Yvon Gauthier

Passages à la limite et seuils critiques

Morceaux Choisis/Selected Papers

Logique de la science

PUL

Du même auteur

L'arc et le cercle. L'essence du langage chez Hegel et Hölderlin, Desclée de Brouwer/ Bellarmin, Paris/Montréal, 1969.

Fondements des mathématiques. Introduction à une philosophie constructiviste, Presses de l'Université de Montréal, Montréal, 1976.

Méthodes et concepts de la logique formelle, Presses de l'Université de Montréal, Montréal, 1978, 2e éd., revue, corrigée et augmentée, 1981.

Théorétiques. Pour une philosophie constructiviste des sciences, Le Préambule, Longueuil, 1982.

De la logique interne, Vrin, Paris, 1991.

La logique interne des théories physiques, Vrin/Bellarmin, Paris/Montréal, 1992.

La philosophie des sciences. Une introduction critique, Presses de l'Université de Montréal, Montréal, 1995.

Logique et fondements des mathématiques, Diderot, Paris, 1997, 2e édition, 2000.

Logique interne. Modèles et applications, Diderot/Modulo, Paris/Montréal, 1997.

Internal Logic. Foundations of Mathematics from Kronecker to Hilbert, Kluwer, "Synthese Library", Dordrecht/Boston/London, 2002.

La logique du contenu. Sur la logique interne, l'Harmattan, Paris, 2004.

Entre science et culture. Introduction à la philosophie des sciences, Presses de l'Université de Montréal, Montréal, 2005.

Logique arithmétique, Presses de l'Université Laval, Collection « Logique de la science », Québec, 2010.

Hegel. Introduction à une lecture critique, Presses de l'Université Laval, Collection « Logique de la science », Québec, 2010.

Towards an Arithmetical Logic, The Arithmetical Foundations of Logic, Birkhäuser, Basel, 2015.

Nouveaux Entretiens sur la pluralité des mondes, Presses de l'Université Laval, Collection « Logique de la science », Québec, 2018.

Passages à la limite et seuils critiques

Morceaux Choisis/ Selected Papers

Yvon Gauthier

Passages à la limite et seuils critiques

Morceaux Choisis/ Selected Papers

Presses de
l'Université Laval

Financé par le gouvernement du Canada
Funded by the Government of Canada

Nous remercions le Conseil des arts du Canada de son soutien.

We acknowledge the support of the Canada Council for the Arts.

Les Presses de l'Université Laval reçoivent chaque année de la Société de développement des entreprises culturelles du Québec une aide financière pour l'ensemble de leur programme de publication.

Mise en pages : Diane Trottier
Maquette de couverture : Laurie Patry

Dépôt légal 1er trimestre 2020
ISBN : 978-2-7637-4827-6
ISBN PDF : 9782763748283

Les Presses de l'Université Laval
www.pulaval.com

Table des matières

DEUXIÈME PARTIE – SELECTED PAPERS

Avant-propos

Dans ce recueil, j'ai voulu regrouper des textes publiés en français et en anglais dans les vingt dernières années ; ces textes font écho à mes recherches dans le domaine des fondements de la logique, des mathématiques et de la physique dans une perspective constructiviste depuis un demi-siècle. C'est donc un parcours fondationnel sur la longue durée que j'ai voulu reproduire sans négliger la dimension critique des enjeux scientifiques de la logique, des mathématiques et de la physique avec la vigilance philosophique qui remet aussi bien en question la philosophie traditionnelle dans ses retranchements métaphysiques. Cet assemblage n'est pas un florilège, mais plutôt un pot-pourri de textes parus dans des revues qui ne sont pas facilement accessibles pour mes articles en anglais qui composent un *medley* d'articles scientifiques sans musique, mais avec un *leitmotiv* et des thèmes majeurs récurrents.

J'ai ajouté des commentaires introductifs pour chacun des articles pour les situer dans le temps de leur publication et dans les débats actuels touchant le savoir scientifique. Certains textes ont hérité de commentaires plus généreux que d'autres en vertu des enjeux contemporains qui les ont suscités. On ne sera pas étonné que de nombreuses répétitions, redites et recoupements émaillent ce recueil de morceaux choisis. J'adopte dans mes commentaires comme dans les articles commentés la même posture constructiviste que j'ai défendue (et réitérée) depuis toujours. L'angle critique que j'applique dans les questions fondationnelles vise aussi bien la philosophie qui semble avoir la part congrue dans ma démarche, mais je revendique un legs conceptuel qui ne va pas puiser dans le fonds métaphysique de la tradition pour s'immiscer dans le discours scientifique. Je pense ici à la métaphysique traditionnelle que je congédie tout de go, mais j'écarte aussi les tentatives de quelques logiciens, mathématiciens ou physiciens de relancer la question d'un surplus métaphysique de la science, surtout dans le sillon de la philosophie analytique ; par exemple un

Tim Maudlin qui projette la physique dans un ontologie réaliste d'un univers-bloc d'un seul tenant éternaliste. Des philosophes et logiciens recourent à la logique modale comme chez Timothy Williamson pour la lester d'un surpoids métaphysique par des mondes possibles à l'exemple du philosophe David Lewis, champion du réalisme modal. D'autres encore veulent introduire des modalités (nécessité et possibilité) dans le ciel intelligible des idéalités mathématiques dans une tentative d'exploration d'un au-delà du réel physique ou dans la recherche d'analogies transmondaines comme chez un Michel Bitbol en philosophie de la mécanique quantique – ou Fritjof Capra naguère dans son *Tao of Physics*. Les apôtres d'un renouveau transcendantal en philosophie des sciences ou en épistémologie veulent faire une relecture à peu de frais de l'héritage kantien en débordant le cadre critique que Kant avait tenté de définir.

Je n'ai pas tenu compte de ces travaux dans ce recueil, pas plus que je ne me suis intéressé à la philosophie spontanée ou aux aspirations métaphysiques de scientifiques comme Einstein ou Schrödinger. J'ai préféré m'attaquer directement au contenu du savoir, à sa logique interne selon une formule que j'affectionne, et prendre de front les questions formelles et les problèmes techniques tout en ne retenant que l'hypothèse ou le motif recteur constructiviste dans la constitution du savoir scientifique de la logique à l'arithmétique comme pierre d'assises de tout l'édifice mathématique et à la théorie physique et ses modèles comme construction physico-mathématique. C'est dans la théorie de la mesure en physique théorique de la mécanique quantique à la cosmologie que l'observateur local (macro et micro) joue le rôle principal ; mais l'observateur local quitte son rôle physico-mathématique lorsqu'il devient l'interprète de son propre rôle et il devient alors un agent linguistique constructeur qu'une philosophie constructiviste désigne comme unique sujet créateur du savoir. La leçon philosophique enfin se résume à l'avertissement : le philosophe constructiviste doit être vigilant dans ses passages à la limite et tenter de repousser ses propres limites sans aller au-delà du seuil critique d'un savoir fini.

* * *

Mes remerciements les plus vifs vont à mon ami André Baril pour son travail inlassable de relecture vigilante.

Introduction

Dans cette introduction, je veux retracer rapidement les étapes de la question des passages à la limite et des seuils critiques. Cette question est au cœur des mathématiques, de la logique, de la physique et ultimement de la métaphysique dans la tradition philosophique. J'aborde les trois premiers thèmes dans cette introduction, réservant le quatrième pour la conclusion.

1. MATHÉMATIQUES

Dans un texte de 1960, le grand mathématicien français André Weil nous incite à passer *De la métaphysique aux mathématiques*[1], mais il ne faut pas croire qu'il s'agit d'un pamphlet anti-métaphysique. André Weil fait allusion plutôt au calcul infinitésimal selon le titre d'un ouvrage de Lazare Carnot de 1797 *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*; d'Alembert avait aussi parlé de « la vraie métaphysique du calcul infinitésimal » à propos du calcul différentiel[2] dans l'*Encyclopédie* de Diderot. Leibniz, l'inventeur du calcul, avait déjà décrété que les infiniment petits n'étaient qu'une fiction utile et Carnot avec d'Alembert et Lagrange diront qu'on doit les négliger dans le calcul en fin de compte. On ne s'intéressera pas ici à l'histoire des infiniment petits, entités métaphysiques qui ont connu une renaissance mathématique sous le nom de nombres *hyperréels* dans l'analyse non standard contemporaine, mais les hyperréels n'ont plus rien de métaphysique et ils sont devenus de véritables objets de calcul. Dans la question de l'infini, il faut faire une place spéciale à la géométrie projective classique qui a introduit les notions de point à l'infini, de droite à l'infini et de plan à l'infini qui servaient à compléter l'analyse des figures géométriques. La géométrie algébrique contemporaine a ajouté la notion d'espace projectif qui absorbe en quelque sorte les diverses notions *à l'infini* dans une géométrie n-dimensionnelle purement algébrique en vue d'une arithmétique polynomiale où le calcul revient à la charge.

Le passage à la limite en mathématiques est en général l'approche de la fonction d'une variable à un point limite représenté par un nombre réel fini ou par ∞, l'infini qui n'est jamais atteint, seulement approché et s'il est atteint, le mathématicien dira *en l'infini* plus ou moins, $+\infty$ ou $-\infty$. Je ne veux pas refaire non plus l'histoire de la notion du passage à la limite, mais on peut marquer les grands moments de l'algébrisation de l'arithmétisation de l'analyse chez Cauchy, Weierstrass, Dedekind et Cantor.

Dans l'introduction de son *Cours d'analyse* de 1821, Cauchy avertit que :

> Mais ce serait une erreur grave de penser qu'on ne trouve la certitude que dans les démonstrations géométriques de l'analyse, ou dans le témoignage des sens.

et il propose de rechercher cette certitude dans les fondements algébriques de l'analyse ; il amorce dès lors son étude des fonctions réelles et de leurs limites, des polynômes comme fonctions continues et des séries convergentes et divergentes. Cauchy parle toujours en termes de quantités infiniment petites ou infinitésimaux, mais il les identifie avec des limites approchées par les fonctions d'une variable réelle. Les résultats importants de Cauchy dans ce domaine concernent la définition précise des limites 0 et ∞ pour une quantité infinie : il écrit « lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la limite de toutes les autres ». Pour les valeurs numériques, cette limite sera appelée l'infini positif $+\infty$ et l'infini négatif $-\infty$; ce sont là des quantités infinies, souligne Cauchy.

Weierstrass ne s'est pas contenté de la notion de variable approchant une limite. Dans son texte *Theorie der Maxima und Minima von Functionen einer und mehreren Veränderlichen* (Théorie des maxima et minima d'une ou plusieurs variables), Weierstrass innove avec son idée de la méthode ε-δ[3]. Le fait important est que comme Cauchy, Weierstrass s'exprime en termes du langage des polynômes, ce sont là le fondements arithmétiques et algébriques dans la tradition mathématique de Gauss à Kronecker. Dedekind et Cantor allaient franchir le seuil critique d'une arithmétique finie (polynomiale) en une arithmétique transfinie. Si Dedekind veut s'en tenir à un prolongement de l'arithmétique dans l'arithmétique supérieure (théorie des nombres et algèbre), Cantor fera le grand saut au-delà de la limite lorsqu'il écrit dans son texte de 1883 sur «Les multiplicités linéaires infinies de points»:

> On doit attirer l'attention sur ce point cardinal dont le sens peut être facilement mal interprété dans la troisième définition du nombre réel à l'aide des suites fondamentales comme
>
> $$\lim_{\nu\to\infty} \alpha_\nu = b$$
>
> un nombre *b* n'est pas défini comme la limite des parties α_ν d'une suite fondamentale (α_ν) ; ce serait là un erreur logique semblable à la discussion de notre première définition (de la limite comme somme) où l'existence de la limite
>
> $$\lim_{\nu\to\infty} \alpha_\nu$$
>
> serait seulement supposée ; c'est plutôt l'inverse que nous avons ici, puisque nos définitions antérieures du concept *b* avec ses propriétés et ses relations dans le système des nombres rationnels nous permettent de conclure avec certitude que la limite α_ν existe et est égale à *b*. Pardonnez mon insistance sur cette apparente vétille «*Kleinigkeit*».
>
> (ma traduction)

Cantor continue en affirmant que les nombres irrationnels ont droit au même statut de réalité déterminée «*bestimmte Realität*» dans notre esprit que les nombres rationnels. La limite

$$\lim_{\nu\to\infty} \alpha_\nu = b$$

existe réellement et les ordres arbitraires des suites fondamentales existent aussi bien. Dans les mots de Cantor, ce n'est pas un procès à la limite qui nous donne le nombre irrationnel, mais c'est la possession véritable de la limite (dans notre esprit) qui nous permet de comprendre ce qu'est le procès ou l'approximation de la limite. C'est ici il me semble que Cantor rompt radicalement avec la tradition arithmétique et un mathématicien comme Poincaré objectera par la suite que ce n'est pas le procès fini qui est une approximation de l'infini, mais plutôt l'infini qui est une approximation du fini…

La limite est franchie et le seuil est outrepassé puisque ce n'est qu'une idée dans notre esprit et l'on peut transcender le fini puisque la nouvelle métaphysique du transfini ou de l'infiniment grand chez Cantor rejette les infiniment petits pour les projeter dans les infinis grands, pourrait-on dire. On connaît la suite de la théorie cantorienne des ensembles qui a envahi les mathématiques contemporaines, de l'hypothèse du continu qui a préoccupé les mathématiciens de Hilbert à Gödel et jusqu'à Woodin qui pense que le continu est si riche qu'il faut aller au-delà des grands cardinaux de la théorie des ensembles et formuler un axiome V = Ω qui dit que le continu est tellement plein qu'il doit constituer une extension maximale de l'univers ensembliste. La théorie axiomatique des ensembles Z-F (Zermelo-Fraenkel) ne peut contenir l'ensemble de tous les ensembles et la théorie des ensembles de von Neumann-Bernays-Gödel y ajoute une théorie des classes propres qui ne sont pas des ensembles. Cantor pensait qu'il n'y avait pas d'ensemble de tous les ensembles, ordinaux et cardinaux, et qu'il s'agissait d'une multiplicité ou pluralité (*Vielheit*) absolument inconsistante. La théorie des catégories a cependant espéré aller plus loin que la théorie des ensembles en proposant la catégorie des (petits) ensembles. Mais la théorie des catégories (et des topoi) donne aussi dans la surenchère avec la catégorie des foncteurs entre catégories. Les notions de limite et de colimite apparaît ici comme une construction abstraite plus générale que la notion de limite en analyse ou en théorie des ensembles (ordinaux limites comme ω et ε) et les constructions catégoriques comme les extensions qualitatives de Kan et adjonctions de Lawvere qui généralisent des notions algébriques classiques de la théorie des groupes ; en réalité, les notions catégoriques font office ici d'internalisation dans une catégorie des notions de limites inductives et projectives pour les familles d'ensemble finis dans la théorie des ensembles de Bourbaki. Il est intéressant de noter que la notion de structure réapparait en théorie des catégories et en théorie de l'homotopie. La théorie des catégories d'ordre supérieur (catégories-∞) ou la théorie enrichie des quasi-catégories élaborée entre autres par le mathématicien québécois André Joyal et les univers toposiques de Grothendieck ne savent plus où trouver le bon cardinal (fortement inaccessible) de la théorie des ensembles Z-F pour retrouver le topos de base par descente infinie (ou transfinie) ou transitivité de haut en bas. C'est que la descente par les schémas au sens de Grothendieck était accompagnée de conditions de « finitude ». Un bel exemple de ces efforts de réduction se trouve dans l'ouvrage magistral de Jacob Lurie *Higher Topos Theory* qui tient à préciser qu'il ne veut pas aller jusqu'à k, un cardinal fortement inaccessible, dans les constructions de la théorie supérieure des topoi, mais il est obligé de recourir à l'itération transfinie $< k$ pour ses techniques de descente et d'*hyperdescente* pour les catégories-∞ (*infinity-categories*) bâties sur des empilements de groupoïdes finis – un groupoïde est un ensemble muni des opérations de groupe et d'une fonction binaire partielle. La catégorie des catégories ou métacatégorie ou encore catégorie-2 finit par se loger dans la structure cumulative des rangs de Z-F avec axiome de fondation de von Neumann, comme l'avait voulu l'un des pionniers de la théorie des *n*-catégories, S. Mac Lane. Si la descente transfinie est une technique centrale en théorie des catégories et des topoi en géométrie algébrique, comme elle l'est en théorie des ensembles et dans l'arithmétique ensembliste, la descente infinie (ou finie) de Fermat a repris ses droits en géométrie arithmétique classique et contemporaine. Certains croient que la théorie des topoi, une généralisation de la notion d'espace topologique, a permis l'unification de l'arithmétique (le discret) et la géométrie (le continu), mais le mariage est tendu et l'union avait été célébrée déjà dans les travaux arithmétiques d'André Weil. Il faut reconnaître cependant les vertus de l'entreprise de Grothendieck qui a introduit la notion de schéma, une généralisation de la notion arithmétique de système modulaire de Kronecker pour mieux naviguer dans l'univers ***toposique***, lui-même une généralisation de l'univers topologique ensembliste et de la topologie algébrique dont Brouwer est l'un des architectes principaux – ici la notion d'indice topologique, le *Windungszahl* ou « nombre de tours » d'une fonction est dû à Kronecker. C'est un juste retour des choses que la logique interne d'un topos soit naturellement intuitionniste ! Malgré le point de vue kroneckerien dont se réclame Grothendieck dans sa reprise du *Jugendtraum* ou rêve de jeunesse de Kronecker dont se réclame aussi Langlands dans son programme qu'on pourrait qualifier de nouvelle géométrie analytique, le programme de Grothendieck demeure inachevé. La théorie des motifs est en quelque sorte une arithmétique générale (*allgemeine Arithmetik*) de style kroneckerien qui vise à tisser les motifs qui relient arithmétique, algèbre et analyse à l'exemple du programme de Kronecker[4]. On parlera peut-être du *Jugendtraum* de Grothendieck dans l'avenir s'il se trouve des mathématiciens pour le réaliser. Entre-temps les conjectures dite standard de Grothendieck n'ont pas trouvé preneur, alors que les conjectures de Weil sur lesquelles s'est échiné Grothendieck ont été résolues pour la principale conjecture par un élève de Grothendieck, Deligne qui n'a pas suivi toutefois jusqu'au bout les directives de son maitre au grand dam de ce dernier, à ce qu'il semble… La théorie des catégories s'est tournée depuis vers la théorie de l'homotopie de Voevodsky formalisée dans la théorie constructive des types de Martin-Löf.

2. LOGIQUE

La logique baigne dans les mêmes eaux infinitaires que la théorie des ensembles, de l'arithmétique de Peano aux résultats de Gödel et Gentzen. Un premier exemple qui tente d'aller au-delà du modèle ensembliste est la théorie constructive ou intuitionniste de types de Martin-Löf, intuitionniste parce qu'elle rejette le tiers exclu dans un premier temps. Dans cette théorie, on construit des types dépendants dans une hiérarchie prédicative, c'est-à-dire que la correspondance Curry-Howard entre types (objets ou ensembles) et propositions logiques ou leurs preuves pour la théorie de Martin-Löf, ce qui lui permet de se prêter à la programmation et à la vérification automatique, e.g. le logiciel Coq du logicien et informaticien Thierry Coquand qui est utilisé notamment par les tenants de la théorie de l'homotopie de Voevodsky. Il y a donc d'une hiérarchie cumulative dans ce contexte à l'image de la théorie des types simples de Russell, les types dépendants jouant un rôle analogue aux types ramifiés de la théorie des types ramifiés, mais l'analogie s'arrête là, puisque la théorie russellienne s'en tenait aux types finis, ce qui lui a valu la remarque cinglante de Ramsey : toute nouvelle portée de cochons modifie la théorie des types ! On doit aux logiciens postérieurs, en particulier au québécois Maurice l'Abbé d'avoir proposé une extension infinitaire de la théorie russellienne, mais déjà Gödel dans son célèbre texte de 1930 sur l'incomplétude de la théorie des types et des théories apparentées avait enrichi la syntaxe de la théorie en introduisant un ensemble infini de variables dans le vocabulaire : ce qui a donné la consistance-ω qui a permis la production d'un énoncé indécidable par la méthode diagonale de Cantor. Gödel a d'ailleurs parlé d'un point de vue transcendant qui a rendu possible le résultat d'incomplétude.

Pour revenir à la théorie constructive des types héritière du calcul lambda de Church qui est une théorie combinatoire des types de Russell avec un opérateur d'abstraction fonctionnel λ, dès qu'elle quitte le fini prédicatif, elle s'étale dans le transfini par induction transfinie dont j'ai montré[5] qu'elle récupérait le tiers exclu dans le domaine imprédicatif des ordinaux transfinis et des grands cardinaux : on retrouve là les superunivers, le mégaunivers, les univers multiples, le multivers de Grothendieck qui sont tous à la recherche de leur cardinal fortement inaccessible, ou plus loin et plus haut. Le cardinal fortement inaccessible désigne un grand cardinal qui n'est pas accessible par les opérations de successeur et d'ensembles des parties sur les cardinaux plus petits de la structure cumulative des rangs de la théorie des ensembles ZFC (Zermelo-Fraenkel avec axiome du choix). Il faut donc transgresser les limites en particulier un ordinal limite, un ordinal qui n'est ni zéro, ni un ordinal fini, mais un ordinal infini, ω, qui n'a pas de prédécesseur immédiat, mais qui a toute une suite jusqu'à un autre ordinal limite ε_0, la limite des ω, qui est aussi un point critique, puisque $\varepsilon = \omega^e$; les points critiques de la théorie des ensembles sont des copies ensemblistes des points critiques en topologie différentielle, par exemple une fonction s'annule $f(0)$ à un point critique, mais on peut passer outre par continuation analytique et en topologie algébrique un point fixe est un point 0 où on a $f(x_0) = x_0$; plus communément en logique les points critiques sont des points fixes d'une fonction $f, f(x) = x$.

