut gouverner comme gouvernent les monarchies ; elle a établi que le suffrage dit universel est un instrument sans danger, entre des mains habiles et peu scrupuleuses ; on le conduit comme une bête bien dressée. Mais laissez aux cerveaux les opprimés la moindre fissure permettant de s’évader vers la lumière, quelle imprudence ! Elle fut inspirée par la peur ; on se proposait bien d’accorder le nom et pas la chose ; la preuve en est qu’après vingt ans d’instruction obligatoire, le nombre des illettrés est encore considérable. Mais on avait admis un principe, on avait entrebâillé une porte. Il est désormais trop tard ; cette porte, on ne peut plus la refermer, et c’est par là que commence à passer déjà la révolution qui substituera un monde nouveau à la société présente.

Le peuple, actuellement, est toujours dans l'ignorance ; mais il sait que l'éducation est un bien ; il sait aussi qu'à ce bien, il a droit, en la personne de ses enfants qui montent à la vie. Ce droit, il l'exigera sans tarder. Et qu'on le comprenne bien, il ne s'agit plus de torturer de pauvres petits enfants auxquels on fera réciter quelques formules creuses apprises par cœur, pour les rejeter ensuite dans la vie, en leur disant : c'est bien suffisant pour vous. On se garderait même de réclamer pour eux le bénéfice de l'enseignement secondaire actuel ; le cadeau serait funeste. Ce qu'il faut, ce qui existera, parce que cela ne peut plus être autrement, c'est un enseignement intégral, préparatoire à la vie, utile à celui le reçoit à tous les instants, et limité uniquement dans sa durée par les capacités de celui qui le reçoit.

A tous, l'initiation. A tous la possibilité de l'étude. Et la prolongation de l'étude, aussi loin qu'il est possible, à tous ceux qui se montrent capables d'en profiter.

Une fois ce régime établi, naturellement, on verra disparaître cette hideuse excroissance universitaire qui s'appelle le baccalauréat, cette peau d'âne si indispensable aujourd'hui aux petits bourgeois, qui ne prouve rien, qui ne sert à rien, et sans laquelle on ne peut rien.

Mais les petits bourgeois, dont la destinée aujourd'hui est d'aller au lycée, grâce à l'argent de la famille, pendant que les petits prolétaires vont en apprentissage, que deviendront-ils ? Ce qu'on voudra et ce qu'ils pourront ; ils bénéficieront même des loisirs résultant pour eux de leurs situations privilégiées. Seulement, ils rencontreront la concurrence de la masse intelligente des enfants du peuple, et il en résultera peut-être quelques déplacements de situation.

Aujourd'hui, il est dans l'ordre des choses que les médecins, les avocats, les magistrats, les ingénieurs, les hauts fonctionnaires, les officiers… se recrutent dans la bourgeoisie. En admettant, par hypothèse, l'utilité sociale de ces diverses situations, cette exclusivité ne me semble pas nécessaire. Tels fils de bourgeois serait beaucoup mieux à sa place, et beaucoup moins malfaisant, derrière le comptoir d'un honnête épicier que derrière celui de Madame Thémis, où il trône à l'heure actuelle, revêtu d'un déguisement du moyen-âge.

Cette question de l'enseignement, de l'éducation, sous sa vraie forme, ne semble pas s'être posée encore impérativement. Mais il faudrait être aveugle pour la nier ; les crises multiples de l'enseignement secondaire, dont nous avons parlé plus haut, l'annoncent d'une façon évidente ; ce sont les premiers coups de cloche du tocsin.

Un autre élément, encore, moins visible aujourd'hui, mais qui ne tardera pas à produire son effet, c'est la séparation des Églises et des États. Si insuffisante, si contradictoire que soit la loi dans son texte, il faudra pourtant bien lui faire produire ses conséquences, au moins en partie. Or l'un des points par lesquels l'Église catholique s'attachait le plus énergiquement à l'État, c'était le lycée, c'était l'enseignement secondaire. Quand on aura invité MM. les aumôniers des divers cultes à débarrasser de leur présence les établissements d'instruction, quand aura cessé ce scandale d'une « instruction religieuse » donnée officiellement au nom d'un État qui se proclame laïque, un changement bien profond se produira, et l'avènement de l'enseignement intégral, rationnel et à base scientifique ne se fera plus longtemps attendre.

IX. CONCLUSION ACTUELLE

Le titre « L'Éducation de Demain », que j'ai choisi, m'oblige à présenter quelques explications, en terminant cette étude rapide. Que veut dire ce mot « demain » ? J'entends par là ce qui succédera nécessairement à l'état de choses actuel. Ce sera peut-être dans un an, peut-être dans un siècle.

Ce que les gouvernements doivent souhaiter, s'il leur reste une parcelle quelconque de sens critique, c'est que la transformation dont il s'agit s'accomplisse dans le plus bref délai. On ne peut en effet pousser l'illusion jusqu'au point de s'imaginer que l'état social actuel soit destiné à durer. Les fissures apparaissent de toutes parts, les craquements se font entendre ; vraisemblablement, c'est sous la poussée des causes économiques et financières que se produira l'écroulement final, inévitable, un peu plus tôt, un peu plus tard ; selon qu'alors on se trouvera en face d'une masse humaine ignorante, incapable de volonté, accessible à toutes les impulsions, ou bien d'une population rationnelle aux luttes de la vie, la physionomie de l'événement sera fort différente. Dans le dernier cas, le passage d'un état de choses au suivant pourra se faire pacifiquement ou à peu près, sinon, ce sera une ère de violences dont aucun des exemples du passé ne saurait nous donner une idée exacte.