Au-delà du premier ordinal non dénombrable, différentes échelles permettent de grimper plus rapidement dans le ciel intelligible des ensembles transfinis où l'on doit monter sur plusieurs échelons à la fois dans des hiérarchies ascendantes de fonctions ordinales croissantes, e.g. les hiérarchies de Veblen ou Grzegorczyk, d'où l'on ne peut redescendre qu'en slalom ensembliste géant sans pouvoir atterrir par descente finie à la ligne d'arrivée.

La limite lim $\omega = \varepsilon_0$ de la suite des ω a été exploitée par Gentzen dans sa preuve de la consistance de l'arithmétique de Peano qui a pour limite lim $n = \omega$. La preuve par induction transfinie est opérée dans une théorie arithmétique sans quantificateurs, mais les dérivations sont indexées par des ordinaux accouplés à des nombres naturels témoins ou accompagnateurs n, de sorte que l'on peut imiter la descente infinie sur les ordinaux finis, descente infinie dont Gentzen dit d'ailleurs qu'elle est une forme déguisée de l'induction complète ! L'appréciation de la preuve de Gentzen pour la consistance de l'arithmétique de Peano relève d'un point de vue personnel, comme l'admet S.C. Kleene, l'un des grands promoteurs de la théorie des fonctions récursives qui tirent le meilleur profit des ordinaux dénombrables en deca de ε_0 avec les ordinaux de Church-Kleene.

Les théories qui exploitent les ressources offertes par l'ensemble puissance des sous-ensembles de cardinalité $2^{\aleph_0}$ de l'ensemble des nombres naturels de cardinalité $\aleph_0$ tentent de coloniser le continu ; l'hypothèse du continu de Cantor suppose qu'il n'y pas de cardinal entre $\aleph_0$ et $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Le sentiment actuel après les preuves de Gödel et Cohen sur l'indépendance de l'hypothèse de la théorie des ensembles

ZFC est que l'hypothèse est fausse et que le continu a une cardinalité arbitraire > $\aleph_1$.

La théorie des ensembles post-cantorienne a cependant tenté de remplir le continu à l'aide d'axiomes forts d'infinité en plus de l'axiome du choix, le lemme de Zorn qui stipule que tout sous-ensemble de N possède un élément maximal ou le théorème de Zermelo sur le bon ordre des sous-ensembles de N, i.e. toute partie non vide de l'ensemble infini de cardinalité $\aleph_0$ admet un plus petit élément.

Notons enfin que la théorie axiomatique des ensembles Z-F est une théorie du premier ordre du point de vue logique comme l'est l'arithmétique de Peano. Le premier ordre signifie que l'on ne s'occupe que d'individus ou d'objets (nombres) individuels. La théorie Z-F traite ses sous-ensembles, c'est-à-dire les propriété des ensembles du premier ordre dans un théorie du second ordre de même que l'arithmétique de Peano passe au second ordre pour traiter les propriétés des nombres naturels et devient alors l'analyse ou théorie des nombres réels qui peuplent le continu.

Pour en finir avec le compte de l'infini, faudrait-il revenir à l'infini potentiel d'Aristote pour qui l'infini était intraversable, mais Gentzen pensait qu'il était potentiellement traversable (*ein potentielles Durchfahren*). Une fois passé au delà de la limite avec l'itération ou l'induction transfinie, c'est comme si on voulait revenir en arrière au point de départ par descente transfinie, ce qu'on appelle aussi récursion transfinie en théorie des ensembles. Pour Hilbert, le détour (*Umweg*) devait le ramener à l'arithmétique finie. Gödel a plutôt choisi la voie transcendante de la consistance oméga (ω) pour démontrer l'incomplétude de l'arithmétique infinie. Même Brouwer qui pensait que le continu est un procès en devenir (*ein Prozess im Werden*) et qui voulait se distancer de Cantor a dû faire un arrêt pour l'ensemble infini – ou l'espèce dans son vocabulaire – des nombres naturels. Tarski qui faisait une distinction nette entre systèmes infinitistes en acte et systèmes potentiellement infinitistes a pourtant formulé la théorie des cardinaux inaccessibles, mais il aussi formulé la théorie de la décision pour l'algèbre et la géométrie élémentaires (du premier ordre) en suivant la route de la réductibilité algébrique de Kronecker. En fin de compte, les voies de l'infini mènent dans un au-delà sans limites : ce qui ne serait qu'une *façon de parler* pour Gauss est devenu avec la théorie des ensembles transfinis de Cantor et ses avatars logiques une *façon de penser* qu'on peut croire irréductible.

Il est bien évident que le remplissage du continu mathématique n'est pas réservé aux mathématiques ou à la logique. Le continuum physique n'est pas moins riche que le continu mathématique et les questions de cardinalité se retrouvent à couvrir également le continu et le continuum spatio-temporel surtout en relativité générale RG et en mécanique quantique et théorie quantique des champs, la relativité restreinte RR s'en tenant à la physique terrestre de Galilée à Einstein.

3. LA PHYSIQUE

La physique contemporaine est évidemment une consommatrice naturelle de la théorie des nombres réels (et complexes) qui sont le matériau du continu dans l'univers physique microscopique et macroscopique. C'est que la notion d'espace est principalement en jeu dans la physique et la notion d'espace-temps si l'on veut vivre dans ce que Minkowski appelait le monde absolu (*die absolute Welt*) du continuum quadridimensionnel dans sa formulation de la relativité einsteinienne. Pour la mécanique formalisée par von Neumann, l'espace de Hilbert est un espace vectoriel de dimension finie ou infinie (dénombrable à valeurs dans les nombres réels et complexes. Cet espace est complet et les suites (de Cauchy) de nombres convergent, c'est-à-dire ont une limite $n \to \infty$. Mais ce sont les axiomes ou postulats physiques de la mécanique quantique (MQ) qui sont déterminants : les états physiques sont représentés par des vecteurs d'état – un vecteur représente une quantité linéaire mesurable –, il y a une bijection entre observables (quantités mesurables) et opérateurs mathématiques, l'évolution du système physique est définie par la fonction d'onde ψ régie par l'équation de Schrödinger et la probabilité de détection d'une particule dans une position r donnée relève de la règle de Born lors de la mesure effectuée par un système observateur et enfin le postulat de projection ou réduction du paquet d'ondes stipule que lors de la mesure la superposition d'états dans la fonction d'onde est réduite à un seul état.

C'est donc la théorie de la mesure qui est au cœur des fondements de la MQ et le nœud de ses interprétations philosophiques.

La théorie de la mesure que j'ai toujours défendue consiste en l'interaction d'un système observé et d'un système observateur que je désigne comme observateur local, qu'il s'agisse d'un appareil de mesure ou de tout autre agent, humain ou non-humain, micro ou macro, robot ou autre, capable d'enregistrer une information *finie* dans une mesure probabiliste effective – ce que j'appelle l'observateur local markovien[6]. Cette théorie de la mesure est fondée sur les relations d'indéterminité ou d'indétermination de Heisenberg, appelées communément relations d'incertitude, qui prévoient qu'une mesure ne peut donner de résultats exacts ou parfaitement déterminés pour les variables conjointes comme la vitesse et la position d'une particule; ces relations de non commutation des variables canoniques sont d'origine conceptuelle (mathématique) et doivent nécessairement faire partie de la mesure expérimentale. Par ailleurs, la mesure probabilitaire de la règle de Born pour la fonction d'onde donne une valeur qui correspond au carré de la fonction d'onde $|\psi|^2$ et cette valeur est déterminée par un calcul fini.

La fonction d'onde elle-même a la cardinalité du continu $2^{\aleph_0}$ puisqu'elle est définie sur l'ensemble des nombres réels et complexes **R** et **C**; en réalité quantique, cette fonction d'onde est composée d'une infinité non dénombrable d'ondes individuelles superposées, c'est le principe de superposition des états quantiques. Dans une mesure expérimentale d'une particule individuelle par un compteur Geiger par exemple un électron qui peut avoir deux états superposés pour son spin + 1 (ou ½) et – 1 (ou – ½), c'est un seul état qui donne le résultat de mesure. Les états peuvent être intriqués et c'est ce qui a donné naissance au paradoxe d'Einstein-Podolsky-Rosen qui supposait que dans la paire d'états, la mesure d'un état ne perturbait pas l'autre état complémentaire et qu'il y avait donc une action à distance ou interaction non locale, ce qui contrevient au principe de la relativité restreinte qui interdit un telle action à distance, que Einstein qualifiait de toute façon de fantomatique (*spooky*).

Bohr avait répondu à l'époque que le paradoxe ne tenait pas compte de la situation expérimentale de la mesure et la réponse contemporaine est que si une telle interaction à distance était possible, elle ne contiendrait aucune information: cela signifie que la mesure qui produit l'information dans un résultat local abolit la distance, ce que certaines interprétations de la MQ appellent «décohérence».

Les exposés populaires qui sont le fait de physiciens ou de philosophes laissent croire qu'une particule peut être dans deux ou plusieurs états simultanément ou dans deux locations (bilocation) en même temps; les états superposés sont simultanés dans l'univers mathématique de la fonction d'onde, mais dès qu'il y a une mesure physique, un seul état pur est l'objet d'un résultat de mesure. Les autres états sont le fruit de l'imagination de physiciens vulgarisateurs ou de philosophes démesurés !

Les interprétations modales proposées aussi par des philosophes supposent, pour écarter le principe de projection ou d'effondrement du paquet d'ondes, que le possible devient réel dans la mesure, le possible étant le continu ou continuum physique dans tous ses états superposés. Ce relent réaliste *modalisé* n'est pas au diapason de l'interprétation constructiviste de la mesure et occupe une position mitoyenne entre le constructivisme radical et le réalisme littéral qui, dans son interprétation naïve, soutient que la physique quantique doit être la copie exacte d'un réel physique indépendant de la mesure.

Le problème central de l'ontologie quantique, c'est l'accessibilité de la fonction d'onde dans l'équation de Schrödinger ; la fonction d'onde vue comme amplitude ou densité de probabilité a en réalité la densité de l'intégrale de probabilité et même au-delà de sa limite infinie et l'équation de Schrödinger qui décrit son évolution temporelle ne peut empêcher son effondrement ou sa réduction finie dans une mesure finie – qui peut comporter jusqu'à 16 décimales pour la mesure de la constante α du réglage fin dont la valeur approximative est de $^1/_{137}$ dans l'électrodynamique quantique. Les interprétations réalistes du continu quantique sont acculées à l'inconsistance[7], tout comme les autres interprétations réalistes en théorie de la relativité générale ou théorie de la gravitation (avec ondes gravitationnelles, mais pas encore de gravitons). On va même jusqu'à recourir aux multivers ou à un mégaunivers pour tenter de rendre compte de l'inconsistance d'un Big Bang singulier tout comme l'interprétation de H. Everett qui postule un multivers ramifié de cardinalité non dénombrable $2^{\aleph_0}$ et un observateur interne qui serait perché sur une seule branche. Il s'agit là d'une singularité aussi intrigante que la singularité du Big Bang ! Ici les limites de l'interprétation réaliste dépassent les limites de l'univers et même de l'ontologie quantique en rejoignant le multivers de Grothendieck – dont les U-topoi forment une véritable *U-topia* – et rejoint le multivers de la théorie des grands cardinaux avec l'axiome de $V = \Omega$ de Woodin pour le plérôme ensembliste du continu.

La relativité générale et la cosmologie relativiste ou autre ne sont pas en reste dans le franchissement des limites et les scénarios cosmologiques rivalisent lorsqu'on arrive aux seuils spéculatifs des limites de l'univers observable jusque le multivers par définition inobservable. De la théorie de cordes, supercordes ou membranes à la théorie de la gravité en boucles en RG, la gravitation sans gravitons tourne en rond sur les hypothèses holographiques d'un univers bidimensionnel sur disque aplati prenant un volume tridimensionnel dans l'œil holographe de l'observateur local ou du cryptographe qui imagine un univers comme ordinateur universel capable de générer l'information par-delà la limite entropique (de Bekenstein) qui vient s'évanouir dans un trou noir. Ces scénarios cosmologiques relèvent d'une supraphysique reléguant dans un arrière-plan philosophique la métaphysique ancienne, comme a voulu le penser S. Hawking qui a, lui aussi, son histoire d'un univers illimité sans frontières ou sans bords. Le grand mathématicien Bernhard Riemann qui était aussi un peu philosophe avait conçu un espace qui pouvait être illimité sans être infini, c'est-à-dire une surface, mais une surface de Riemann même bidimensionnelle est un objet mathématique qui n'a pas de *réalisation* physique, en dépit des vœux des scénaristes du cosmos qui, en postulant des univers 10^{500} de la théorie des cordes ou l'univers éternel cyclique ou en boucles *graves* ou de gravité (*loop gravity*), rêvent d'une Théorie du Tout dans une imagerie conceptuelle qui n'est pas sans rappeler les élans spéculatifs des métaphysiciens du passé ou des poètes visionnaires (comme Edgar Allan Poe).

Si des phénomènes de réfraction ou de diffraction de l'infini ou du transfini se produisent dans le fini, la physique concrète a ses seuils critiques dans les changements d'états ou transitions de phase ; en thermodynamique par exemple, les seuils critiques ont un contenu concret, les états de la matière sont assujettis à des mesures précises dans les phénomènes de fusion, diffusion, condensation, vaporisation, percolation ou supraconductivité à l'échelle nanométrique, jusqu'aux brisures spontanées de symétrie dans les systèmes dynamiques comme l'électromagnétisme ou la mécanique quantique ou encore dans la cosmologie relativiste – pour la dissymétrie matière-antimatière – ou encore pour la brisure supersymétrique, mais ces derniers exemple relèvent de la physique théorique. En vertu de sa teneur empirique, la physique expérimentale peut rendre la mesure des phénomènes terrestres sans les projeter dans un au-delà méta-physique[8]. Cela vaut aussi bien pour la chimie et la biologie jusqu'aux sciences cognitives et l'intelligence artificielle où la posture constructiviste ne cède pas de terrain à l'attitude *ontique* (ou réaliste) par opposition à l'approche *épistémique* (ou constructiviste) Je prends pour exemple en biologie le célèbre texte de 1944 *What is Life* du physicien Erwin Schrödinger dans lequel il tentait d'établir les fondements de la vie biologique sur la chimie d'un cristal apériodique devenu un quasi-cristal depuis ; ce qui nous intéresse ici, c'est la notion d'apériodicité en thermodynamique (théorie de la chaleur) et Schrödinger pensait qu'en accord avec la seconde loi de la thermodynamique classique, l'entropie comme mesure du désordre croissant dans un système isolé, il fallait une entropie négative – appelée néguentropie par Léon Brillouin et qu'on identifie maintenant à l'information contenue dans le système observé – pour produire l'ordre du vivant dans un système ouvert. On sait que Schrödinger a formulé une équation d'onde déterministe pour la mécanique quantique et que ce n'est que lors de la mesure du système observé en interaction avec un système observateur qu'intervient la probabilité. Or le cristal ou quasi-cristal apériodique a un comportement stochastique comme tout système dynamique en vertu de son apériodicité et ce n'est que dans la mesure ou l'interaction avec un environnement mesureur qu'on peut définir le patron de diffraction ou de diffusion. Le chimiste Dan Shechtman obtient en 2011 le prix Nobel de chimie pour avoir montré que les quasi-cristaux (apériodiques) métalliques ont un patron de diffraction discret, ce qui n'était pas prévu par Schrödinger dans son attitude ontique qui confinait la vie au génome moléculaire, mais l'important dans cet exercice de chimie quantique concrète et de biologie constructive, c'est l'attitude épistémique de l'observateur local que j'ai appelé « markovien » qui seul peut déterminer le contenu informatif d'une chaine de Markov apériodique, puisque l'information d'un processus stochastique ne peut être traitée que par un observateur stochastique qui prend la mesure de sa propre marche aléatoire.

Enfin, un bel exemple de la chasse aux infinis en physique théorique, c'est le problème de la renormalisation en théorie quantique des champs[10]. Depuis le problème du rayonnement du corps noir en thermodynamique classique avec la catastrophe de l'ultraviolet qui entrainait une puissance de rayonnement infini jusqu'à l'électrodynamique quantique ou se faufilaient des infinités rampantes qui ont été éliminées par des techniques mathématiques comme le groupe de renormalisation sur treillis discret (K. G. Wilson) ou la régularisation par réduction dimensionnelle de 'tHooft, ce qui amena un des champions de la théorie de la renormalisation, F. Dyson, à faire la distinction entre un observateur idéal qui suppute des quantités infinies divergentes et capables d'une précision infinie comme dit Dyson et l'observateur réel qui les élimine au profit de mesures expérimentale finies ; cet observateur réel est un observateur local qui calcule et qui s'arrête au passage à la limite sur le seuil critique du savoir. Un autre exemple aussi éloquent et dans le même esprit est la théorie de la matrice de dispersion (*S-matrix*) qui régit la distribution de la population particulaire de la mécanique quantique. Elle concerne aussi le problème de la consistance ou l'auto-consistance d'une théorie physique et Dyson remarque que cette matrice de dispersion doit être finie pour ne pas être submergée par des divergences infinies. Le problème de la consistance des théories physiques remonte à Hilbert en 1926 et consiste essentiellement dans la logique interne d'une théorie qui doit pouvoir définir ses procédures déductives à l'intérieur de son domaine d'application. C'est A.S. Wheeler qui a défini ces conditions d'application en 1937 pour la matrice S et Heisenberg a emboîté le pas en 1943. Mais c'est Geoffrey Chew qui relance le programme dans les années 1960 : ce programme tient dans la formule du *bootstrap* que je traduis par *corset* et qui consiste à contraindre l'univers particulaire à se contenir dans la démocratie des interactions entre particules élémentaires sans la suprématie de particules plus élémentaires que d'autres – c'est ce que contestera la théorie des quarks et des gluons de Murray Gell-Mann et alii qui aura la préséance avec la théorie de la chromodynamique quantique jusqu'à récemment. La théorie de la matrice *S* aura cependant inspiré la théorie des cordes (supercordes ou membranes ou D-branes) qui est aussi une théorie consistante au sens où elle est renormalisable et finitaire du point de vue des contraintes de sa logique interne : c'est le sens du *bootstrap* ou corset qui traduit l'auto-consistance de la théorie. Récemment, le physicien N. Arkani-Hamed a renouvelé le programme de la matrice *S* de dispersion en y joignant une amplitude de dispersions (*l'amplituhèdre*), c'est-à-dire la somme ou l'intégrale des dispersions, toujours dans le cadre de l'auto-consistance d'une théorie qui fait l'économie des notions d'espace et de temps au profit de l'auto-détermination du monde quantique. Rappelons que l'équation de Schrödinger pour la fonction d'onde ψ comme amplitude ou densité de probabilité représente une réalité objective pour les réalistes, mais ce n'est que l'intégrale de tous les chemins possibles chez Feynman qui n'a pas de signification mathématique précise par ailleurs. Ce réservoir de probabilités est en réalité un ensemble de potentialités (ou de propensités, comme le pensait Popper) ou encore de possibilités (dans les interprétations modales) qui donnent l'illusion réaliste d'un contenu déterminé pour la fonction d'onde de la cardinalité infinie du continu, mais la mesure ne produit qu'un événement singulier dont la probabilité est donnée par $|\psi|^2$ qui a une valeur finie. L'avantage ici de la théorie de la matrice *S* dans l'interprétation de Heisenberg réside dans le fait que les états d'un système quantique ne sont pas liés par une évolution temporelle comme dans l'équation déterministe de Schrödinger ; le résultat net est la génération de figures géométriques comme l'amplituhèdre ou l'espace de Calabi-Yau pour la théorie des supercordes qui structurent un cosmos spatial où le temps n'est plus une dimension intrinsèque comme dans l'espace-temps de Minkowski. L'espace lui-même ne serait-il qu'un fin tissu de relations entre structures *n*-dimensionnelles qui en « composeraient la broderie », selon le mot de Descartes à propos des courbes algébriques ?

L'indétermination essentielle de la fonction d'onde avant la mesure est la caractéristique dominante de l'interprétation de Copenhague de la MQ. Ce n'est là toutefois qu'une avenue parmi d'autres dans l'univers ouvert de la mécanique quantique et la cosmologie physique n'en est pas à un rebondissement près – je fais allusion ici à la théorie du rebond (*bounce*) qui imagine une suite de bonds et de rebonds cosmiques plutôt que l'événement singulier d'un *Big Bang* originel qui à partir d'une extrême énergie ponctuelle se serait gonflée grâce à un champ inflationnaire (*l'inflaton*) pour donner l'univers actuel qui pourrait se dégonfler jusqu'à une nouvelle fluctuation du vide quantique[11]. La cosmologie physique se heurte ici à ses propres limites, celles d'une supraphysique qui s'apparente à une métaphysique, au delà ou après la physique, selon le sens qu'on veut donner à la philosophie première d'Aristote.

C'est dans cette optique de *l'horizon récessif* du savoir en logique, mathématiques, et physique que j'ai choisi d'intituler ce recueil *Passages à la limite et seuils critiques* tout en réservant le rôle de *gardienne des limites* à la critique philosophique.

NOTES

1. Voir André Weil, *Œuvres Scientifiques. Collected Papers*, vol. II, Springer-Verlag, New York, p. 468.

2. Dans le calcul différentiel l'expression d*y*/d*x* indique la limite du rapport des accroissements finis de y et de x lorsqu'ils tendent vers zéro. Rappelons que dans le calcul intégral, l'intégrale définie $\int_b^a f(x)\,dx$ indique aussi une limite (de sommes).

3. Ce couple ε-δ se retrouve dans la formulation de la continuité d'une fonction :

   $$\forall\varepsilon > 0\,\exists\delta > 0\ \forall x \in I\ [(\,|\,x - a\,| < \delta \rightarrow |\,f(x) - f(a)\,| < \varepsilon)]$$

   pour $a \in I$ un intervalle sur les nombres réels **R**. On trouvera plus de détails dans mon ouvrage *Logique arithmétique. L'arithmétisation de la logique* (PUL, Québec, 2010, chap.1).

4. J'ai bien dit algèbre plutôt que géométrie, puisque la géométrie algébrique et la géométrie arithmétique, que Grothendieck désigne comme géométrie algébrique abstraite, sont fondées sur les variétés algébriques qui ont pour base l'algèbre polynomiale en plusieurs indéterminées et une variété algébrique devient un schéma de type fini sur un corps (fini) de nombres. La notion centrale de schéma chez Grothendieck est une généralisation de la notion de système modulaire (*Modulsystem*) ou système de diviseurs de Kronecker, comme l'a reconnu Grothendieck dans le classique SGA de 1960 ; la notion de gerbe de modules est encore une autre généralisation de système de modules ; la généralisation consiste ici à faire de l'anneau des polynômes de l'arithmétique générale de Kronecker un *espace localement annelé* qu'on peut généraliser en espace de modules qu'on retrouve jusque dans la théorie topologique du champ quantique, par exemple dans la théorie des cordes ou supercordes. Si l'un des objectifs principaux de la géométrie arithmétique est le comptage de points rationnels d'une courbe elliptique sur la base d'équations polynomiales dans un espace projectif sillonné par des *drapeaux* ou points de marquage de la suite (finie) croissante des nombres naturels, on n'est pas si éloigné de l'analyse numérique et de la méthode des éléments finis en physique mathématique et en ingénierie où l'on a un *espace polynomial concret*, tout comme dans les computations de la théorie de la complexité algorithmique ou de l'informatique théorique (et pratique) !

   La géométrie (ou la topologie) se résume ici à la plongée des applications ou structures polynomiales dans un espace topologique. Tout cela est en accord avec le point de vue de l'algèbre polynomiale de la théorie des diviseurs de Kronecker. La théorie des motifs de Grothendieck est encore construite sur la base des schémas et vise à décrire les motifs qui lient ensemble arithmétique, algèbre et topologie pour en dégager les correspondances ou équivalences numériques, comme dit Grothendieck. Ce langage rappelle celui de Kronecker dans sa leçon inaugurale à l'Académie des sciences de Berlin en 1861 lorsqu'il avoue que l'étude de la multiplication complexe – sur les nombres complexes – des fonctions elliptiques l'a conduit à des travaux dont l'objet est l'analyse, dont le motif est l'algèbre et le fil directeur la théorie des nombres. Ce motif des correspondances entre courbes algébriques et variétés algébriques a d'ailleurs été mis de l'avant par André Weil dès 1948 dans son texte séminal *Courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent*. Rappelons que Descartes dans sa *Dioptrique* évoque les motifs géométriques « pour en composer la broderie », celle des courbes algébriques qu'il est le premier à introduire. Cette étude des courbes algébriques a donc une longue histoire de Descartes à Weil et Grothendieck entre autres dans la tradition mathématique française. C'est dans la même tradition française qu'est apparue la notion de structure sous l'impulsion de Bourbaki et de son chef de file André Weil – je renvoie là-dessus à mes articles déjà anciens «La notion théorétique de structure», *Dialectica*, vol. 23 (1969), 217-227 et «Constructivisme et structuralisme dans les fondements des mathématiques», *Philosophiques*, vol.1, no.1(1974), 83-105.

5. Voir mon article dans ce recueil sur *La descente infinie, l'induction transfinie et le tiers exclu.*

6. Le premier texte où apparaît l'idée de l'observateur local est mon article de 1983 «Quantum Mechanics and the Local Observer» dans *International Journal of Theoretical Physics* , vol. 22, no. 12, 1141-1152, mais la notion d'observateur était déjà présente dans mon article de 1971 «The use of the axiomatic method in quantum physics», *Philosophy of Science*, vol. 38 (1971), 429-437. C'est dans mon texte *From the Local Observer in QM to the Fixed-Point Observer in GR* paru dans *Advanced Studies in Theoretical Physics,* vol. 11, 2017, no. 12, 687-707 qu'on trouvera le dernier état de la question. Le texte est reproduit dans le présent recueil.

7. Voir mon texte dans ce recueil sur *Simple Inconsistency of Simple QM Interpretations and Related Mathematical Theories*.

8. On trouvera des échos de cette question cosmologique dans de nombreux textes de ce recueil et dans mon ouvrage *Nouveaux Entretiens sur la pluralité des mondes* (Québec et Paris, PUL et Hermann, 2018).

9. Voir là-dessus l'article dans ce recueil *From the Local Observer in QM to the Fixed-Point Observer in GR* et le commentaire afférent. Pour des informations pertinentes en biologie moléculaire, voir les travaux du philosophe des sciences québécois Tudor-Mihai Baetu, en particulier «Mechanisms in Molecular Biology» in Stuart Glennan and Phyllis Illari (Eds), *Routledge Handbook of Mechanisms and Mechanical Philosophy*, 2017, p. 308-318.

10. Voir mon article «The logical analysis of mathematical physics: the case of renormalization procedures in Quantum Field Theories», *Zeitschrift für allgemeine Wissenschaftstheorie*, vol. XV, nos 1-2 (1985), 251-260.

11. Ces questions reviennent dans plusieurs textes de ce recueil. Pour la théorie de la matrice *S*, je renvoie à mes travaux antérieurs sur la question dans *Théorétiques. Pour une philosophie constructiviste des sciences*, Le Préambule (1982), p. 129-133 et *La logique interne des théories physiques*, Bellarmin-Vrin (1992), p. 83-86.

* Note personnelle à propos de Geoffrey Chew, l'un des pionniers de la théorie de la matrice *S*. Il était directeur du département de physique de l'Université de la Californie à Berkeley au début des années 1970 et je l'ai rencontré à plusieurs reprises lors de mes visites à Berkeley à cette époque et il m'avait même invité à collaborer avec lui sur les fondements de la théorie de la matrice *S*. J'avais aussi assisté avec Chew à une conférence de son ami David Bohm à Berkeley. Dans le même contexte, lors d'une conférence à l'Université de Montréal dans les années 70, j'avais objecté à Y. Ne'eman, un des promoteurs de la théorie des quarks avec M. Gell-mann, que la théorie de la matrice *S* était une concurrente valide de la théorie des quarks et il m'avait répondu que comme dans le monde politique, la démocratie ne fonctionnait pas dans le monde des particules élémentaires! Y. Ne'eman a été ministre de la

science du gouvernement israélien dans les années 80. Quant à un autre pionnier de la théorie de la matrice *S*, J. A. Wheeler, j'ai fait état d'échanges personnels significatifs dans le deuxième texte de ce recueil.

PREMIÈRE PARTIE

MORCEAUX CHOISIS

CHAPITRE 1

Commentaire de « De la logique à l'arithmétique. Pourquoi des logiques et des mathématiques constructivistes ? »

Cet article a été publié dans la revue canadienne de philosophie *Dialogue*, vol. 57, no.1, (mars 2018), p.1-28. Il s'agit d'un texte informel sur la logique et les mathématiques constructives qui tente d'expliquer les enjeux des fondements constructivistes. D'emblée il est question de logique et d'arithmétique. Je veux retracer un parcours personnel dans l'étude de problèmes qui sont de nature philosophique aussi bien que logique et mathématique. J'esquisse dans ce texte ma réponse à des questions de philosophes qui ne sont pas les seuls non-initiés, oserais-je dire.

Je commence par le slogan constructiviste « Plus d'information, plus de certitude » que je veux expliciter brièvement. L'information ici doit être d'origine constructive et liée à des mathématiques élémentaires ou fondamentales, c'est-à-dire l'arithmétique des nombres naturels (et des entiers avec les opérations élémentaires, addition, multiplication, division…). En d'autres mots, l'information doit avoir un contenu numérique ou explicite en termes d'expressions polynomiales d'une arithmétique générale au sens de Kronecker – cette arithmétique générale ou polynomiale de coefficients entiers et de variables (indéterminées) doit être considérée comme une arithmétique générale d'entiers algébriques. Le contenu explicite se traduit ici en résultats computationnels ou en comptage numérique, un calcul ou un algorithme qui constituent des procédures finies de démonstration. En d'autres termes, l'information constructive ne peut être tirée de l'hypothèse d'un ensemble infini et les preuves indirectes ou de *reductio ad absurdum* qui ont résultat fini, par exemple le théorème de l'infinitude des nombres premiers d'Euclide qui ne requiert pas d'ensemble infini, produisent une information constructive *finitaire* sur la suite illimitée des nombres premiers. En fait, tous les théorèmes en théorie élémentaire des nombres ont un contenu informationnel constructif à commencer par le théorème fondamental de l'arithmétique « Tout entier strictement positif peut être écrit comme un produit de nombres premiers de façon unique » ; le théorème s'applique aussi bien en arithmétique polynomiale (l'arithmétique générale de Kronecker) et on peut formuler une version constructive du théorème fondamental de l'algèbre « Tout polynôme (non constant) à coefficients complexes admet au moins une racine », un théorème au départ non constructif. C'est là le sort de plusieurs théorèmes classiques en principe non constructifs dont on parvient à tirer une information constructive par des méthodes effectives, c'est-à-dire computationnelles ou algorithmiques dans un calcul fini.

Un résultat récent de Patey et Yokohama sur le théorème de Ramsey a montré qu'on pouvait réduire un problème de la combinatoire infinie ou infinitaire à un problème de combinatoire finie. Dans un théorème important, Ramsey, philosophe et mathématicien, avait proposé le problème suivant : si on a coloriage de deux couleurs d'un ensemble infini de paires de nombres naturels, alors il y a un ensemble infini (sous-ensemble) dont toutes les paires ont la même couleur. Les auteurs ont montré que le problème peut être réduit à une solution finitaire en termes de l'arithmétique primitive récursive, c'est-à-dire l'arithmétique ordinaire avec les opérations usuelles d'addition, multiplication, etc., dans un système formel de la logique élémentaire (du premier ordre). La leçon ici, c'est que la combinatoire infinie est une extension ensembliste infinitaire de la combinatoire arithmétique finie et que l'on peut espérer un retour de l'infini ensembliste dans le fini arithmétique.

Un autre fait mathématique est le caractère constructif de la méthode de la descente infinie ou indéfinie de Fermat – c'est en réalité une descente finie qui procède par voie indirecte ou réduction à l'absurde dans un segment fini de la suite illimitée des nombres naturels, d'où le contenu informationnel direct ou immédiat, puisque la voie indirecte correspond au tiers exclu évidemment valide dans le cas de situations finies et par définition décidables dans un calcul fini.

En réalité, l'hypothèse constructiviste stipule que le calcul est fini ou que la computation automatique sur le ruban infini d'une machine de Turing n'utilise qu'une portion finie du ruban[1] : le résultat est obtenu après un nombre fini d'étapes ou d'essais (*eine endliche Anzahl von Versuchen*) selon la consigne de Kronecker. Évidemment toutes les mathématiques ne sont pas constructives, mais l'hypothèse constructiviste consiste à fournir des preuves constructives de preuves non constructives dans le meilleur des cas, pour extraire le noyau constructif de la logique et des mathématiques non constructives qui sont fondées en dernière analyse sur l'arithmétique ; ainsi les programmes logiques d'extraction de preuves (*proof mining*) ou de ou mathématiques régressives (*reverse mathematics*) tentent de retrouver l'ossature constructive des mathématiques classiques[2]. Plus fondamentalement, les praticiens contemporains de la théorie des nombres *e.g*. l'approximation diophantienne, de la géométrie algébrique et arithmétique veulent récupérer l'héritage fermatien et kroneckerien avec des techniques de descente sur les assises polynomiales ou le comptage de points d'intersection des courbes elliptiques pour obtenir des résultats qui ne sont pas toujours effectifs, c'est-à-dire computables ou *explicitables*, comme le dit l'important mathématicien français Jean-Pierre Serre, mais qui contribuent à la sûreté des résultats ou à la certitude du savoir mathématique[3]. La démarche du logicien, du mathématicien et du philosophe, s'il en est, s'en trouve ainsi plus assurée…[4]

NOTES

1. Je n'aborde pas ici dans mon texte le problème de la complexité algorithmique en informatique. Le problème central dans ce domaine est la question P = NP ou P ≠ NP, ce qui signifie qu'un algorithme est exécuté en un temps de longueur polynomiale P ou que son résultat n'est vérifiable qu'en un temps polynomial non déterministe – un oracle ou un décision doit être prise à chaque étape de la vérification. Ce problème a été posé dans années 1970 par S. Cook pour la complexité des preuves en logique propositionnelle booléenne et par L. Levin pour la géométrie combinatoire des « pavages ». Pour plus de détails, voir mon ouvrage *Logique arithmétique. L'arithmétisation de la logique*, p. 103-106.

2. Le programme de *proof mining* a été inauguré par Kreisel et mené de main de maitre par Kohlenbach. Le programme de *reverse mathematics* de Friedman et Simpson vise essentiellement le dessein de traduire ou de réduire dans l'arithmétique formalisée de Peano les résultats classiques de la théorie des nombres. Bien avant ces programmes, Herbrand qui était arithméticien et logicien pensait que les énoncés arithmétiques démontrés par des moyens analytiques devraient éventuellement être démontrés par des moyens purement arithmétiques ; en d'autres termes Herbrand a été un logicien et mathématicien constructiviste d'avant-garde comme Skolem qui avait confessé par ailleurs son adhésion au finitisme kroneckerien à l'instar de Hilbert.

3. Pour les notions mathématiques utilisées dans ce texte informel, je renvoie à mes ouvrages plus techniques, *Fondements des mathématiques. Introduction à une philosophie cosntructiviste*, Montréal, Presses de l'Université de Montréal, 1976 et *Logique et fondements des mathématiques*, Paris, Diderot, 1997.

4. Je note ici que c'est le grand arithméticien français André Weil qui le premier a utilisé l'expression « logique interne » pour rendre le terme « *inhaltiche Logik* » du texte de Hilbert de 1926 « *Über das Unendliche* » (voir la référence 20 dans la bibiographie). On peut voir dans l'article qui suit et ailleurs l'usage intensif que je fais de cet héritage terminologique. Un mot enfin sur le vocable « constructivisme » et ses épithètes polymorphes. Le terme est polysémique et est souvent utilisé comme métonymie ou comme métaphore pour désigner des entreprises différentes, des mathématiques à la logique, à la sociologie, à la pédagogie, à la biologie, à la peinture et quoi encore. Il importe donc de fixer le vocabulaire et de ne pas mélanger les genres du constructivisme logico-mathématique au socioconstructivisme et autres variétés de ce qu'on pourrait appeler plutôt « constructionnisme ».

De la logique à l’arithmétique. Pourquoi des logiques et des mathématiques constructivistes ?

INTRODUCTION. L’ARITHMÉTISATION DE LA LOGIQUE

La réaction spontanée de nombreux logiciens, mathématiciens, scientifiques ou philosophes devant la question du constructivisme se résume souvent à l’interrogation : pourquoi restreindre le champ de la recherche au seul domaine des exigences et contraintes constructivistes ? Pourquoi se priver, par exemple, de la théorie des ensembles transfinis de Cantor ou de la théorie axiomatique des ensembles, de la logique classique et de ses ramifications et des autres théories mathématiques, comme la théorie des catégories ou la théorie des topoi ? Une première réponse consisterait à dire que même les théories non constructives ont des motifs constructifs à l’origine, à commencer par la théorie des ensembles de Cantor qui visait comme Weierstrass et Dedekind l’arithmétisation de l’analyse à l’instar de Kronecker qui a été son professeur avant de devenir son persécuteur selon la légende ! Pour la théorie axiomatique des ensembles, il y aussi une motivation constructiviste dans la structure cumulative des rangs avec axiome de fondation – dû à von Neumann inspiré par la descente infinie que Mirimanoff a réintroduite en théorie des ensembles (avec descente finie sur les ensembles que Mirimanoff appelle *ordinaires*). Quant à la théorie des ensembles de Bourbaki-Weil, elle repose sur le socle finitaire de la métamathématique hilbertienne elle aussi héritière du finitisme kroneckerien. La théorie des structures mathématiques à la Bourbaki trouve des échos dans la théorie des catégories qui tente de définir à nouveaux frais la notion de structure sans oublier que la structure est une construction oublieuse de sa genèse. Pour la théorie des topoi érigée par Grothendieck, le motif central de schème dans l’esprit de la théorie kroneckerienne des systèmes modulaires dont la logique interne relève de l’arithmétique et de la logique intuitionniste.

Et pourquoi se limiter à des méthodes constructives en physique théorique où les mathématiques classiques sont omniprésentes dans des théories comme la relativité générale, la mécanique quantique ou les théories unifiées, comme la théorie quantique des champs, la théorie des boucles quantiques ou encore la théorie des cordes, supercordes et membranes ? En un mot, pourquoi l'ascèse conceptuelle du constructivisme logico-mathématique ?

Une réponse immédiate est que le but de la recherche scientifique est l'accès à un savoir certain ou à la connaissance vraie selon la définition même de la science « épistémè » chez Aristote qu'on reconnaît comme l'initiateur de la logique formelle. Après Aristote, c'est David Hilbert qui a posé la même question et a inauguré la logique mathématique avec sa théorie des démonstrations (*Beweistheorie*) qu'il appelée aussi métamathématique, c'est-à-dire théorie logique des mathématiques. Bourbaki inspiré par Hilbert dans sa construction unitaire des mathématiques sur la notion de structure appellera cette métamathématique « mathématique formelle » dans sa *Théorie des ensembles*. Soit dit en passant, une théorie des structures, comme celle de Bourbaki, ou comme la théorie des catégories contemporaine, est une théorie des constructions qui ont oublié leur genèse ! Mais pour Hilbert il s'agissait de construire une théorie formelle des preuves en mathématiques dans un système axiomatique finitaire afin de démontrer la consistance ou la non contradiction des théories mathématiques, en premier lieu l'arithmétique. On rappellera que Gottlob Frege avait introduit en 1879 un idiome, une idéographie (*Begriffsschrift*) pour la logique formelle avec quantification sur laquelle il voulait fonder l'arithmétique dans son programme logiciste. Mais Bertrand Russell avait détecté un paradoxe dans le système frégéen des fondements de l'arithmétique, son axiome de compréhension qui embrassait trop en identifiant les ensembles avec leurs propriétés logiques. Russell voudra rebâtir avec l'aide de Whitehead l'édifice logiciste sur la base d'une théorie des types (objets singuliers et ensembles), mais la théorie comportait des axiomes non logiques, *e.g.* l'axiome de l'infini qui suppose qu'il y a un ensemble infini *complété* ou actuel que l'on désigne depuis Cantor, le créateur de la théorie des ensembles, par aleph zéro $\aleph_0$, la première lettre de l'alphabet hébreu. Cantor avait conçu sa théorie des ensembles transfinis sur le motif d'une arithmétisation de l'analyse, motif que partageaient des mathématiciens comme Dedekind et Weierstrass, alors que Kronecker a été le plus conséquent dans ce contexte en arithmétisant d'abord l'algèbre dans son arithmétique générale (*allgemeine Arithmetik*) qui visait à fonder l'ensemble des mathématiques sur la théorie des formes (*Formenlehre*), c'est-à-dire la théorie des polynômes homogènes qui fait l'économie des séries infinies et des nombres transcendants – qui transcendent l'algèbre – que l'on retrouve partout en mathématiques, de la théorie des nombres à l'analyse fonctionnelle, de la topologie algébrique à la géométrie algébrique et géométrie arithmétique. Ce programme de Kronecker servira même de motivation aux programmes fondationnels contemporains des Grothendieck et Langlands (voir Gauthier 15). André Weil (voir 29) a été l'un des premiers, si ce n'est le premier à parler du programme de Kronecker et montré le caractère fondateur de ce programme pour l'interaction entre théorie des nombres et géométrie algébrique tout en déplorant la méconnaissance de la théorie kroneckerienne chez la plupart des mathématiciens. Hilbert inspiré malgré lui par Kronecker qui a été son professeur adoptera en dépit de ses réticences le point de vue finitiste et pensera qu'il faut fonder ensemble la logique et l'arithmétique sur un même socle finitaire.

On a longtemps qualifié l'entreprise de Hilbert de formalisme, mais le formalisme ne désigne que l'écriture symbolique, le support matériel du formel, alors que la motivation profonde de la théorie des démonstrations est d'ordre conceptuel : c'est le finitisme qui exige que les preuves soient des suites finies de symboles à partir des axiomes en passant par les règles d'inférence pour arriver aux théorèmes dans une démarche de « pas à pas » (*Schritt zu Schritt*) en un nombre fini d'étapes – (*eine endliche Anzahl von Versuchen*) dans les mots de Kronecker – comme l'avait pratiquée dans ses travaux mathématiques Leopold Kronecker. Pour Hilbert, le système formel avec ses symboles, ses axiomes, ses règles d'inférence et ses théorèmes ne constitue qu'un appareil externe à la mathématique et Hilbert insistera sur le fait que la logique interne du contenu (*inhaltliche Logik*) ou la déduction logique du contenu (*das inhaltiche logische Schliessen*) des théories mathématiques n'est pas capturée par la logique formelle et c'est en introduisant des objets idéaux (*Ideale Elemente*) qu'il voudra prolonger la logique au-delà du fini pour préserver les avantages d'une théorie finitaire. L'outil formel que Hilbert privilégiera dans sa méthode axiomatique sera une fonction de choix transfinie (notée $\mathcal{E}$) pour définir le quantificateur existentiel et le quantificateur universel, mais ici le quantificateur universel ne s'applique que si la fonction de choix ne peut trouver de contre-exemple après un essai fini, *i.e.* une itération finie de la fonction de choix transfinie qu'il voudra ensuite éliminer pour redescendre sur les assises solides de l'arithmétique. Il pensera donc qu'il faut conserver le principe du tiers exclu cher à Aristote et à la logique classique, mais que les intuitionnistes comme L.E.J Brouwer rejetteront pour les suites infinies de nombres naturels, par exemple ; il dira dans son texte capital *Sur l'infini* (Hilbert 20) que la logique aristotélicienne n'a pas le caractère de la circonscriptibilité (*Übersichtlichkeit*) en ne distinguant pas le fini de l'infini et c'est pour cette raison que l'on doit introduire des objets idéaux qui viennent compléter le domaine des objets concrets d'un système formel finitaire. Hilbert croira ainsi pouvoir démontrer l'hypothèse du continu de Cantor qui stipule qu'il n'y a pas de cardinal entre le cardinal des nombres naturels et le cardinal des nombres réels – Cantor avait démontré qu'il n'y avait pas de correspondance biunivoque ou bijection entre les deux ensembles de nombres. C'était là le premier problème de sa célèbre liste de 23 problèmes en 1900, mais c'est le deuxième problème, le problème de la consistance de l'arithmétique qui nous intéresse ici et la réponse de Hilbert à la question « Pourquoi une théorie finitaire de la logique et le point de vue finitiste dans les fondements des mathématiques ? », c'est la sûreté (*Sicherheit*) de nos constructions qui doit garantir la certification (*Sicherung*) de nos résultats mathématiques.