En aucun cas, les dirigeants d'aujourd'hui ne sauraient prétendre à garder leurs privilèges, pas plus que les nobles de l'ancien régime ne gardèrent les leurs à la fin du XVIIIe siècle. Ils auraient donc tout à gagner à préparer dès maintenant les voies à une transformation des esprits qui serait une sorte de soupape de sûreté contre les accidents à prévoir.

Ceci les regarde, et nous n'y pouvons que peu. La seule chose certaine, c'est que ce qui est ne peut durer. Et la chose très probable selon moi, c'est qu'une fois la crise passée, le problème de l'éducation sera résolu sous la forme que j'ai indiquée ci-dessus.

De ce que sera cette organisation sociale, en dehors de la question de l'éducation, je ne me suis pas préoccupé ; ceci est en dehors de mon sujet. Mais si je m'étais proposé d'étudier simplement une question philosophique et théorique, je serais arrivé à des conséquences beaucoup plus brèves et beaucoup plus simples. Le jour, en effet, où la terre sera peuplée d'êtres raisonnables, les enfants seront élevés raisonnablement, d'une façon toute naturelle ; la liberté résoudrait toutes choses en s'aidant de la force que donne l'association.

Mais il serait bien chimérique de s’imaginer que la chute du système social actuel fera tout à coup luire la raison, comme par un coup de baguette magique, dans les cerveaux obscurcis qui composeront encore la plus grande partie de l’humanité. Il faudra sans doute encore bien du temps, avant qu’aux générations barbares d’aujourd’hui soit venue se substituer une humanité civilisée; c’est ce qui nous fera passer, vraisemblablement, par des états intermédiaires où les lois, les contraintes extérieures joueront encore un rôle; ces états ne seront pas plus insupportables que celui sous lequel nous vivons; la chose est assurément impossible; mais ils laisseront subsister des organisations collectives destinées à disparaître plus tard. C’est pourquoi j’ai ajouté à cette conclusion l’épithète «provisoire».

Il est bien des points que j’ai dû laisser dans l’ombre. Il en est un cependant, que je ne veux pas passer entièrement sous silence, et dont je dirai quelques mots seulement en terminant cette étude. C’est celui de l’égalité des sexes devant l’éducation, et, comme conséquence, de la co-éducation.

Dans tout système rationnel et humain, la co-éducation s’impose; elle seule est morale; elle seule peut former des êtres humains sachant se respecter mutuellement, ayant de part et d’autre la conscience de leur dignité et de leur souveraineté sur eux-mêmes. Seul le fanatisme des abominables religions de haine et de mort a pu empoisonner notre éducation de l’odieux préjugé sexuel. Dans l’éducation professionnelle seule, la séparation a sa raison d’être, lorsqu’il s’agit de professions spéciales à un sexe ou à l’autre, les êtres humains, hommes ou femmes, étant égaux en droit et en dignité, dissemblables en aptitudes.

Mais, cette réserve mis de côté, il n’y a aucune objection possible contre un système d’éducation qui n’a donné que les meilleurs résultats, partout où l’on en a fait franchement et honnêtement l’application. Même en France, cette terre bénie des préjugés et de la routine, un admirable éducateur, Paul Robin, ne succomba dans sa tentative que sous les coups de la calomnie cléricale.

Il serait bon de ne pas déshonorer le joli mot d’*innocence* en le détournant sans cesse de son étymologie. Or, rien n’est moins innocent, rien n’est plus nuisible que l’ignorance. L’ignorant est un danger perpétuel, pour lui-même et pour les autres, par cela seul qu’il ne sait pas. Même avec de bonnes intentions, il est capable de tout.

Et c’est pour cela que nous voulons par des flots de lumière, par un torrent de vérité, faire graduellement une humanité éclairée, consciente, qui sache et qui veuille, véritablement innocente, dans le sens le plus élevé du mot, parce qu’elle aura rejeté tous les préjugés de caste, de situation, de nationalité, de sexe, qui engendrent la haine et encombrent la route vers l’avenir.

Charles-Ange Laisant (1841-1920), injustement oublié aujourd'hui, est un important mathématicien français qui était aussi anarchiste. Il nous laisse en outre une œuvre de pédagogue et de philosophe de l'éducation dont témoignent les deux écrits ici réunis. Ils sont longuement remis en contexte et présentés par Normand Baillargeon.

Le premier texte est une contribution à l'enseignement et à la vulgarisation des mathématiques (*Initiation mathématique*) ; le deuxième, une réflexion sur la nature et les fins de l'éducation menée dans une perspective libertaire (*L'éducation de demain*).

Ces écrits intéresseront tout particulièrement les mathématiciens et les didacticiens des mathématiques, mais aussi toutes les personnes curieuses de l'histoire des mathématiques, de l'histoire de l'éducation ou de celle de l'anarchisme.

Normand Baillargeon est philosophe, essayiste et chroniqueur. Il a publié, édité ou traduit plus d'une soixantaine d'ouvrages traitant de philosophie, de politique, d'éducation ou de littérature, ainsi que des centaines d'articles et de chroniques sur tous ces sujets.

Aussi en version numérique

www.pulaval.com

ISBN 978-2-7637-4566-4

9 782763 745664

Presses de l'Université Laval

Philosophie

Collection dirigée par
Normand Baillargeon