Quoi qu'il en soit du programme de Hilbert dans sa forme originale, il faut reconnaître qu'après l'arithmétisation de l'analyse par Cauchy, Weierstrass, Cantor et Dedekind et l'arithmétisation de l'algèbre par Kronecker, c'est ce programme qui a inauguré l'arithmétisation de la logique qui sera poursuivi par Herbrand, Skolem, Gödel jusqu'aux théories algorithmiques et l'informatique théorique contemporaines (voir là-dessus Gauthier 9).

1. LA CONSISTANCE DE L'ARITHMÉTIQUE

Le problème de la consistance ou de la non-contradiction de l'arithmétique a été posé par Hilbert, mais sa solution par Gentzen, Ackermann ou Gödel fait appel à des moyens qui débordent le cadre finitiste dans lequel Hilbert avait d'abord formulé son problème. On sait que la formulation initiale de Hilbert, le programme métamathématique, voulait trop embrasser et que Gödel a montré en 1931 qu'il était irréalisable pour l'arithmétique de Peano, c'est-à-dire l'arithmétique ensembliste, dans les termes de Hilbert. Le résultat de Gödel n'exclut pas cependant, de l'aveu même de Gödel, d'autres formulations du problème de la consistance de l'arithmétique qui ne transcendent pas le programme finitiste. La formulation du problème chez Hilbert n'est pas sans ambigüité. L'arithmétique en question est l'arithmétique des nombres réels avec un axiome de continuité qui stipule dans sa version archimédienne qu'entre deux nombres réels *a* et *b* il existe toujours un entier positif *n*.

Dans l'esprit de Hilbert, une fois la consistance de cette arithmétique établie – c'est l'arithmétique qui lui avait servi de modèle de référence pour la consistance de la géométrie euclidienne – la consistance de l'analyse (avec des fonctions définies sur les nombres réels) et la théorie des ensembles devait s'ensuivre. Mais Hilbert insiste sur la nature finitaire de la preuve de consistance et il soutient qu'il s'agit pour l'arithmétique de démontrer la consistance d'un nombre fini d'axiomes finis» et qu'il n'est aucunement question de processus infini dans cette arithmétique. Et il ajoute qu'en cela il suit Kronecker. Or, pour être en mesure de suivre Hilbert ici, il faut remonter jusqu'à Kronecker et refaire le trajet qui a mené de Kronecker à Hilbert, c'est-à-dire refonder le programme de Hilbert sur le programme de Kronecker. C'est ce que je veux m'employer à faire dans ce qui suit en suivant la piste de la preuve de la consistance interne (*innere Widerspruchslosigkeit*) de l'arithmétique, selon l'expression originale de Hilbert.

C'est la piste que j'ai suivie dans un article «The Internal Consistency of Arithmetic with Infinite Descent» (Gauthier 7) et que j'ai reformulée dans sa version finale dans (Gauthier 10). L'arithmétique dont il s'agit n'est pas l'arithmétique ensembliste de Peano (AP), mais l'arithmétique de Fermat-Kronecker (AFK) baptisée ainsi parce que la descente infinie de Fermat y remplace le postulat d'induction de Peano et que les indéterminées de Kronecker y jouent le rôle de variables dans l'arithmétique générale des polynômes. Cette arithmétique comprend non seulement la théorie classique des nombres, mais aussi les structures abstraites de l'algèbre (corps ou domaines de rationalité) et les constructions fondamentales de la géométrie algébrique et de la géométrie arithmétique. Pour une telle arithmétique il y a une preuve de consistance interne, que j'esquisse ici à grands traits.

Je veux auparavant refaire l'histoire du problème de la consistance depuis Gödel. Le second théorème d'incomplétude de Gödel ou théorème sur les preuves de consistance interdit la formulation de la preuve de consistance de l'arithmétique de Peano (AP) avec les moyens de cette même arithmétique. Gödel admet dès le point de départ que ce résultat ne contredit pas le programme de Hilbert, puisqu'il peut exister des preuves constructives de la consistance qui échappent au cadre ensembliste de l'arithmétique de Peano. Gödel hésitera toujours, semble-t-il, à reconnaître que son résultat de 1931 portait un coup fatal au programme de Hilbert. Quoi qu'il en soit, Gödel s'appuie dans sa preuve sur ce qu'il appelle la consistance oméga (ω) et dans une note ajoutée en 1966 à la traduction de son texte de 1931 (18, 616-617), il parle de consistance externe (*outer consistency*). La consistance oméga ou la consistance externe est simplement la consistance du modèle $-\omega$ (ω pour le premier ordinal infini) unique de l'arithmétique de Peano du premier ordre avec un ensemble infini de nombres naturels. Dans les mots de Gödel, la consistance $-\omega$ est définie par les propriétés des nombres naturels. On sait que B. Rosser à réduit la consistance – ω de la preuve d'incomplétude à la consistance simple au prix de l'introduction de l'énumérabilité récursive que Church avait formulée pour établir l'indécidabilité récursive de l'arithmétique de Peano et la logique des prédicats du 1^er^ ordre (au-delà de la théorie des prédicats monadiques). La consistance-1 introduite par Kreisel en 1957 est un théorème de correction (voir Gauthier 6), qui stipule que si un énoncé est prouvable, alors il est vrai ; ce théorème ne constitue que la première partie du théorème de complétude de la logique du premier ordre qui stipule que tout énoncé vrai est en même temps prouvable – d'où l'incomplétude de AP qui stipule à son tour qu'il y a au moins un énoncé vrai qui n'est pas prouvable dans cette arithmétique. En se fondant sur le résultat de Gödel et avec la diagonalisation sur tous les prédicats récursifs, Church a montré, en particulier, qu'il n'y a pas de prédicat récursif binaire qui énumère (ou binumère) tous les prédicats récursifs unaires ; en d'autres mots, on peut définir une fonction sur les entiers qui ne soit pas calculable et comme Kleene l'a répété, la notion générale de fonction récursive ne nous livre pas de procédé constructif pour définir une fonction récursive particulière. Le problème réside évidemment dans le fait que la procédure diagonale est appliquée à l'énumération totale des nombres naturels et il est facile d'exhiber en arithmétique ensembliste un ensemble récursivement énumérable qui n'est pas récursif, *i.e.* dont le complément n'est pas récursivement énumérable (pour ces résultats, voir Gauthier 4).

Remarquons ici que le résultat d'incomplétude de Gödel repose sur une preuve syntaxique, la consistance oméga, et sur le procédé de la diagonalisation, d'autres preuves du résultat de Gödel sont possibles qui apparemment n'utilisent pas la diagonale de Cantor. Par exemple, G. Chaitin utilise la notion d'incompressibilité pour la compression algorithmique d'une suite infinie caractérisée par un nombre réel aléatoire Ω (grand oméga) – c'est là un procédé diagonal déguisé, si on veut, puisque la preuve fait appel à l'ensemble des suites infinies de nombres naturels. D'autres preuves, de Kreisel à Kripke, sont possibles qui recourent à des notions de la théorie des modèles (modèles non standard) ou encore à des concepts de la théorie de la récursion, mais toutes ces preuves requièrent un ensemble infini complété (dénombrable) de nombres naturels. De même, si l'arithmétique minimale de Robinson Q sans quantificateurs ni postulat d'induction apparait inoffensive du point de vue prédicatif, elle repose sur une sémantique ensembliste sous-tendue par l'ensemble infini des nombres naturels.

Ce qui nous importe ici, c'est de bien voir que la consistance externe de Gödel renvoie au modèle $-\omega$ de l'arithmétique de Peano dont on peut dire de surcroît qu'elle est $\omega-$complète dans ce contexte. C'est ce modèle unique extérieur au système formel qui justifie le point de vue de la sémantique ensembliste que Gödel a adopté. Tarski l'a bien vu qui remarque dans son texte (Tarski 25) que la consistance $-\omega$ et la complétude $-\omega$ requièrent un système « infinitiste » en acte avec une règle d'induction infinie (appelée aujourd'hui règle $-\omega$), alors que l'arithmétique classique n'est qu'un système potentiellement « infinitiste ».

Gentzen voudra reprendre en 1936 le problème de la consistance là où l'avait laissé Gödel tout en poursuivant le programme de Hilbert – comme le souhaitera Herbrand qui a fourni sa preuve (incomplète) de consistance en 1931. Mais c'est en recourant à l'induction transfinie à la manière d'Ackermann que Gentzen élaborera sa preuve. L'induction transfinie signifie que l'on étend l'induction complète ou infinie au-delà des ordinaux finis jusqu'aux ordinaux transfinis de la deuxième classe de nombres de Cantor limitée par l'ordinal ε_0, la limite des ordinaux ω. Gödel, de son côté, utilisera l'induction sur tous les types finis dans sa preuve (Gödel 17) de la consistance de l'arithmétique intuitionniste ; c'est pour lui une extension du point de vue finitiste, c'est-à-dire le programme finitiste de Hilbert, qui doit permettre de formuler la preuve de consistance. Il faut noter cependant que l'interprétation fonctionnelle – fonctions récursives sur les types supérieurs au type zéro des nombres naturels – va au-delà du point de vue finitiste en admettant les types comme objets abstraits dans un esprit intuitionniste. De toute évidence, il s'agit dans ce cas d'une notion très large de preuve constructive, puisque malgré le vœu d'une preuve de consistance interne d'une arithmétique réductible à l'arithmétique (abstraite) de Heyting, la quantification infinie sur l'ensemble des nombres naturels réintroduit le point de vue oméga de l'arithmétique de Peano et on doit conclure que l'arithmétique ensembliste (AP) est condamnée à une consistance externe qui repousse la limite ω des ordinaux finis jusqu'à la limite ε_0 (epsilon zéro) des ordinaux transfinis de la seconde classe de nombres de Cantor et même si ces ordinaux sont appelés constructifs, ils n'ont pas d'existence d'un point de vue constructiviste, celui que j'aborde maintenant.

2. ARITHMÉTIQUE

2.1 Le programme de Hilbert

Le programme de Hilbert peut être modifié, comme l'a suggéré Kreisel. La modification majeure que j'ai introduite dans un article de 1994 dans *Synthese* – « *Hilbert and the Internal Logic of Mathematics* » – repris dans (Gauthier 8) consiste à refonder le programme de Hilbert sur ce que j'ai appelé le programme de Kronecker après André Weil. Quand Hilbert, dans sa conférence "*Über das Unendliche*" » (Hilbert 20), explique que du point de vue finitiste (*finiter Standpunkt*) il y a deux sortes de formules en mathématiques, les premières qui correspondent aux énoncés finitistes et les secondes aux structures idéales – qui ne signifient rien – il ne fait que transposer Kronecker et son langage d'une arithmétique pure ou arithmétique générale et de ses extensions indéterminées (qui recouvrent les éléments idéaux) dans le contexte de la métamathématique ou théorie des preuves qu'il veut ériger. Mais si les opérations extra-arithmétiques de la logique ne signifient rien, pas plus que les grandeurs algébriques hors d'un domaine de rationalité, et si seule l'arithmétique est interne alors que l'algèbre est formelle, le système formel des opérations logiques n'aura que le rôle d'une extension dénuée de sens de l'arithmétique, à condition que cette extension soit consistante, c'est-à-dire qu'une fois éliminées les structures idéales (ou les indéterminées), on conserve toujours la validité des lois logiques (du domaine primitif de l'arithmétique) ou l'arithmétique pure du domaine de rationalité. On voit le parallèle évident entre la démarche de Kronecker et celle de Hilbert. La parenté est si grande qu'on peut supposer que Hilbert s'inspire toujours, consciemment ou non, de l'idéal arithméticien de Kronecker.

Les objets concrets qui vont remplacer les entiers dans la méta-mathématique hilbertienne sont les signes et la combinatoire finie qu'ils génèrent est le pendant formel de l'arithmétique. Au commencement est le signe ou le chiffre (*Ziffer*), c'est la devise philosophique de Hilbert dès 1902. Sur cette base finitaire on peut formaliser les théories mathématiques existantes en construisant ensemble logique et arithmétique. Cette logique arithmétique, comme nous pouvons l'appeler, constitue une logique interne qui, par-delà les preuves formelles des mathématiques ordinaires, doit mener à une preuve de non-contradiction des mathématiques, puisque l'objet de la méta-mathématique est l'ensemble des preuves mathématiques. Cette logique interne doit produire de nouveaux axiomes, alors que la logique formelle ne fait que dériver de nouveaux théorèmes des axiomes connus. La logique finitaire suffit à garantir la vérité intuitive de l'arithmétique élémentaire. On connait la définition hilbertienne de système formel avec connecteurs et quantificateurs. Les quantificateurs universel et existentiel sont définis à l'aide d'une fonction de choix ε (A) qui associe à tout prédicat un objet ou à toute fonction un nombre ; ainsi le quantificateur universel est défini par la fonction de choix qui ne peut trouver de contre-exemple au prédicat (ou à l'image de la fonction). Hilbert y ajoute l'axiome aristotélicien pour l'import existentiel du quantificateur universel et le principe du tiers exclu qui signifie que la négation du quantificateur universel implique l'existence d'un contre-exemple.

Bien que la fonction (logique) de choix ne soit pas constructive, Hilbert croyait que par son emploi réitéré un nombre fini de fois, la finitude de la procédure était assurée et qu'il était possible d'obtenir une preuve de consistance dans cette voie. Ackermann a pu ainsi obtenir une preuve de consistance de l'arithmétique en utilisant la méthode de la substitution ε élaborée par Hilbert et Bernays (voir 21).

On sait que l'espoir que fondait Hilbert de démontrer la consistance de l'arithmétique et au-delà, de l'analyse, ne s'est pas réalisé, sans doute parce qu'il s'éloignait trop du point de vue finitaire et qu'il voulait même justifier la théorie des ensembles transfinis de Cantor.

Le programme de Hilbert n'a pas échoué en vertu des résultats de Gödel sur l'incomplétude des systèmes formels contenant au moins l'arithmétique, il a échoué en tout cas parce qu'il a voulu aller plus loin que l'arithmétique au sens de Kronecker, arithmétique qu'on peut appeler finitaire ou prédicative et qui trouve des échos contemporains dans les travaux de E. Nelson (24). L'arithmétique prédicative exige des bornes supérieures (ou logarithmiques) tout autant que dans la théorie des systèmes d'invariants complets qui est fondée sur la théorie du corps (ou du domaine de rationalité) des fonctions algébriques de Kronecker. L'arithmétique de Peano, de ce point de vue, n'est évidemment pas prédicative en vertu du postulat d'induction.

Le point de vue génétique de Kronecker lui a permis d'échapper à la tentation formaliste infinitaire de Hilbert qui a cru finalement à la réalité des indéterminées formelles, pourrait-on dire, parce qu'il n'a pas réussi à les réduire ou à les éliminer. Par ailleurs, le point de vue prédicatif (formaliste ou nominaliste) de Nelson est plus près de Kronecker que de Hilbert, quoi qu'en pense Nelson. En effet, l'arithmétique prédicative s'adjoint des entiers non standard (infinitésimaux) $v = \infty$ à la manière des indéterminées de Kronecker et il y a passage de l'interne à l'externe dans une théorie interne des ensembles, mais la théorie malheureusement n'est pas prédicative cette fois. Seule une logique prédicative de l'arithmétique prédicative (sans induction infinie) semble répondre adéquatement au constructivisme de Kronecker.

Le formalisme de Hilbert ne serait donc que l'extension infinitaire (indéterministe, si l'on suit Kronecker) du point de vue finitiste (*finiter Standpunkt*) qui serait tributaire du constructivisme arithmétique de Kronecker. La vérité intuitive ou interne de l'arithmétique lui confère le statut d'une véritable logique arithmétique qui est au fondement de tout l'édifice mathématique.

En dépit de ses nombreuses attaques contre l'attitude de Kronecker qu'il qualifie à plusieurs reprises de « dictateur de l'interdit » (*Verbotsdiktator*), Hilbert a fini par reconnaître en 1930 que :

> « Kronecker a formulé clairement une conception qu'il a explicitée dans de nombreux exemples : cette conception correspond pour l'essentiel à notre point de vue finitiste » (19, 487).

Le finitisme de Hilbert est donc très proche par la filiation de Kronecker de l'intuitionnisme brouwerien et du constructivisme mitigé d'un Poincaré, par exemple. Ce finitisme n'est pas touché par les résultats d'incomplétude infinitaires, c'est uniquement son extension formaliste infinitaire avec son idéal de consistance absolue qui est affectée. Il n'est pas étonnant à ce compte que ce soit l'induction infinie, le postulat d'induction dans l'arithmétique de Peano, qui constitue l'obstacle majeur. La preuve de Gentzen de la consistance de l'arithmétique fait appel à une induction transfinie jusqu'à ε_0. Le postulat d'induction de Peano n'est pas prédicatif, l'induction transfinie ne saurait l'être. La logique interne de l'arithmétique requiert une induction bornée, une suite « effinie », *i.e.* potentiellement infinie, de nombres naturels, rien de plus. Kronecker, Poincaré, Brouwer ont reconnu le caractère ouvert du procès de l'induction que Poincaré préférait appeler *récurrence*. Les propriétés métamathématiques de consistance, complétude, décidabilité, etc., perdent leur signification concrète, génétique dans une théorie des démonstrations qui emprunte son arsenal infinitaire à la théorie des ensembles, s'associant par là à une théorie des modèles qui est essentiellement une sémantique ensembliste des théories logiques et mathématiques.

L'idéal de la consistance est pourtant simple : accéder pour l'analyse (et la théorie des ensembles) à la même certitude (*Sicherheit*) que possède l'arithmétique finie qui est le fondement intuitif dernier ; c'est pourtant cette même certitude qui devrait guider la métamathématique et sa logique interne (*inhaltiches logisches Schliessen*), selon l'expression de Hilbert. Que cet idéal se soit dévoyé dans un programme formaliste voué à l'échec n'a rien de surprenant, puisque Hilbert n'a pas su s'en tenir au cadre finitaire de l'arithmétique et de ses extensions indéterminées à la manière de Kronecker. Entre-temps, c'est Hilbert (ou son programme) qui a engendré la logique contemporaine par coups et contrecoups, de Herbrand à Gödel et de Tarski à Robinson. L'avenir proche de la logique, avec la théorie de la computation, les langages informatiques et la logique arithmétique, verra peut-être un retour à l'inspirateur de Hilbert, Kronecker et à son idéal arithméticien.

La posture finitiste n'a pas suffi à Hilbert, puisqu'il reproche toujours à Kronecker en 1930 d'avoir banni les méthodes de preuve infinitaires. Or, et c'est là une curieuse ironie de l'histoire, Gödel publiait en 1931 sa preuve d'incomplétude de l'arithmétique de Peano (*AP*) en utilisant une méthode de preuve infinitaire, le procédé de diagonalisation de Cantor sur l'ensemble infini des nombres naturels. Le second théorème d'incomplétude stipulait qu'une preuve de consistance pour *AP* ne pouvait être formulée avec les moyens de *AP*.

Pour certains, la diagonalisation de Cantor conserve un sens constructif, même si elle comporte la quantification universelle sur l'ensemble des entiers. Puisqu'elle puise dans l'ensemble complémentaire des entiers qui ne sont pas sur la diagonale – pour cette raison je préfère parler de la *codiagonale* de Cantor – la preuve de Gödel fait intervenir par la codiagonalisation l'ensemble des énoncés non diagonaux qui dès lors n'est pas récursivement énumérable ; en fait cet ensemble est non dénombrable puisqu'il recouvre l'ensemble des réels sur le parcours de la codiagonale qui devient par là fonction d'une variable réelle. C'est pour cette raison que la codiagonale sur tous les nombres de Gödel des énoncés de *AP* produit un *nombre de Cantor* dont on ne peut savoir s'il est dénombrable ou non (pour des détails là-dessus voir Gauthier 6). Cette curieuse situation, comme le disait Gödel pour l'autoréférence à propos du paradoxe du menteur, se répète ici dans le contexte du paradoxe de Skolem pour la théorie logique des prédicats du premier ordre incapable en principe de référer à l'ensemble des sous-ensembles P (ω) d'un ensemble infini dénombrable ω. Paradoxe éminemment sémantique, puisqu'il relève de la logique ensembliste du théorème de Löwenheim-Skolem, corollaire du théorème de complétude pour la même logique des prédicats du premier ordre obtenu par Gödel en 1930. La diagonale de Cauchy ou produit de convolution à l'encontre de la diagonale de Cantor, ne va pas au-delà de la suite des entiers : elle ne fait qu'entrelacer deux séries de puissances, $a_n x^n$ et $b_n x^n$, dans une troisième, $c_n x^n$. Il s'agit d'un procédé nettement constructif qui ne fait appel qu'à la sommation finie de coefficients entiers. Le produit de convolution est un instrument privilégié dans la preuve finitaire de la consistance de l'arithmétique dans la mesure où la théorie des polynômes (de degré fini) constitue le support, évidemment fini, des séries de puissances infinies.

2.2 Le programme de Kronecker

La même théorie des polynômes est au coeur de l'œuvre de Kronecker qui à élaboré une arithmétique générale (*allgemeine Arithmetik*) qui trouve son point culminant dans ses *Fondements (ou traits fondamentaux) d'une théorie arithmétique des grandeurs algébriques,* (*Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen*) – voir (Kronecker 23). La théorie des formes, comme on l'appelait à l'époque et que Hilbert et Emmy Noether ont achevée, est une théorie des polynômes homogènes. L'objet privilégié est ici la notion d'indéterminée que Kronecker emprunte à Gauss : ce sont les (*indeterminatae*) ou variables indépendantes des équations diophantiennes, équations indéterminées avec coefficients entiers. L'arithmétique générale de Kronecker est un calcul des indéterminées associées à une arithmétique des entiers et le programme de Kronecker consiste essentiellement à réduire toutes les grandeurs algébriques à une arithmétique des polynômes. On n'ignore pas qu'une fonction entière – qui prend toutes ses valeurs finies – qui n'est pas un polynôme est une fonction transcendante, *i.e.* n'est pas algébrique, mais l'idée de Kronecker est d'obtenir une théorie arithmétique où même les fonctions transcendantes, par adjonction des indéterminées, se ramènent à un calcul finitaire – de là sans doute le mot d'esprit qu'on lui attribue : « Dieu a créé les entiers, tout le reste est l'œuvre de l'homme », mais dans ses textes il affirme que les entiers sont aussi des constructions de l'esprit humain, comme Gauss l'avait professé.

Voyons cela d'une façon un peu plus précise. Pour Kronecker, la théorie arithmétique des grandeurs algébriques se résume à la théorie des fonctions intégrales entières qui inclut la théorie des fonctions rationnelles entières, c'est-à-dire des formes ou polynômes d'un domaine de rationalité (*Rationalitätsbereich*), un terme qu'il préférait à (*Körper*), une invention de Dedekind, corps en français, (*field*) en anglais, parce qu'il trouvait ce dernier trop chargé matériellement.

Le but de Kronecker était de formuler une théorie arithmétique des grandeurs algébriques ou, en ses termes, d'établir les fondements de l'existence arithmétique des quantités algébriques. Le passage des grandeurs rationnelles aux grandeurs algébriques doit conserver les mêmes déterminations conceptuelles (*Begriffsbestimmungen*) et les opérations arithmétiques doivent garder leur sens dans les domaines d'extension. Un principe d'association ou d'adjonction permet d'annexer les indéterminées, à la condition qu'elles ne modifient pas la structure du domaine d'origine (extension conservatrice). Kronecker compare ses indéterminées aux nombres idéaux de Kummer et aux fonctions transcendantes de Weierstrass : pour lui, ces adjonctions n'ont pas d'existence propre, puisqu'elles ne sont qu'une extension du domaine de l'arithmétique < *Gebietserweiterung der Arithmetik*>. Soumises au calcul de l'arithmétique, les indéterminées n'ont qu'un rôle dérivé, inessentiel et elles peuvent être éliminées. Il y a donc économie en entités réelles puisqu'on n'a pas besoin des nombres transfinis, transcendants ou irrationnels qui ne sont dès lors que des êtres idéaux gouvernés par les lois de l'arithmétique. Cette perte en idéalités mathématiques est largement compensée, aux yeux de Kronecker, par le gain constructif de l'arithmétique. Malgré ses voeux, Cantor ne pourra donner à son arithmétique transfinie le statut d'une arithmétique pure, puisqu'il devra accorder l'existence à des ordinaux-limites ou à des nombres critiques qui noient l'arithmétique dans une analyse infinie.

2.3 L'arithmétique fermatienne

Je caractérise l'arithmétique fermatienne par la méthode de la descente infinie qui est une méthode de preuve centrale en théorie des nombres de Fermat jusqu'à Kummer et au-delà jusqu'à Mordell, Weil et la géométrie algébrique contemporaine.

Fermat dit de la descente infinie (ou indéfinie) qu'elle est une *apagogê eis adunaton* ou une *reductio ad absurdum*. Il applique sa méthode au problème des triangles rectangles (dans les entiers rationnels) dont l'aire doit être un carré. S'il existait un tel triangle pour un nombre naturel n donné, nous dit Fermat, il devrait en exister un pour des entiers plus petits avec les mêmes propriétés ; et s'il y a un second, il doit y en avoir un troisième, un quatrième, etc. à l'infini. Mais cela est impossible, puisqu'il n'y a pas de suite descendante infinie dans les nombres naturels. Remarquons d'abord que la réduction est inoffensive ici, puisqu'elle est finitaire et la double négation qu'elle entraine est parfaitement légitime ; elle ne transcende pas le domaine du fini. La chose est plus évidente encore quand Fermat dit qu'il a appliqué sa méthode non seulement à des questions négatives, mais aussi à des problèmes positifs comme « tout nombre premier qui est plus grand qu'un multiple de 4 d'une unité, doit être composé de deux carrés ». S'il y avait un tel nombre premier plus grand qu'un multiple de 4 d'une unité, mais qui ne serait pas composé de carrés, il y en aurait un plus petit de même nature et encore de plus petits, jusqu'à ce qu'on atteigne 5, qui est le plus petit nombre ayant cette propriété. On doit alors conclure par voie indirecte que le théorème est vrai, mais Fermat l'emploie dans un contexte purement arithmétique. La différence essentielle réside dans la formulation constructive de Fermat et si la descente infinie est parfaitement acceptable en tant que *reductio ad absurdum*, l'induction complète infinie obéit au principe du tiers exclu via la double négation pour un ensemble infini (e.g. N) et est donc inadmissible d'un point de vue intuitionniste et plus radicalement encore d'un point de vue constructiviste finitaire. Une telle réprobation ne s'applique pas à la descente infinie et je tenterai d'en trouver la justification fondationnelle dans la suite. C. S. Peirce et Poincaré ont insisté sur le fait que la descente infinie n'est pas équivalente à l'induction complète.

L'arithmétique de Fermat est caractérisée par la méthode de la descente infinie et je soutiens que du point de vue métamathématique, c'est-à-dire du point de vue de la théorie des démonstrations, la descente infinie remplit le rôle de l'induction sans avoir recours à la notion d'ensemble infini. Il est évident que Fermat n'avait pas le point de vue – dans l'esprit. Fermat affirme qu'il a inventé la méthode de la descente infinie ou indéfinie, mais elle est déjà *in nuce* chez Euclide. Prenons, par exemple, la proposition 31 du livre VII des *Éléments* : « tout nombre composé peut être divisé par un nombre premier ». La preuve utilise une décomposition ou une réduction qui ne peut continuer indéfiniment puisque toute suite descendante de nombres naturels est finie. L'algorithme d'Euclide, qui anticipe la méthode de la descente infinie, est une méthode constructive pour trouver, par descente, le plus grand diviseur commun (p.g.d.c.) de deux entiers. On peut appliquer le même procédé aux polynômes. Le théorème d'Euclide sur l'infinité des nombres premiers qui énonce que les « Les nombres premiers sont plus nombreux que toute quantité définie (de nombres premiers) – c'est la proposition 20 du livre IX des *Éléments* – découle directement de l'algorithme de division. On a donc là une preuve constructive et l'infini dont il est question n'est que potentiel, en accord avec la doctrine d'Aristote dans sa *Physique*.

Le principe de la descente infinie peut être formulé de la façon suivante : si l'existence d'une propriété pour un nombre naturel *n* implique l'existence de cette même propriété pour un nombre arbitrairement plus petit, alors cette propriété est attribuable à des nombres de plus en plus petits *ad infinitum*, ce qui est impossible puisque toute suite descendante de nombres naturels est finie. Pour justifier le principe de la méthode, on se contente de remarquer qu'il n'y a plus de descente infinie dans les nombres naturels. Mais il s'agit en réalité d'un algorithme euclidien généralisé et comme l'a bien noté André Weil (28, 335-336), la descente infinie opère dans tout corps de nombres (idéaux ou polynômes) fini où le produit de deux entiers ordinaires (ou algébriques) est égal à une puissance (ou degré) et leur plus grand diviseur commun s'obtient pas descente finie. Ce principe de descente n'a pas besoin d'un quantificateur universel classique, mais d'un quantificateur *effini* pour la descente finie ou indéfinie, c'est-à-dire les suites indéfinies ou les suites infiniment processives de Brouwer.

L'arithmétique de Fermat est l'arithmétique classique avec descente infinie (sans quantification sur un ensemble infini).

L'arithmétique de Peano avec postulat d'induction est l'arithmétique ensembliste – on pourrait aussi bien l'appeler arithmétique de Dedekind-Peano puisque Dedekind a été le premier à formuler l'arithmétique élémentaire en termes ensemblistes.

3. LOGIQUE

3.1 Syntaxe

La consistance est un problème logique : il faut montrer comment on ne peut avoir un énoncé et sa négation dans une même théorie ou, en termes arithmétiques, que $1 \neq 0$. C'est l'autoconsistance de l'arithmétique de Fermat qui doit être démontrée ; autoconsistance signifie que la preuve ne doit utiliser que des moyens internes à la théorie ou qu'elle est bornée par les termes mêmes de la théorie. Nous n'aurons donc que la quantification bornée, le quantificateur existentiel et le quantificateur universel ne s'appliquant qu'à des suites ou ensembles finis sont automatiquement bornés ; en ce qui touche le quantificateur effini pour les suites effinies, il est borné naturellement par le degré (fini) du polynôme qui représente une suite effinie déterminée.

Une preuve de la consistance de l'arithmétique sans postulat d'induction est possible, qui fasse appel seulement à la descente infinie. Il n'y a pas de recours à l'induction transfinie. Nous appelons cette arithmétique l'arithmétique de Fermat (*AF*) pour la contraster avec l'arithmétique de Peano. L'idée principale est de traduire la logique dans l'arithmétique à l'aide d'une interprétation polynomiale avec les indéterminées (*Unbestimmte*) de Kronecker ; il s'agit donc d'une arithmétisation de la logique, c'est-à-dire d'une paramétrisation de la logique par les polynômes avec leurs indéterminées. Le produit de convolution des polynômes sert à arithmétiser la logique, *i.e.* l'implication locale et la quantification locale « effinie » dans la traduction polynomiale qui parvient à réduire (éliminer) la logique par descente infinie de la même manière qu'on extrait le contenu des polynômes à l'aide de la descente infinie.

La logique arithmétique introduit des notions nouvelles, deux nouveaux connecteurs, la négation locale et l'implication locale et un nouveau quantificateur appelé « quantificateur effini », Le concept fondamental de suite est scindé en suites finies qui sont des ensembles et en suites effinies qui n'en sont pas. Il n'y a pas de suites infinies. Une suite effinie n'a pas de dernier terme (*open-endedness*), n'a pas de borne postpositionnelle, *e.g.* ω, mais a une borne prépositionnelle, *e.g.* 0. Une suite effinie signifie une suite potentiellement infinie ou une suite infiniment processive sans limite pré-assignée par analogie avec le concept de suite (de choix) chez Brouwer. La suite des nombres naturels est une suite effinie. Si une suite effinie a une borne, elle devient un segment initial, *i.e.* un ensemble. Bien que minimale, la logique que nous envisagerons doit fournir un cadre naturel pour l'arithmétique, c'est-à-dire, les théorèmes constructifs de la théorie des nombres, *e.g.* le théorème d'Euclide sur l'infinité des nombres premiers. Dans un sens, cette logique est une sonde finitaire pour le concept d'infinité et la logique elle-même est une « logique locale ».

La syntaxe est ensuite traduite dans l'arithmétique, l'arithmétique modulaire. Pour le constructiviste, la sémantique ou la notion de modèle n'est qu'une métaphore multiforme. Le prolongement de la syntaxe dans un univers arithmétique doit donc être univoque : à chaque formule est assigné un entier positif, son « évaluateur », *i.e.* un entier qui localise la formule dans l'univers arithmétique borné où la conjonction, la disjonction et l'implication sont représentées respectivement par la multiplication, l'addition et l'exponentiation. La négation est simplement un énoncé nié dans l'univers arithmétique. Somme et produit représentent les quantificateurs existentiel et universel ; un produit continué (indéfini) correspond au quantificateur effini. Une fonction d'assignation injecte les formules closes ou énoncés dans l'univers arithmétique.

3.2 La traduction polynomiale modulaire et l'élimination de la logique

Une seconde fonction, la fonction d'évaluation, va traduire les formules closes de l'univers arithmétique et leurs évaluateurs en termes de polynômes avec coefficients entiers et indéterminées. Dans cette traduction, la négation $\neg a$ sera conçue comme complément local de l'univers arithmétique selon la formule $1-a$ et l'implication $a \rightarrow b$ correspondra à une expression modulaire $1-a \equiv b \pmod{a}$ où la relation de congruence tient lieu de la relation d'équivalence – dans le cas de l'implication, il y a un reste de la division exacte que représente l'équivalence logique ou ensembliste $a \equiv b$. Les quantificateurs existentiel $\exists$ et universel $\forall$ et deviennent des symboles de sommation et de produit Σ et Π. On a donc un contenu arithmétique ou numérique pour les constantes logiques et les quantificateurs, ce que la logique classique ne peut fournir, pas plus que la logique intuitionniste ou d'autres logiques à prétention constructive – logiques linéaires, combinatoires, structurales ou sous-structurales. Cette logique polynomiale modulaire peut avoir de nombreuses applications ailleurs qu'en logique et mathématiques notamment en informatique théorique (calcul numérique), en théorie des probabilités et statistiques des mégadonnées ou données massives (voir Gauthier 12).

La traduction polynomiale rend compte d'un univers arithmétique ou combinatoire 2^n en expansion, mais borné dans chaque cas – dans chaque mesure – par un entier fini *n,* le degré d'un polynôme. La descente infinie sur les puissances décroissantes d'un polynôme fini permet d'éliminer la logique dans la traduction polynomiale en transformant toutes les formules logiques en polynômes linéaires (irréductibles), puisque la descente infinie pour les polynômes réductibles s'arrête à 1 ou à 0. Le fait que la descente infinie s'applique à l'arithmétique générale des polynômes vient du théorème fondamental de la factorisation unique des polynômes (ou forme algébrique entière, comme dit Kronecker) en produit de polynômes irréductibles (premiers) – voir (Kronecker 23). H. Weyl dans son ouvrage classique sur la théorie algébrique des nombres (H. Weyl 32) a bien vu que la factorisation unique (l'axiome de factorisation limitée) est obtenue par la condition de la chaîne descendante (anneau noethérien) qui n'est autre que la descente infinie par la généralisation de l'algorithme de division d'Euclide, puisque l'anneau des polynômes de degré fini avec plusieurs indéterminées est un anneau noethérien. Ainsi la théorie algorithmique des diviseurs, qui fait partie aussi de l'arithmétique générale de Kronecker est-elle une généralisation de l'arithmétique finie (ou finitaire) de Fermat avec descente infinie. Les énoncés logiques sont devenus des expressions numériques générales, c'est-à-dire des polynômes et la descente infinie réduit ces expressions numériques en formules combinatoires. La réduction de la logique est donc complète dans une logique arithmétique ou polynomiale et la consistance se résume alors à la distinction intrinsèque entre 0 et 1, pour les polynômes à la distinction entre polynômes linéaires, de degré 1, et les polynômes constants, de degré 0, ou encore entre polynômes constants et le polynôme 0 qui n'a pas de degré (noté $-\infty$). Nous avons donc bien $\neg(0 = 1)$ et la consistance de l'arithmétique est démontrée.

Comment faire de la logique et des mathématiques sans la notion positive d'infini, c'est-à-dire sans la notion d'infini actuel ? Une longue tradition mathématique, des Grecs à Fermat, de Gauss, Cauchy et

Kronecker à Brouwer et Nelson a défini le constructivisme mathématique. Heyting, Kolmogorov, Kleene, Kreisel ont formalisé la logique intuitionniste qui est une variété du constructivisme mathématique. La logique interne, d'inspiration constructiviste, vise à réintégrer la logique dans l'arithmétique, pierre angulaire de l'édifice mathématique et à montrer comment les concepts d'indéfini et d'indéterminé peuvent se substituer à la notion d'infini (et de transfini dans le vocabulaire cantorien).

Indéfinie est l'autre nom pour la descente infinie de Fermat, qui, comme nous l'avons vu, doit s'arrêter. La descente infinie ou indéfinie est donc finie en réalité et elle tient lieu non seulement de l'induction complète sur les nombres entiers, mais aussi de l'induction transfinie sur les ordinaux. Quant aux indéterminées, Kronecker s'inspirant de Gauss en a fait l'instrument privilégié de la théorie arithmétique des grandeurs algébriques. Une indéterminée peut même remplacer efficacement un nombre ou une grandeur transcendante dans un domaine de rationalité (ou corps au sens algébrique du terme).

W. Hodges dans son traité de théorie des modèles (voir Hodges 22) reconnaît le caractère fondateur de l'arithmétique générale de Kronecker lorsqu'il dit que la théorie arithmétique des domaines de rationalité génère le modèle canonique de la théorie des corps contemporaine ; il faudrait ajouter ici que c'est la théorie des formes (polynômes) qui constitue la matrice des modèles canoniques et que cette théorie est finitaire par génération successive de ses éléments. Dans la même veine, H. Weyl (voir Weyl 32) met l'accent sur la structure algorithmique de la théorie algébrique des nombres chez Kronecker. Enfin, la théorie kroneckerienne de l'élimination a inspiré la moderne théorie de l'élimination (du quantificateur existentiel) qui a permis à Tarski d'obtenir ses résultats de décidabilité pour la géométrie et l'algèbre du premier ordre : la théorie des corps réels, par exemple décidable (voir là-dessus, L. van den Dries 26). Les théories qui admettent l'élimination des quantificateurs, *i.e.* qui sont réductibles à des systèmes d'équations ou d'inéquations polynomiales sont du même coup décidables en vertu de la finitude de la procédure de réduction. Ces résultats en algèbre abstraite (les structures abstraites) ne sont pas soumis à l'incomplétude et dans le sillage de Kronecker, on pourrait dire qu'une grande partie des mathématiques, si ce n'est la majeure partie, échappe aux limitations gödeliennes. C'est là une leçon qu'on peut tirer de la tradition constructiviste avant Brouwer et l'intuitionnisme mathématique.

Au-delà de la descente infinie de Fermat et de la théorie des indéterminées de Kronecker, il fallait concevoir, dans la preuve de consistance interne de l'arithmétique, une stratégie pour contrer ce que j'ai appelé le procédé de codiagonalisation de Cantor qui est un ingrédient essentiel des résultats d'incomplétude de Gödel et des théorèmes d'indécidabilité (Post, Church, Rosser, Turing). La diagonale ou produit de Cauchy assurait un premier accès à la théorie des polynômes de degré fini (support des séries de puissances infinies) qui allait permettre de comprendre la théorie des formes de Kronecker comme une arithmétique polynomiale. L'expression des puissances d'un polynôme en ordre décroissant donnait prise directement à la descente infinie qui pouvait effectuer la réduction de la logique à l'arithmétique par la traduction polynomiale. Cette même traduction polynomiale a été motivée à l'origine par une logique constructive des suites effinies (les suites infiniment processives ou potentiellement infinies de Brouwer) qui requérait l'invention d'un nouveau quantificateur, le quantificateur effini $\mp xAx$ pour les suites infiniment processives de nombres naturels.

Ce que j'ai voulu montrer, c'est que le problème de la consistance interne de l'arithmétique avait une solution arithmétique, mais il fallait pour y arriver, aller au-delà de Hilbert ou plutôt en deçà et refaire le chemin à rebours, de Hilbert à Kronecker et à Fermat ou redescendre du paradis incertain de Cantor sur la terre ferme du fini. L'autoconsistance de l'arithmétique exige en effet le circuit fini de la preuve qui doit pouvoir énoncer les conditions de sa production, c'est-à-dire que l'autosuffisance et la minimalité des moyens de preuve doivent être garantis par la structure interne de la théorie. Or l'arithmétique polynomiale en internalisant la logique s'approprie les moyens de son autodétermination en vertu de la clôture de la théorie par les termes polynomiaux eux-mêmes de degré fini.

La théorie kroneckerienne de l'anneau « naturel » des entiers et du corps des entiers algébriques (extensions algébriques) fournit, en tant que théorie finitaire, un premier exemple d'autoconsistance. En m'inspirant de la théorie kroneckerienne du contenu polynomial (*Enthalten-Sein*), c'est-à-dire le contenu en coefficients entiers des formes ou polynômes homogènes, j'ai généralisé la notion de contenu à toute forme logique finie, c'est-à-dire à toute expression logique traduisible dans le langage de l'arithmétique polynomiale, d'où l'idée d'une logique interne du contenu arithmétique ou logique arithmétique. Pour cette logique du contenu arithmétique la descente infinie de

Fermat permet de rester dans les limites de l'arithmétique « naturelle », *i.e.* l'anneau naturel des entiers et le corps naturel de ses extensions algébriques. Qu'au-delà de Cantor et en deçà de Hilbert, Kronecker ait formulé la théorie finitaire des formes algébriques, et qu'il ait pu tracer exactement la démarcation entre extensions algébriques et extensions transcendantes tout en refusant à ces dernières un statut ontologique autonome, c'est là la marque première d'un constructivisme arithmétique qui influencera Hilbert, Poincaré et Brouwer. L'arithmétique doit emprunter ce circuit dans le fini – et non pas le détour par les éléments idéaux comme chez Hilbert ou le poste d'observation externe ou transcendant le fini comme chez Gödel (de son propre aveu) – pour fermer la boucle de sa propre consistance. Poincaré ne disait-il pas que l'infini est une approximation du fini (et non l'inverse).

La logique arithmétique à ce titre n'espère pas jouer au gardien des portes de la ville, elle ne cherche qu'à délimiter les territoires respectifs du constructif et du non constructif, des contenus arithmétiques et non arithmétiques. L'attitude fondationnelle peut être ici tolérante sans être béatement œcuménique et l'instinct critique n'est pas nécessairement celui du chien du garde. L'arithmétisation des mathématiques et de la logique n'est pas achevée, mais comme l'a montré Kronecker, une théorie générale, la théorie arithmétique des formes ou des polynômes, peut constituer une pièce-maîtresse de l'entreprise constructiviste. À la suite de Kronecker, il est certes possible de concevoir une théorie logique qui rende compte de l'arithmétique, c'est-à-dire qui en montre la consistance interne. La logique constructive du contenu arithmétique peut montrer que la descente infinie n'est pas la même chose que l'induction complète, puisque pour montrer leur équivalence, il faut opérer une double négation sur l'ensemble infini (actuel) des nombres naturels, ce qui correspond au principe du tiers exclu inadmissible en toute bonne logique ou mathématique constructives. Après avoir montré la consistance de l'arithmétique à l'aide de la méthode de la descente infinie à l'intérieur de l'arithmétique générale de Kronecker, il s'agit maintenant de voir jusqu'où va l'arithmétique dans ses extensions, des sous-systèmes de l'arithmétique à la théorie algébrique des corps ou « domaines de rationalité » pour Kronecker (voir Gauthier 9).

4. CONCLUSION. LA LOGIQUE ARITHMÉTIQUE

4.1 Un renversement antifrégéen

Frege s'était demandé dans son ouvrage *Lois fondamentales de l'arithmétique* jusqu'où on pouvait aller en arithmétique avec les seuls moyens de la logique. Une réponse brutale serait que Frege n'est pas allé très loin, mais on peut retourner la question en se demandant jusqu'où peut-on aller en logique avec les seules ressources de l'arithmétique et en particulier de l'arithmétique générale de Kronecker jusqu'à la géométrie algébrique et arithmétique contemporaine. Le renversement est complet si l'on peut voir qu'un calcul polynomial modulaire (la logique arithmétique) parvient à traduire toute logique en arithmétique. C'est la thèse constructiviste fondamentale que je défends dans cet essai.

La foi idéaliste du logicien «ordinaire» et du mathématicien praticien – celui qui accepte le principe qu'un énoncé logique ou mathématique est vrai ou faux en vertu des conditions de vérité dictées dans le ciel platonicien des idéalités logiques et mathématiques – ne saurait être justifiée d'un point de vue constructiviste. Pour la logique, Hilbert voudra éliminer le symbole ε après l'avoir introduit pour séparer le fini de l'infini des objets idéaux qui n'auront servi que de détour (*Umweg*) dans le calcul finitaire d'un système formel. Si la consistance demeure l'objectif fondationnel premier, la sûreté ou la certitude (*Sicherheit*) ne peut être acquise que par les moyens finis de l'arithmétique finitaire pour fournir un contenu numérique, garant ultime de la certitude mathématique. Dans le même sens, Tarski a obtenu l'élimination des quantificateurs dans la théorie des modèles pour parvenir à des résultats finitaires de décidabilité pour l'algèbre et la géométrie élémentaires (du premier ordre). L'idée d'une logique arithmétique polynomiale et modulaire est précisément de donner un contenu numérique à la logique constructive. Le mathématicien E. Bishop a développé une théorie fondationnelle de l'analyse mathématique (Bishop 1) en s'appuyant sur cette motivation d'un contenu numérique pour l'analyse : il avouera dans un article (Bishop 2) que son programme est plus près de Kronecker que de Brouwer. On peut remarquer en effet que si la logique intuitionniste est fondée sur la notion de preuve, les preuves ne sont jamais dotées de contenu numérique. Brouwer qui n'était pas un ami de la logique (et un adepte de la théorie des nombres) a conçu les mathématiques intuitionnistes sur les notions de suite, suites régulières, suites de choix, suites irrégulières qui devaient avoir un contenu numérique intrinsèque comme suites infiniment processives – que j'appelle suites effinies. La logique intuitionniste de Heyting *et alii* a semblé perdre de vue cet objectif.

La logique arithmétique vise un contenu numérique explicite : pour un nombre naturel n arbitraire, l'univers arithmétique est limité par 2^n, l'ensemble des parties ou sous ensembles de n – qui correspond à l'ensemble des combinaissons de n – qui est fini par definition. Si l'arithmétique de Fermat-Kronecker avec descente infinie et arithmétique polynomiale constitute l'arrière-fond d'une logique arithmétique, c'est Gauss qui est la source première de l'arithmétique polynomiale modulaire dans ses *Disquisitiones arithmeticae* où il introduit l'arithmétique des diviseurs et congruences avec la notion d'indéterminée (*indeterminata*) dans les expressions polynomiales – Kronecker en fera le meilleur usage dans sa théorie de diviseurs (voir Edwards 3) ou des systèmes modulaires (*Modulsysteme*) qui occupe une place prépondérante en théorie algébrique des nombres et en géométrie algébrique contemporaine avec ses extensions algébriques. La théorie galoisienne des ensembles de congruences de polynômes est elle aussi évidemment d'inspiration gaussienne. Pour remonter à Gauss, on peut utiliser utiliser son théorème de réciprocité quadratique (démontré à l'âge de 18 ans !) en logigue arithmétique (Gauthier 13) et dans la même direction le lemme de Hensel, un élève de Kronecker, pour des résultats arithmétiques en informatique théorique et en intelligence artificielle (voir Gauthier 12). Dans la grande lignée de la théorie algébrique des nombres, Gauss, Galois, Kummer, Kronecker, Dedekind, Hermann Weyl (Weyl 32) reconnaîtra la supériorité de la théorie kroneckerienne des domaines de rationalité sur la théorie des idéaux de Dedekind précisément en vertu de son caractère constructif et de son contenu numérique et André Weil assignera un rôle de pionnier à Kronecker en géométrie algébrique pour les mêmes raisons.

La motivation d'une logique arithmétique (polynomiale modulaire) puise dans cette filiation pour proposer une preuve de consistance interne de l'arithmétique classique, celle de Fermat-Kronecker et tirer de ce résultat la thèse d'un constructivisme logico-mathématique radical. La consistance interne de l'arithmétique de Peano et de ses sous-systèmes ou fragments est hors de portée. De l'aveu même de Gödel, la preuve ne peut être qu'externe, c'est-à-dire d'un point de vue transcendant l'arithmétique finie, le point de vue oméga de la théorie des ensembles, et selon le deuxième théorème d'incomplétude, la consistance d'une théorie du point de vue transcendant ne peut être que relative à la consistance d'une autre théorie *primitive.* Cette consistance hypothétique stipule par exemple que si une théorie T1 est consistante (l'arithmétique de Peano au premier ordre), alors T2 (la théorie axiomatique des ensembles de Zermelo-Fraenkel est consistante). Plus d'un mathématicien, logicien ou philosophe restent dubitatifs face à cette hypothétique consistance. Il semble que seule une logique arithmétique puisse prétendre à une preuve de la consistance *absolue* de l'arithmétique.

L'arithmétique de Peano est ensembliste et sa sémantique ou théorie des modèles est ensembliste de part en part jusque dans ses sous-systèmes ou fragments et même dans l'arithmétique minimale de Robinson *Q* sans quantificateurs et sans postulat d'induction – bien qu'Edward Nelson en ait donné une preuve d'autoconsistance prédicative (génétique) –, puisque toutes ces arithmétiques exploitent le fonds commun d'un ensemble infini de nombres naturels et toutes les preuves, qu'elles soient syntaxiques ou sémantiques (du théorème d'incomplétude de Gödel par exemple), ne peuvent faire abstraction de ce fondement ensembliste. La raison en est fort simple, c'est que la logique – classique du premier ordre – est assise sur un ensemble dénombrable infini et que l'arithmétique de Peano est formulée dans ce langage du premier ordre. Dans un langage du deuxième ordre où l'on quantifie non plus seulement sur les individus, mais aussi sur leurs propriétés, l'arithmétique devient l'analyse mathématique.

Des mathématiciens importants, comme E. Nelson, pensent même que l'arithmétique de Peano est inconsistante et Jack Silver, un des plus importants théoriciens de la théorie récente des grands cardinaux pense que l'arithmétique de Peano au troisième ordre corrspondant a l'arithmétique transfinie est inconsistante. V. Voevodsky, récent médaillé Fields pour ses travaux en géométrie algébrique, admet que l'arithmétique de Peano peut être inconsistante tout en pensant que l'on peut travailler dans un cadre inconsistant, si l'on parvient à en tirer des résultats spécifiques fiables – que l'on peut tester dans un logiciel de programmation informatique comme *Coq*. Par ailleurs, la logique paraconsistante fait son nid dans le jeu dialectique de la consistance et de l'inconsistance !

Ce que l'on peut dire là-dessus, c'est qu'il n'est pas possible de démontrer la consistance ou l'inconsistance de l'arithmétique de Peano ou de Z-F ou d'autres théories (catégoriques ou toposiques), dès lors qu'on ne peut démontrer un énoncé infinitaire – portant sur un ensemble infini – avec des moyens finis ou même avec une extension des moyens finis comme Hilbert et Gödel l'espéraient. Si la consistance d'une théorie est un gage de certitude en logique et en mathématique, elle doit l'être aussi en physique théorique comme je l'ai montré dans des articles récents (Gauthier 14 et 16). La théorie quantique des champs regorge d'infinités qu'on parvient difficilement à éliminer à l'aide de techniques plus ou moins artificielles de renormalisation – qui consiste à annuler les quantités infinies (énergie ou masse) par les valeurs observées des quantités finies. Même la mécanique quantique dans un espace de Hilbert de dimension finie souffre de difficultés analogues lorsqu'on tient à une interprétation réaliste qui veut exploiter l'équation d'onde de Schrödinger en cardinalité du continu sans la coupure au plus dénombrable de la théorie de la mesure en termes de probabilités. Le problème apparait aussi en relativité générale si l'on admet un *Big Bang* avec densité et énergie infinies dans une singularité initiale. La consistance signifie encore ici l'élimination des infinités rampantes, fantômes de quantités disparues, selon l'expression de l'évêque Berkeley qui s'attaquait à l'époque au calcul infinitésimal. La théorie des multivers en cosmologie ne peut être consistante dans ce sens-là (Gauthier 16). Faut-il admettre que les physiciens en général n'ont que des notions floues de l'infini ? Il est intéressant de noter qu'une théorie comparable à la théorie des multivers est apparue en théorie des ensembles récemment chez des mathématiciens ensemblistes comme H. Woodin, R. Laver ou K. D. Hamkins qui pensent en termes de multivers ensemblistes, un peu comme les univers toposiques démultipliés de Grothendieck qui n'ont pas de lien entre eux, si ce n'est dans une U-topie transcendante, ou encore un H. Friedmann qui songe à la combinatoire infinitaire d'univers ensembliste plein, c'est-à-dire rempli des cardinaux transfinis de la théorie des ensembles ; dans ce dernier cas, la définissabilité ordinale dans la hiérarchie cumulative des rangs pour les classes de points ne parvient pas à distinguer les éléments discrets d'un continu ponctuel qui ne renvoit que des images floues par réflexion de l'univers ensembliste. Ces univers diffractés ne parviennent pas à redescendre jusqu'au « plancher des vaches » et à distinguer les ordinaux finis les uns des autres en vertu du brouillage transfini… (voir Gauthier 6 et 14). En géométrie algébrique, en théorie des catégories et en théorie de l'homotopie, on pourrait arguer que tout cela est « *pointless* », c'est-à-dire sans objet, puiqu'on peut générer des théories sans points, mais là-aussi les images d'ordre supérieur sont déformées – comme dans les catégories-∞ – et il faut les récupérer par descente dans un théorie polynomiale (simpliciale) ce qui ne se fait pas sans distorsion *homéomorphique* comme je l'ai expliqué ailleurs (voir Gauthier 14 et16).

Si l'on tient à un fondement radical de nos certitudes scientifiques, il faut renoncer à l'idéal d'un réalisme intégral, plénier ou partiel et opter pour une *épistémè* qui s'alimente de nourritures terrestes plutôt que de rêver à un ciel platonicien peuplé d'idéalités inaccessibles. Le détour (*Umweg*) par les objets idéaux, comme le disait Hilbert, n'est pas interdit et on ne peut mettre un frein à la création mathématique ou bannir les créatures imaginaires ou fictives de l'univers logique ou mathématique (ou même physique), mais on doit s'assurer que l'approximation du fini par l'infini, comme disait Poincaré, ne dépasse pas les bornes.

4.2 Les limites de l'infini

Gauss pensait que l'infini « n'est qu'une façon de parler en mathématiques » dans sa lettre à Schumacher du 12 juillet 1831 et l'arithméticien lorsqu'il dit « à l'infini » veut signifier un procès illimité, la suite des nombres naturels. L'analyste pourra dire qu'une asymptote verticale *tend* vers l'infini positif ($+ \infty$), mais il parlera de limite infinie, c'est aussi une façon de parler. Quant aux nombres surréels (ordinaux transfinis) et hyperréels (infiniment petits), ce sont d'autres façons de parler des nombres réels qui ne le sont pas tout à fait– le seul réel infiniment petit est 0 ! Disons que ce sont là des façons de parler non standard, selon l'idiome particulier de la théorie des infiniment petits ou des infiniment grands qui leur sont très proches « en l'infini », comme l'usage le veut en français. Remarquons que la fonction logarithme qui a une origine purement arithmétique a aussi une limite « en l'infini ». Il faut reconnaitre qu'il y a de multiples façons de parler de l'infini en mathématiques depuis Cantor qui s'appuyait sur des philosophes et des théologiens pour justifier son arithmétique transfinie. Même Hilbert a voulu faire un détour (*Umweg*) par ce paradis des objets idéaux (*ideale Elemente*) dans sa tentative de démonstration de l'hypothèse du continu (voir Gauthier 15). Cantor pensait que les mathématiques sont une création libre de l'esprit, mais Leibniz dans ses *Essais de théodicée* de 1710 attribuait à Dieu seul la faculté de connaitre tous les possibles et de faire des combinaisons infinies, « une infinité d'infinies » écrit-il. Les univers possibles ou multivers sont cependant le terrain de jeu de logiciens et mathématiciens multiversels – ou interuniversels comme le japonais S. Mochizuki dans ce qu'il appelle « géométrie interuniverselle ». On ne peut rejeter d'emblée les recherches dans l'au-delà du fini, puisqu'elles visent le plus souvent des résultats de finitude. À titre d'exemple, la géométrie algébrique contemporaine trouve un de ses motifs principaux dans la théorie des fonctions elliptiques (devenues courbes elliptiques) – dont Kronecker a été l'un des pionniers – qui a donné des résultats de finitude avec le travaux de Weil, Faltings, Deligne, Wiles. Dans le cas de Mochizuki, il s'agit de démontrer par des moyens transcendants l'arithmétique l'énoncé arithmétique élémentaire *abc* $(a + b = c)$ pour des entiers positifs a,b,c dont le produit d de leurs facteurs premiers ne peut être beaucoup plus petit que la somme c de a plus b ; la preuve d'un tel énoncé entrainerait la preuve d'un autre énoncé élémentaire, le dernier théorème de Fermat $a^n + b^n \neq c^n$ pour n plus grand que 2 (que A. Wiles a démontré en 1995 par des moyens transcendants).

Dans ce contexte, il importe de noter que Kronecker ne s'est pas abstenu de travailler la théorie analytique des fonctions elliptiques, c'est-à-dire la théorie de la multiplication complexe (dans le corps des nombres complexes $\mathbf{C}$) et il dira dans sa conférence inaugurale à l'Académie des sciences de Berlin que l'objet de ses recherches dans ce domaine était l'analyse (mathématique), l'algèbre en était cependant le moteur et la théorie des nombres en constituait la direction et le but (voir Gauthier 8, 33). Un bel exemple de cet esprit kroneckerien est le texte séminal d'André Weil en 1949 « Number of solutions of equations in finite fields » (voir Weil 28). S'inspirant d'un théorème de Gauss en arithmétique élémentaire sur les congruences, Weil s'inspire d'un résultat qu'il a obtenu sur l'hypothèse de Riemann dans les corps de fonctions (voir Weil 27) par des moyens analytiques transcendants (en topologie) et qu'il peut maintenant formuler par des moyens purement algébriques sur les courbes algébriques ; ici il s'agit d'une variété algébrique, c'est-à-dire l'ensemble des racines ou solutions d'un nombre fini de polynômes en plusieurs indéterminées – un thème éminemment kroneckerien. Dans le cas d'une courbe algébrique, il s'agit d'une variété de dimension 1 où il est question de déterminer le nombre fini de points rationnels ou de points de la courbe exprimés en termes de nombres rationnels et Weil termine son article de 1949 par des conjectures sur les variétés de dimension supérieure. Weil n'a jamais dénoncé cette utilisation, pas plus que Hermann Weyl dans ses travaux arithmétiques ou que Kronecker dans son programme d'arithmétisation de l'algèbre et de l'analyse : il s'agit plutôt, comme l'explique Weil (voir Weil 29, 454), de recourir à des moyens analytiques élégants et naturels, comme la mesure de Haar pour les groupes localement compacts (dans Weil 31), et ensuite obtenir une preuve constructive sur les corps locaux par un passage à la limite facile, pour reprendre l'expression de Weil – Henri Cartan a donné en plus une preuve de ce fait mathématique sans axiome du choix.

Hermann Weyl ne s'est pas exprimé autrement à propos des méthodes transcendantes comme « construction libre » dans ses travaux en théorie des groupes (Weyl 33) – là aussi on a maintenant des preuves constructives. Un autre exemple probant est le résultat *profond* (comme on dit) d'André Weil obtenu en géométrie algébrique pour les variétés abéliennes sur les corps finis. La preuve de Weil utilisait des techniques fonctionnelles avancées et A. Stepanov a pu donner en 1969 une preuve élémentaire du résultat de Weil en utilisant une méthode polynomiale finitaire de comptage de points. Enrico Bombieri, médaillé Fields, a encore simplifié la méthode de Stepanov en 1972. C'est dans le même sens aussi qu'opérait Kronecker dans ses formules limites en extrayant le contenu arithmétique polynomial des séries analytiques pour les fonctions elliptiques, mais l'exemple le plus fameux est la preuve transcendante de Dirichlet sur l'infinité des nombres premiers dans toute progression arithmétique en 1836 ; Dirichlet confesse qu'il manque encore les principes appropriés en vertu desquels les relations transcendantes (obtenues sur les séries infinies) entre des entiers indéterminés pourraient être éliminées. Dirichlet pense donc qu'une preuve élémentaire ou constructive de son théorème est possible. Or Kronecker, qui a édité les oeuvres mathématiques de Dirichlet, a proposé d'étendre arithmétiquement un intervalle fini ($\mu \ldots \nu$) pour des entiers μ *et* ν afin d'y loger au moins un nombre premier $hm + r$ pour m et r des nombres relativement premiers entre eux. On pourrait voir là une anticipation des idées d'A. Selberg de 1949 qui utilise des formules asymptotiques pour la fonction logarithmique sur des segments ou intervalles finis sur les entiers dans sa preuve constructive du théorème de Dirichlet. Et Kronecker d'y aller d'une déclaration de principe dans ses *Vorlesungen über Zahlentheorie* (Leçons sur la théorie des nombres) en disant que c'est là un cas où l'arithmétique peut aller plus loin que l'analyse… (voir là-dessus Gauthier 8, 36-37). Un autre exemple probant est le théorème de Gel'fond-Schneider en théorie des nombres transcendants. Rappelons que transcendant ici signifie « qui transcende l'algèbre » et un nombre transcendant est un nombre qui n'est la solution d'aucune équation polynomiale. Le théorème démontré indépendamment par Gel'fond et Schneider en 1935 stipulait que pour un nombre algébrique α différent de 0 et 1 et

β un nombre algébrique irrationnel, α^{β} est transcendant ; la preuve utilisait des ressources constructives comme les approximations logarithmiques de séries infinies, mais c'est seulement en 1962 que Gel'fond obtient une preuve constructive élémentaire en notant qu'il n'utilise qu'un outil analytique, le théorème de Rolle qui a trait à la la dérivée d'une fonction continue de variable réelle dans l'intervalle [0,1]. Or Bishop (dans Bishop 1) a fourni une version constructive de ce théorème en définissant plus précisément les limites d'un intervalle réel [a, b] à la manière de Kronecker dont il se réclame d'ailleurs (Bishop 2) – pour les détails de cette preuve, voir Gauthier 10, chap. 6. Disons enfin que « preuve élémentaire » ne signifie pas une preuve plus facile qu'une preuve analytique, le cas de la preuve de Dirichlet évoqué plus haut en est un exemple éclatant. Alors que la preuve de Dirichlet sur l'infinité des nombres premiers dans toute progression arithmétique utilisait les moyens transcendants des séries entières infinies sur les nombres complexes et les notons de limites afférentes, la preuve de Selberg exploitait les propriétés arithmétiques de la fonction logarithme dans un calcul fort élaboré qui ne concède rien à la facilité pour les besoins de la rigueur. En logique mathématique, « élémentaire » signifie simplement du premier ordre où l'on quantifie seulement sur les individus ou objets individuels ou éléments d'un ensemble alors qu'au deuxième ordre on quantifie sur les propriétés des individus, au troisième ordre on quantifie sur les propriétés des propriétés, ainsi de suite. C'est ce sens d'élémentaire que l'on retouve dans l'ouvrage classique de Tarski de 1951 *A decision method for elementary algebra and geometry*.

Pour revenir à André Weil, les conjectures de Weil ont occupé pratiquement tout l'espace de la géométrie algébrique contemporaine et les meilleurs spécialistes s'y sont attaqués, de A. Dwork à A. Stepanov (pour la preuve élémentaire d'un résultat partiel) jusqu'à A. Grothendieck qui s'y est essayé sans succès et à R. Deligne qui a obtenu une preuve complète des conjectures de Weil avec des moyens transcendants, mais aussi avec un comptage fini de points rationnels. Dans le même sens, la conjecture de Shimura-Taniyama-Weil pour les courbes elliptiques sur *Q,* corps des nombres rationnels, qui comprend la preuve de Wiles du dernier théorème de Fermat a été démontrée par des moyens transcendants. Cette même conjecture est un cas spécial des conjectures du mathématicien R. Langlands, lui-même inspiré par Kronecker, tout comme A. Grothendieck dans sa théorie des schémas qui reprend la notion kroneckerienne de système modulaire. Remarquons enfin que la notion de motif si chère à Grothendieck et que l'on associe au *leitmotiv* musical s'apparente plutôt au motif cartésien : Descartes, le fondateur de la géométrie algébrique classique, parlait en effet dans sa *Dioptrique* de motifs géométriques « pour en composer la broderie », celle des courbes algébriques qu'il est le premier à introduire. Pour Grothendieck, le point géométrique est le motif recteur et cette tapisserie en pointillé du continu géométrique est bien loin de l'élégante broderie des courbes cartésiennes…

Une conjecture du logicien Jacques Herbrand en 1930 stipule que les énoncés arithmétiques élémentaires qui sont démontrés par des moyens transcendants (par exemple en analyse réelle ou complexe) doivent être démontrés éventuellement sans ces moyens – cette conjecture a été reprise récemment comme *Grand Conjecture* par le logicien H. Friedman qui apparemment ne connaissait pas la formulation de Herbrand. C'est là une des motivations centrales de la logique et des mathématiques constructives : démontrer par des moyens élémentaires (arithmétiques) des théorèmes classiques qui ont nécessité des moyens transcendant l'arithmétique. Ainsi l'un des théorèmes de la théorie analytique des nombres, le théorème de Dirichlet sur la progression arithmétique des nombres premiers n et m entre eux – il existe une infinité de nombres premiers de la forme $1 + \lambda$ où λ est un entier positif – a été démontré par Selberg par des moyens élémentaires en 1949 comme nous l'avons vu plus haut. Il est évident que l'infinité dont il s'agit ici est une suite infiniment processive (ou effinie) de nombres naturels, comme dans le résultat non-constructif récent (2008) de Green-Tao sur les suites arbitrairement longues (de longueur finie) de nombres premiers dans les progressions arithmétiques – d'aucuns parlent de suites infinies, mais il s'agit d'abus de langage » comme on dit et c'est souvent le cas en mathématiques ! Du point de vue de la logique mathématique, on peut aussi tenter d'extraire le contenu constructif des preuves non constructives de théorèmes classiques dans des programmes de recherche comme les mathématiques à rebours (*reverse mathematics*) de Friedman-Simpsons ou la théorie des preuves appliquée (*applied proof theory*) de U. Kohlenbach. Les théories algorithmiques de l'informatique théorique contemporaine sont les avatars les plus récents de cette conquête du constructif dans le savoir logique et mathématique.

À mon sens, cette conquête du constructif commence par l'arithmétique avec pour point de départ arbitraire le théorème de Pythagore

($c^2 = a^2 + b^2$ pour les côtés d'un triangle rectangle) et finit par l'arithmétique avec un point d'arrivée aussi arbitraire, la géométrie arithmétique contemporaine (et l'informatique théorique). Ce parcours aléatoire de l'arithmétique qui emprunte bien des détours dans des territoires vierges (non construits), la logique arithmétique (voir Gauthier 10) en trace le motif recteur de l'intérieur en vertu de sa double nature constructive et de la preuve de la consistance interne de l'arithmétique qu'elle propose. Pour Poincaré, la géométrie euclidienne était une convention commode parmi toutes les géométries non euclidiennes possibles et à la question de savoir si l'arithmétique pouvait être traitée de la même façon, il répondait qu'il n'y avait qu'une seule arithmétique. Doit-on conclure qu'il n'y a qu'une seule logique arithmétique ?

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. Bishop, E. *Foundations of Constructive Analysis*, McGraw-Hill, New York 1967.
2. Bishop, E. « Mathematics as a numerical language », in Myhill, J. Kino, A., Vesley, R.E. *Proof Theory and Intuitionism*, North-Holland, Amsterdam, 53-71.
3. Edwards, H.M, *Divisor Theory*, Birkhäuser, Boston, 1990.
4. Gauthier, Y. « Finite Arithmetic with Infinite Descent », *Dialectica*, (43), 4, (1989), 329-337.
5. Gauthier,Y., *De la logique interne*, Paris, Vrin, collection « Mathesis », 1991.
6. Gauthier, Y., *Logique et fondements des mathématiques*, Paris, Diderot, 1997.
7. Gauthier, Y., « The Internal Consistency of Arithmetic with Infinite descent », *Modern Logic*, vol. 8 (2000) nos 1/2, 47-87.
8. Gauthier, Y., *Internal Logic. Foundations of Mathematics from Kronecker to Hilbert*, Dordrecht, Kluwer, collection « Synthese Library », 2002.
9. Gauthier, Y., *Logique arithmétique. L'arithmétisation de la logique*, Collection « Logique de la science », Québec, PUL, 2010.
10. Gauthier, Y. *Towards an Arithmetical Logic. Arithmetical Foundations of Logic*. Birkhäuser-Springer, Basel, 2015.
11. Gauthier, Y. *Nouveaux Entretiens sur la pluralité des mondes. Essai de cosmologie sauvage à l'usage des profanes*. PUL-Hermann, Québec-Paris, 2018.

12. Gauthier, Y. « Arithmetical Logic for AI Deep Learning », *International Journal of Soft Computing*, vol.13, no. 1(2018), p. 31-36.
13. Gauthier, Y. « A Quadratic Reciprocity Theorem for Arithmetical Logic », *International Journal of Algebra,* à paraitre.
14. Gauthier,Y. « Simple Inconsistency of Simple QM Interpretations and Related Mathematical Theories », *Research and Communications in Mathematics and Mathematical Sciences*, vol. 6 (2016), no. 2, 117-132.
15. Gauthier, Y. « Kronecker in Contemporary Mathematics. General Arithmetic as a Foundational Programme », *Reports on Mathematical Logic*, vol. 48 (2013), 37-65.
16. Gauthier, Y. « A General No-Cloning Theorem for an Infinite Multiverse », *Reports on Mathematical Physics*, vol. 72 (2013), no. 2, 191-199.
17. Gödel, K., « Über eine noch nicht benütze Erweiterung des finiten Standpunktes », *Dialectica,* 12 (1958), 280-287.
18. Gödel, K. « On formally undecidable propositions of *Principia Mathematica and related systems* I » in *From Frege to Gödel*, ed. Jean van Heijenoort, Harvard University Press : Cambridge, Mass., 1967, 616-617.
19. Hilbert, D. « Neubegründung der Mathematik », in *Gesammelte Abhandlungen*, Berlin, Springer, 1935, vol. 3, 157-177.
20. Hilbert, D. « Über das Unendliche », *Math. Ann*, 95 (1926), 161-190, trad. par André Weil sous le titre « Sur l'infini » dans *Acta Mathematica*, vol. 48 (1926), 91-122.
21. Hilbert, D. und Bernays, P., *Grundlagen der Mathematik*, I, II, 2 Aufl., Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 1968-1970.
22. Hodges, W., *Model theory*, Cambridge, Cambridge University Press, 1993. 23.
23. Kronecker, L. « Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen », in *Werke*, ed. by K. Hensel, 5 vols., Chelsea, New York, 1968, vol. III, 245-387.
24. Nelson, E., *Predicative Arithmetic*, Princeton N.J., Mathematical Notes, Princeton University Press, 1986.
25. Tarski, A., « Einige Betrachtungen über die Begriffe der-Vollständigkeit », *Monatsh. für Math. U. Physik*, vol. 40 (1933), 97-112.
26. Van den Driess, L., « Alfred Tarski's Elimination Theory for Real Closed Fields », *Journal of Symbolic Logic,* vol. 53, 1988, 7-19.
27. Weil, A. « On the Riemann Hypothesis in Function Fields », *Proc. Natl. Acad. Sci USA*, 27, 345-347.
28. Weil, A. « Number of solutions of equations in finite fields », *Bull. Amer. Math. Soc*. 55 (1949), 497-508.

29. Weil, A. « Number Theory and Algebraic Geometry », *Oeuvres scientifiques. Collected Papers*, vol. III, 1979, 442-454.
30. Weil, A. *Number Theory. An Approach through History. From Hammourabi to Legendre*, Birkhäuser, Basel, 1984.
31. Weil, A. *Basic Number Theory*, New York (NY), Springer, 1995.
32. Weyl, H. *Algebraic Theory of Numbers*, Princeton, N. J., Princeton University Press, 1940.
33. Weyl, H. *The classical groups. Their Invariants and Representations*, Princeton, N. J. Princeton University Press, 1939.

CHAPITRE 2

Commentaire de « De l'observateur local à l'observateur transcendantal. De Kant et Husserl aux fondements de la physique contemporaine »

Cet article est dans la revue québécoise de philosophie *Philosophiques*, vol. 46, no. 1 (Printemps 2019), p.155-177. L'intitulé aurait pu être inversé « De l'observateur transcendantal à l'observateur local » dans un mouvement de retour en arrière « *ein Schritt zurück* », comme avait coutume de dire Heidegger. Pour Heidegger, le pas en arrière le ramenait à l'origine grecque de la philosophie, au *Logos* qui dit l'être de l'étant et que seuls les poètes, Hölderlin le premier, sont aptes à en reprendre l'écho.

Le motif de cet article est tout autre : il décrit seulement les points d'inflexion d'une trajectoire philosophique qui va de la philosophie à la science et au savoir scientifique. Mais ce cheminement de l'observateur transcendantal à l'observateur local ne va pas sans mal puisque l'ego transcendantal de Kant à Husserl et Fink s'évanouit dans la trame du langage de Heidegger à Gadamer et finalement se dissout dans le rôle purement mathématique de l'observateur local qui est omniprésent en physique, de la théorie de la relativité restreinte à la relativité générale et à la mécanique quantique, puisqu'il est partie intégrante de la théorie de la mesure, c'est-à-dire dans l'interaction entre le système observé et le système observateur. Il y a ici passage ou transition de la philosophie au savoir scientifique que les philosophes de Hegel à Heidegger n'ont pas su toujours mesurer. Il demeure cependant que l'observateur local a un statut privilégié vis-à-vis le monde objectif transcendant, le réel physique. Le réel physique n'est pas un donné brut et comme le démiurge de Platon, l'observateur local façonne une matière qui devient un matériau de Construction, ce que signifie le terme grec de *hylé* que Aristote joint à une forme (*eidos*) pour constituer le monde matériel avec ses quatre éléments eau, terre, air, feu qui correspondent à l'humide, le sec, le froid et le chaud, autant de transformations ou changements de forme d'une substance ou matière première.

L'hypothèse constructiviste en physique répond à l'hypothèse constructiviste en logique et en mathématiques. Le savoir mathématique est une construction et il faut un constructeur en cette matière. Là-dessus, la tradition de Kant et de l'idéalisme allemand avec Fichte et Hegel jusqu'au néokantisme et Husserl constitue un héritage constructiviste. Hegel n'est pas en reste dans cette tradition, lui qui a formulé une logique des concepts ou ontologique à partir d'une matière inerte, peut-on dire, l'immédiateté indéterminée, *die unbestimmte Unmittelbarkeit*, qu'il a construit jusqu'au Savoir Absolu… Il va sans dire que la physique et la chimie de Hegel se sont elles-mêmes évanouies dans un langage dont seule la logique dialectique comme syllogistique dynamique émerge à titre de théorie de la dynamique du savoir, comme je m'en explique dans un autre article de ce recueil.

En fin de compte, l'option constructiviste dans les fondements conserve son droit de regard à l'entreprise philosophique de vigile critique du savoir. C'est sans doute là la leçon principale que l'on doit retenir de Kant qui, le premier, a congédié la métaphysique pour édifier une théorie critique qui soit conforme, comme il le dit, à la pratique de mathématiciens et des physiciens qui s'en tiennent aux phénomènes sans les rattacher à des noumènes inaccessibles, mais qui recherchent les principes du mouvement des objets du ciel, non dans le système observé mais dans l'esprit de l'observateur qui fait tourner tout l'univers autour de lui, *localement*[1].

NOTE

1. Il va sans dire que dans le cas de Kant, l'observateur dont il s'agit est l'observateur interprète qui n'est pas l'observateur universel ou le dieu laplacien qui observe l'univers tout entier pour en découvrir les conditions initiales et définir le sort final d'un cosmos déterministe. Seul l'observateur local peut « décider » du destin du système observé selon son plan de construction, mais l'observateur interprète peut affirmer que la Terre ne se meut pas comme Husserl dans son texte de 1934 sur la constitution de l'espace terrestre : Kant qui a eu l'idée des univers îles (galaxies) dans sa théorie du ciel de 1755, aurait pu déclarer que les égos empiriques qui tournent autour de l'ego transcendantal sont autant d'univers îles sur la Terre sans se contredire !

   J'ai préféré ignorer dans ce texte l'*Opus postumum* de Kant qui traite du passage des principes métaphysiques de la science de la nature à la physique et qui constitue en quelque sorte une renonciation du projet critique. L'*Opus Postumum* esquisse une théorie du « *Wärmestoff* » ou éther calorique qui voudrait faire le pont entre le transcendantal et l'empirique. Le présent texte tend à montrer que ce pont s'est effondré et qu'il n'y pas de passage du transcendantal à l'empirique, seulement du mathématique au physique dans une transition *immanente* dans les fondements constructivistes du savoir scientifique.

De l’observateur local à l’observateur transcendantal. De Kant et Husserl aux fondements de la physique contemporaine

RÉSUMÉ

L’observateur transcendantal (*transcendentaler Zuschauer*) est une notion qui apparait dans les *Méditations Cartésiennes* de Husserl, mais le terme d’observateur est introduit par Kant dans la *Critique de la raison pure* dans la perspective d’une révolution copernicienne qui met l’accent sur le sujet observateur, perspective qui a des répercussions dans les fondements de la physique contemporaine, de la mécanique quantique à la relativité générale et à la cosmologie.

SUMMARY

The notion of transcendental observer (*transcendentaler Zuschauer*) is introduced in Husserl’s *Cartesianische Meditationen.* The idea of the observer first appears in Kant’s Copernican revolution putting the emphasis on the observer as he announces in his *Kritik der reinen Vernunft.* Contemporary physics also has a notion of a local observer and it plays a central role in the foundations of quantum mechanics, general relativity and cosmology.

1. INTRODUCTION

Dans cet essai informel, l’accent portera sur les aspects philosophiques de la recherche en fondements de la physique, de la relativité restreinte (RR) à la relativité générale (RG) et de la mécanique quantique (MQ) à la cosmologie. Sans recourir à l’appareillage technique propre à ces disciplines, j'exploiterai les thèmes des études que j'ai menées dans ces domaines (voir Gauthier 1971,1983, 1985, 1992, 2010, 2013, 2015, 2017, 2018) et dont je voudrais retrouver les motifs philosophiques. On peut tenter de retrouver les racines philosophiques d'un certain nombre de ces motifs dans la recherche contemporaine en philosophie de la physique. Par exemple, contrairement à un Michael Friedman qui a voulu faire du Kant avant la *Critique* un newtonien de part en part (voir Friedman 1992), on peut prétendre que Kant a adopté dans sa *Critique* un point de vue innovateur qui allait transformer la perspective philosophique de la physique, en particulier la notion d'hypothèse scientifique. La tradition kantienne en porte la trace de Herbart jusqu'aux néokantiens qui ont façonné en quelque sorte la philosophie des sciences contemporaine par coups et contrecoups. L'un de ces contrecoups est venu de la phénoménologie transcendantale de Husserl qui a voulu faire un saut en arrière (*ein Schritt zurück*) de Kant à Descartes dans ses *Cartesianische Meditationen*. Mais malgré ce retournement contre l'idéalisme kantien, comme il le répète, Husserl n'emprunte pas moins le concept d'observateur à Kant, observateur auquel il octroie un statut transcendantal. Si Kant réservait la fonction d'observateur au monde des phénomènes coupés du monde nouménal, Husserl voudra préserver le statut privilégié de l'observateur transcendantal par la mise entre parenthèses (l'*époché*) du monde objectif. La séparation des deux mondes, subjectif et objectif, ne pourra être colmatée que par une théorie du langage amorcée par Eugen Fink, esquissée dans la théorie herméneutique de Heidegger et achevée dans l'herméneutique philosophique de Gadamer. Bien que l'herméneutique philosophique n'ait rien à voir avec les fondements de la physique, elle fournit un arrière-plan conceptuel pour la philosophie de la physique qui se résume à l'ensemble des interprétations des résultats de la physique : l'interprète (*Ausleger*) est un être de langage distinct de l'être physique qu'il est et du monde physique qu'il n'est pas.

2. L'OBSERVATEUR KANTIEN ET SA RÉVOLUTION COPERNICIENNE

Kant introduit la notion d'observateur (*Zuschauer*)[1] dans la seconde Préface de la *Critique de la raison pure* en évoquant Copernic en ces termes :

> Il en est ici comme avec les premières idées de Copernic, lequel, comme il ne se sortait pas bien de l'explication des mouvements célestes en admettant que toute l'armée des astres tournait autour du spectateur, tenta de voir s'il ne réussirait pas mieux en faisant tourner le spectateur et en laissant au contraire les astres immobiles.
>
> trad. Renaut 2006, p.78[2].

Plus loin, Kant suggère que Newton n'aurait pas découvert la loi de la gravitation universelle

> … si Copernic n'avait pas eu l'audace, d'une façon allant à l'encontre des sens, mais cependant vraie, de rechercher les mouvements observés, non pas dans les objets du ciel, mais dans leur spectateur.
>
> trad. Renaut 2006, note **, p. 80[3].

Comme il le déclare, Kant s'inspire de l'exemple des mathématiques et de la physique comme sciences rigoureuses pour critiquer la connaissance métaphysique qui se limite aux objets sans remonter jusqu'aux concepts *a priori* fondateurs de l'expérience du monde objectif. Kant appelait astronomie théorique (*theoretische Astronomie*) l'astronomie observationnelle qu'il distingue de l'astronomie contemplative (*kontemplative*) (voir Kant 1787) dont il conteste la validité parce qu'elle prétend atteindre le monde nouménal au-delà des phénomènes.

On voit là que Kant s'est bien éloigné des spéculations de son ouvrage de 1755 d'inspiration newtonienne *Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels* où il proclamait l'infinitude spatiale et temporelle de l'univers créé. Kant ajoute que si Copernic n'a formulé qu'une hypothèse scientifique, l'hypothèse philosophique de l'*a priori* est apodictique. On connait la suite : la constitution *a priori* des représentations de l'espace et du temps dans l'esthétique transcendantale et des concepts de l'entendement dans l'analytique transcendantale conduira à la thèse de l'aperception comme unité transcendantale de l'expérience. C'est l'ego ou le sujet transcendantal qui assure l'unité du divers dont le sujet empirique ne saurait opérer la synthèse. Le « Je pense » (*Ich denke*) kantien n'est pas le cogito cartésien, car Kant nous dit qu'il nous est inconnu empiriquement comme fondement des phénomènes, mais n'est pas lui-même phénomène. L'idéalisme transcendantal de Kant n'est pas une phénoménologie transcendantale et c'est ici qu'intervient l'observateur transcendantal de Husserl.

3. L'OBSERVATEUR TRANSCENDANTAL ET SA PHÉNOMÉNOLOGIE

L'observateur transcendantal est bien circonscrit dans les *Pariser Vorträge* (voir Husserl 1950) où Husserl reprend pratiquement le langage de Kant :

> Si l'homme naturel (qui comprend le moi, lequel est, certes, transcendantal en fin de compte, mais n'en sait rien) dispose d'une science du monde et d'un monde qui est dans son absoluité naïve, le spectateur devenu conscient qu'il est lui-même un moi transcendantal, ne dispose du monde que comme d'un *phénomène,* c'est-à-dire comme d'un *cogitatum* corrélat d'une *cogitatio*, comme ce qui se manifeste corrélativement à chaque manifestation, comme d'un simple corrélat
>
> trad. de Launay 1994, p. 15[4]

Husserl dit que la réduction phénoménologique produit une sorte de dédoublement du moi (*Ich-Spaltung*). On retrouve ici la scission ou la césure kantienne entre le moi empirique et l'ego transcendantal, mais reprise dans un contexte cartésien. Husserl a ainsi effectué un pas en arrière (*ein Schritt zurück*) pour revenir au *cogito*, mais l'égologie transcendantale accomplit par la réduction phénoménologique une *épochè* qui n'est pas étrangère à la philosophie transcendantale de Kant, quand ce ne serait que par la radicalisation du point de vue de l'observateur transcendantal qui devient sujet monadique dans l'idéalisme transcendantal de Husserl. Mais c'est dans la *Méditation cartésienne VI* conçue et rédigée par Eugen Fink (voir Fink 1932 et 1993), le fidèle collaborateur de Husserl, que le thème de l'observateur transcendantal acquiert son statut final dans « l'idée d'une théorie transcendantale de la méthode ». Retrouvant le vocabulaire kantien, Fink introduit la dialectique transcendantale de l'observateur transcendantal qui signe l'accomplissement de l'activité phénoménologisante : ce n'est pas un spectateur passif, mais l'acteur d'une phénoménologie constructive (*konstruktive Phänomenologie*) où le sujet transcendantal ne travaille pas sur un donné, mais le constitue ou le construit comme objet transcendantal. L'activité phénoménologique déshumanise en quelque sorte, *Entmenschung* selon l'expression de Fink, pour parachever l'oeuvre de la constitution par la double réduction de l'*épochè* du monde et de l'ego « mondain » ou de l'homme naturel (*der natürliche Mensch*), comme le disait Husserl dans ses *Pariser Vorträge* (Husserl 1950, p. 16). Quant à Sartre qui a étudié Husserl à Berlin, il mettra l'accent sur la notion d'intentionnalité héritée de Brentano dans le champ transcendantal d'une conscience impersonnelle (voir Sartre 1992). Fink complète Husserl en revenant à Kant qu'il conjugue avec Hegel lorsqu'il emprunte à ce dernier l'opération de la sursomption (*Aufhebung*)[5] dans le sens hégélien de la suppression (*Vernichten*) et de la conservation (*Bewahren*) dans ce que Fink appelle les vérités prédicatives, c'est-à-dire les énoncés portant sur le monde phénoménal (*Erscheinungswahrheiten*). On peut voir là une inflexion vers le langage, inflexion qui est absente chez Husserl à toutes fins utiles. Sans doute Heidegger, que Fink connaissait bien, a-t-il joué un rôle dans ce tournant vers le langage. En tout cas, Gadamer dans son texte sur le mouvement phénoménologique (Gadamer 1963) – où il caractérise la réduction transcendantale comme réaction à la conscience « positionnelle » (*positionales Bewußtsein*) devant la science dans le sillage de la critique heideggérienne de la technique – soutient que la question du langage n'a été qu'effleurée (*bedacht*) chez Husserl et conclut par un appel au langage (*unterwegs zur Sprache*).

4. L'OBSERVATEUR INTERPRÈTE ET SON HERMÉNEUTIQUE

C'est la troisième partie de *Wahrheit und Methode,* (Gadamer 1965) « Le langage, fil directeur de la conversion (*Wendung*) ontologique de l'herméneutique », qui nous intéresse d'abord ici.

La théorie intégrale de l'interprétation doit englober aussi bien la compréhension de l'art que se propose l'esthétique que la compréhension non pas seulement historique, mais aussi historicisante des sciences humaines. L'historicité de toute compréhension signifie davantage que la nécessaire actualité de l'acte de compréhension, la compréhension est elle-même en procès, en devenir (*Geschehen*). De cette façon, l'historicisme est-il surmonté par une méthode qui met en relief la précompréhension totalisante du cercle herméneutique dans la réciprocité de l'interprète et de l'interprété. L'idée de l'histoire *effectuelle* ou conscience de l'effet historique (*wirkungsgeschichtliches Bewußtsein*) ouvre le cercle herméneutique vers la médiation dialogale des interprètes.

C'est dans le langage comme « milieu universel » dans lequel s'accomplit le comprendre qu'une entente entre l'interprétant et l'interprété, entre les interprétants eux-mêmes est possible. L'objet et le procès herméneutiques sont essentiellement langage (*Sprachlichkeit*), il n'y a d'interprétation qu'exprimée et tout sens est verbe. Le langage se révèle comme étant l'élément primordial de l'herméneutique en tant qu'expérience de l'autre dans la communication et expérience du monde (*Welterfahrung*) dans l'appartenance réciproque, horizon et milieu, centre et élément qui « médiatise l'être processif et fini de l'homme avec soi-même et le monde ». (Gadamer 1965, p. 435)

Ainsi l'herméneutique se découvre-t-elle une vocation d'universalité, et comprendre c'est venir au langage « l'être qui peut être compris est langage ». Entre l'être et le langage, il n'y a pas d'isomorphisme égalisateur, le langage ne dit que parce qu'il y a à dire (*es gibt zu sagen*) et qu'« il y a » vient au langage (*es gibt zur Sprache*) (Gadamer 1965, p. 450).

À la fin, l'herméneutique comme propédeutique d'une théorie générale du langage, ne donne aucun précepte, ne fournit aucune règle de vérité. La méthode, le chemin montre que dans la recherche le chercheur, être de langage, fait partie du jeu, il se cherche lui-même, selon le mot d'Héraclite : il n'est pas le spectateur désintéressé qui déroule dans une conscience objectivante le film abstrait d'une marche nécessaire vers la vérité. Aussi bien dans les sciences de la nature que dans les sciences de l'homme, aucune méthode ne donne accès à un monde totalement objectif qui n'est en réalité que le produit partiel d'un savoir qui s'ignore et s'égare hors de soi. Le réel est langage, lieu ouvert du jeu réciproque de la conscience et de son monde. Par les réseaux de signes qu'elle tend dans les structures qu'elle élabore dans toute l'étendue de sa réalité, la conscience supporte sa présence dans la proximité du même et l'approche continue du différent jusqu'à la limite de ses actes donateurs de sens. Sa présence au monde est langage.

L'herméneutique philosophique de Gadamer continue l'oeuvre de Husserl et de Heidegger. Elle s'inscrit dans une tradition attentive à une lecture des choses elles-mêmes qu'elle interprète comme le cheminement de la conscience, dans et vers le langage.

5. L'OBSERVATEUR LOCAL ET SON INTERPRÉTATION

L'observateur-interprète de Gadamer est un être de langage, mais ce n'est pas à ce titre qu'il apparait en physique. La notion d'observateur a été introduite en physique contemporaine avec l'avènement de la physique quantique et son interprétation dans ce qu'il est convenu d'appeler l'interprétation de Copenhague ou l'interprétation de Bohr – Heisenberg. Ce sont surtout les relations d'indétermination ou d'*indéterminité* (*Unbestimmtheitsrelationen*), communément renommées « principe d'incertitude » de Heisenberg, qui sont à l'origine du concept d'observateur ou de système observateur en interaction avec le système observé. Selon le principe de Heisenberg, les relations d'indétermination stipulent que les variables du système observé, par exemple la vitesse ou quantité de mouvement et la position d'une particule d'un système quantique, ne peuvent être mesurées simultanément avec la même précision, la mesure de la position perturbant la mesure de la quantité de mouvement (et vice-versa) de la particule dans un dispositif expérimental. Heisenberg a défini mathématiquement son principe en disant que la relation de non commutation des variables canoniques était au fondement du principe dont les relations d'indétermination – que Heisenberg avait d'abord désignées comme relations d'imprécision (*Ungenauigkeit*) – ne sont que la représentation intuitive. Il s'agit donc non pas seulement d'une impossibilité expérimentale de la mesure, mais avant tout d'une impossibilité conceptuelle en vertu de la relation mathématique de non commutation des variables canoniques.

Leon Rosenfeld, un proche collaborateur de Bohr, a bien défini la notion de phénomène en mécanique quantique :

> A phenomenon is therefore a process (endowed with the characteristic Quantal wholeness) involving a definite type of interaction between the system and the apparatus.
>
> (Rosenfeld 1962, p. 82).

Un phénomène quantique est donc un processus avec des caractéristiques quantiques inhérentes qui implique une interaction bien définie entre le système observé et l'appareil de mesure. Il faut bien comprendre que l'appareil de mesure n'est pas seulement un dispositif expérimental, mais l'observateur qui « prend les mesures » et qui calibre son appareil, par exemple un compteur Geiger ; l'observateur fait donc partie de l'appareillage expérimental. Le mathématicien John von Neumann qui a apporté une contribution décisive aux fondements mathématiques de la mécanique quantique a même voulu intégrer la conscience de l'observateur dans le processus de la mesure, mais on doit penser que c'est dans l'interprétation de la mesure qu'intervient la conscience de d'observateur en MQ.

5.1 La relativité

Il faut toutefois préciser que la notion d'observateur était aussi présente dans la théorie de la relativité restreinte d'Einstein. L'observateur relativiste dispose d'un arsenal expérimental constitué uniquement d'horloges synchrones et de règles ou tiges rigides pour déterminer la simultanéité de deux évènements à l'aide d'un faisceau lumineux dont la vitesse est de 300,000 km/s. Le résultat expérimental, comme on sait, est la relativité de la simultanéité. Einstein concluait qu'il ne faut pas attribuer à la notion de simultanéité une signification absolue, mais que deux évènements qui, vus d'un système de coordonnées (le référentiel) sont simultanés, ne le sont plus quand on les observe dans un système en mouvement uniforme par rapport au premier. La notion de mouvement uniforme (principe d'inertie) est héritée de Galilée et Einstein n'a fait qu'ajouter le postulat de la constance de la vitesse de la lumière dans le vide pour obtenir la théorie relativiste qui est en même temps une théorie relationnelle des observateurs.

Un motif important en fondements de la physique est la notion d'observateur local. On peut définir un concept d'observateur local dans la théorie des espaces de Hilbert qui puisse fonder la théorie de la mesure en mécanique quantique (MQ) – voir (Gauthier 2015 et 2017) – mais c'est dans la théorie de la relativité générale (RG) que la notion d'observateur local a d'abord été introduite par I. E. Segal dans le contexte de la géométrie différentielle : pour Segal, l'observateur local est la contrepartie mathématique de « référentiel lorentzien local » ou une généralisation de la notion d'observateur en relativité restreinte (RR). Il est possible de généraliser cette notion à la relativité générale (RG) et de montrer comment l'observateur ponctuel fixe (en anglais, *the fixed-point observer*) rend compte de la structure topologique du continuum spatiotemporel, réduit certains principes cosmologiques fondamentaux et rend inopérant le principe anthropique qui stipule que l'univers physique a évolué en fonction de l'observateur.

Le passage de RR à RG est rendu possible par le principe d'équivalence fort qui stipule qu'il est toujours possible de choisir un référentiel ou système d'inertie local à tout point d'un champ gravitationnel qui obéisse aux mêmes lois physiques qu'un système de coordonnées cartésiennes non accéléré en l'absence de gravitation. Le principe de Mach selon lequel la masse inerte d'un corps est déterminée par la distribution des corps dans l'univers est un autre principe de passage. Sur le plan philosophique, on sait que c'est Mach qui a formulé la critique décisive des concepts newtoniens d'espace et de temps absolus en montrant qu'ils n'avaient rien d'opératoire et que l'expérience du seau rotatif ne devait pas s'expliquer par le recours à un référentiel absolu (l'espace absolu), mais plutôt en invoquant l'interaction du seau avec l'ensemble des masses dans l'univers. Il est paradoxal que ce soit le principe de Mach qui ait influencé Einstein sur le plan philosophique, à tout le moins, dans sa théorie de la relativité générale. La question de savoir si le principe de Mach est compatible ou non avec RG ne nous intéresse pas ici. Il va de soi que la théorie cosmologique s'occupe du continuum espace-temps et dans ce sens réintroduit un espacetemps absolu dans un univers einsteinien. Le modèle cosmologique d'un Gödel témoigne de cette renaissance en admettant un univers rotatif en l'absence du principe ou postulat de Weyl sur la régularité ou l'orientation des lignes d'univers temporelles. Le cône de lumière représente l'espace-temps de Minkowski avec la flèche verticale qui ordonne les lignes d'univers selon le passé et le futur en passant par le point d'intersection du présent horizontal qui s'étend sur tout l'espace. Minkowski n'hésite pas à invoquer le postulat de l'univers absolu «*Postulat der absoluten Welt*» (voir Gauthier 2010).

C'est là le cadre conceptuel de la RG exprimée dans la formulation standard. On peut faire un appel informel ici à quelques concepts fondamentaux de la topologie combinatoire pour les fins de cet exposé. Nous supposons que l'espacetemps constitue une sphère 4-dimensionnelle ou hypersphère dans R^4 et nous prenons la 3-surface de cette hypersphère quadridimensionnelle, ce qui nous donne un espace sphérique. On peut se représenter les choses sur une surface sphérique close S^2. La surface S^2 n'a pas de direction privilégiée : l'univers est isotropique et homogène. Mais si on consent à situer l'observateur désigné par O sur cette surface ou dans cette sphère, il peut être aussi considéré comme un point fixe ou un vecteur de longueur zéro dans cet univers sphérique : c'est le théorème de Brouwer qu'on peut généraliser de la façon suivante :

> Toute boule fermée est un espace avec point fixe dans R^n pourvu que tout homéomorphisme dans S^2 comporte un point fixe, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de champ de vecteurs continu dans S^2 : il doit y avoir un vecteur de longueur nulle.

C'est ce vecteur zéro ou point fixe qui peut jouer le rôle d'observateur local ou d'observateur ponctuel fixe en RG – l'homéomorphisme signifiant simplement une fonction continue entre deux points et dans les deux sens. Le continuum espace-temps est une variété n-dimensionnelle localement homéomorphe à un espace euclidien R^n. Remarquons que le continuum dans ce contexte est un ensemble connexe fermé de points et un autre théorème de Brouwer nous dit qu'un continuum $n - 1$ dimensionnel sépare un espace euclidien n-dimensionnel en deux régions, dans notre cas celle de l'observateur local ponctuel fixe et celle de l'univers observable.

Quelles conclusions peut-on tirer de ces résultats formels ? En premier lieu, le résultat de la bipartition de l'espace euclidien nous permet de situer *topologiquement* l'observateur local dans le complément local de l'espace euclidien de l'univers observable – la nature euclidienne de l'espace a un caractère mathématique et n'est pas affectée par les propriétés relativistes de l'espace physique. En deuxième lieu, le résultat topologique est strictement isomorphe au résultat obtenu pour l'espace de Hilbert de la mécanique quantique. Nous avons donc une situation mathématique unifiée et il nous faut en tirer maintenant les conséquences pour la RG. La place topologique qu'occupe l'observateur local explique que l'univers observable est homogène et isotrope ou que dans le cône d'espace-temps l'observateur ponctuel fixe représente la jonction (la place nulle du présent) du passé et du futur ; il n'y a là bien sûr aucune implication quant à une singularité initiale de type *Big Bang* ou d'autres singularités, trous noirs ou *Big Crunch* final. Du point de vue philosophique, c'est le principe anthropique réaliste que se trouve invalidé, puisqu'il ne correspond qu'à une analogie physique tirée d'une situation mathématique précise–faut-il ajouter ici que l'observateur local en RG pas plus qu'en MQ n'a de caractéristique anthropologique propre, puisqu'il ne s'agit en dernière analyse que d'un système observateur quelconque, appareil de mesure, terrestre ou extraterrestre, etc.

Il ne faut pas négliger le fait cependant que plusieurs théoriciens, de Wheeler à Penrose et Hawking à t'Hooft ou Weinberg distinguent le principe général qui suppose simplement que l'univers physique a évolué de façon à favoriser l'apparition de la vie de principes plus spécifiques qui exigent par exemple l'émergence d'un observateur « intelligent » dans un univers participatif, comme chez Wheeler (voir là-dessus Gauthier 1992 et 2017). On doit avouer toutefois que ce principe réaliste est fondé sur des propriétés physiques probabilistes comme la constante de structure fine pour l'interaction électromagnétique – avec une valeur numérique approximative de $^1/_{137}$ – qui a suscité nombre de spéculations irréalistes !

Enfin, d'un point de vue constructiviste, c'est la présence d'un observateur insulaire, point fixe ou local – à la différence de l'observateur relativiste du référentiel inertiel de la RR – qui fonde le concept d'espace-temps absolu. Notons, en tout dernier lieu, que la coordonnée temporelle n'est pas intervenue dans l'argumentation, simplement parce qu'elle se réduit à une dimension « spatialisée ». C'est l'observateur « fixe » et cependant local qui fait se mouvoir autour de lui tout l'univers observable et cet observateur n'est pas sur Sirius comme l'observateur omniscient de Laplace qui, connaissant les conditions initiales de l'univers observable, pouvait en déterminer le destin final. Pour nous, localement, la Terre comme point d'observation est redevenue le centre de l'univers *et elle ne se meut pas*, comme le clame Husserl dans son texte de 1934 sur le renversement phénoménologique de la révolution copernicienne.

La cosmologie n'est pas en reste avec la théorie des multivers et l'inflation chaotique ou éternelle sur fond de champ fondamental scalaire, mesurable en tous points de l'espace fait partie des scénarios cosmiques possibles ; le champ scalaire du boson de Higgs relève du modèle standard de la théorie des champs quantiques contemporaine, mais la théorie des cordes suppose des échelons plus élevés dans l'échelle énergétique au-delà des 125 GeV où pourraient se trouver des partenaires supersymétriques des particules du modèle standard, par exemple le sélectron pour l'électron et autres *axions* et *axinos* pour meubler la matière sombre. Les physiciens théoriciens, dont certains sont de véritables métaphysiciens, ne semblent guère se préoccuper des fondements logicomathématiques et de la critique fondationnelle ou épistémologique de leurs spéculations et s'en remettent souvent à l'imagination cosmographique à l'instar de voyageurs interstellaires. Il y a pourtant des théorèmes de limitation qui peuvent mettre un frein à ces élans spéculatifs, théorèmes de Gleason, de Bell, de Kochen-Specker, etc., ou encore des théorèmes purement mathématiques de la théorie des ensembles ou mieux de la topologie algébrique (notions de point fixe et homéomorphisme, par exemple) qui sont le plus souvent ignorés ou passés sous silence dans une communauté scientifique avide de nouveautés conceptuelles, quand elles ne sont pas purement imaginaires. Par exemple, l'intrication de deux particules avec des valeurs de spin opposées est une situation de symétrie avant la mesure que la mesure vient briser de la même manière que la mesure va provoquer l'effondrement du paquet d'ondes dans l'interprétation de la MQ chez von Neumann.

Sans adopter l'hypothèse de von Neumann d'une coupure (*Schnitt*) entre un système observé et un système observateur doté de conscience, c'est toujours la théorie de la mesure en MQ (que certains réalistes voudraient ignorer) qui est au cœur du problème de l'intrication (*entanglement*) des parrticules quantiques. Le problème est issu de l'expérience de pensée EPR ou paradoxe d'Einstein-Podolsky-Rosen en 1935 qui suppose qu'il y a interaction à distance entre particules, ce que Einstein avait appelé (*a spooky action at a distance*) ou action fantomatique à distance. Pourtant Bohr à l'époque avait insisté sur la théorie de la mesure pour dissiper le paradoxe, mais il a fallu que les expériences d'Aspect *et alii* invalident les relations d'inégalité de J.L. Bell qui avait pris au sérieux le paradoxe EPR. Le paradoxe a été résolu en montrant que les inégalités de Bell étaient violées au détriment d'une théorie classique et déterministe de variables cachées locales et au profit de la mécanique quantique et de sa théorie de la mesure. En effet, l'intrication ne relève pas d'une ontologie quantique comme le pensent les physiciens réalistes comme Einstein ou David Bohm et un certain nombre de contemporains, mais de la théorie de la mesure dans l'interprétation de Copenhague puisque l'information obtenue sur les particules intriquées est toujours à l'aune de la vitesse de la lumière qui demeure l'étalon de mesure électromagnétique de la relativité einsteinienne. La théorie de la *décohérence* en dissociant les états superposés des particules intriquées apporte une réponse réaliste au problème de l'intrication quantique, mais elle ne fait que transposer la théorie de la mesure microscopique à un environnement macroscopique où l'interaction se brise spontanément pourrait-on dire, à l'exemple des brisures de symétrie dans la théorie quantique des champs qui seraient à l'origine, par exemple, de l'asymétrie de la matière et de l'antimatière au moment du Big Bang selon le modèle standard de la cosmologie. Quoi qu'il en soit, se trouvent réconciliés ici Einstein, qui croyait que la MQ était incomplète dans sa description du réel physique, et Bohr qui pensait que la MQ avec sa théorie de la mesure était complémentaire à une théorie classique comme la RR (voir là-dessus Gauthier 2017 et 2018).

La théorie de l'information quantique en termes de *qubits* – pour des *quantum bits* analogues aux *bits* de l'informatique classique – fait ses choux gras des relations d'indétermination de Heisenberg en stipulant que la mesure de l'information discontinue des *qubits* en unités discrètes ne peut être exacte, ce qui autorise le non clonage, la non téléportation en plus de la non destruction et de la non diffusion de l'information. C'est ce que l'on peut appeler *le brouillage de Heisenberg* dans l'information quantique et cet effet de brouillage élémentaire a des conséquences sur l'image distordue d'un univers diffracté.

J. A. Wheeler a voulu faire de l'information un concept paradigmatique de la physique, après avoir proposé la théorie géométrodynamique en cosmologie relativiste selon laquelle l'univers physique se réduit à la dynamique de l'espace-temps quadridimensionnel. De son côté, G. t'Hooft a proposé une théorie holographique qui réduit l'univers à une perspective bidimensionnelle pour l'observateur local : ces deux points de vue, le point de vue anthropique participatif de Wheeler et l'holographe de t'Hooft reposent sur une interprétation réaliste de la fonction d'onde de Schrödinger, ce qui entraine des problèmes fondationnels d'ordre mathématique tout comme les multivers d'Everett. Le problème fondamental relève de la dichotomie entre physique et mathématique (et logique). Si l'on veut rendre compte du réel physique (par exemple la fonction d'onde de la MQ) en termes mathématiques, il faut faire appel à des concepts mathématiques comme la théorie des fonctions, l'analyse classique et la théorie des ensembles d'un point de vue réaliste.

Or il y a un chiasme entre le continuum physique et le continu mathématique (ensembliste). En termes simples, les mesures en physique sont finies puisqu'il n'y pas de quantité infinie mesurable dans le monde physique. Les outils mathématiques de la RG, de la MQ, de la cosmologie et de la théorie quantique des champs ont la cardinalité du continu, soit 2 à l'aleph zéro ($2^{\aleph_0}$), i.e. l'ensemble puissance d'aleph zéro ($\aleph_0$), la cardinalité d'un ensemble dénombrable, alors que $2^{\aleph_0}$ est non dénombrable ; cela signifie que l'ensemble des observations possibles d'un observateur fini « à l'infini » est dénombrable, et même s'il y avait un nombre infini d'observateurs, leurs observations possibles demeureraient toujours dénombrables, puisque $\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$ et ces observateurs aussi nombreux soient-ils ne peuvent accéder par leurs observations au continu mathématique qui sous-tend le continuum physique. Ce fossé, cet écart ne peut être comblé d'un point de vue réaliste, seule une théorie constructiviste peut approximer le continu mathématique et le continuum physique par des moyens finis, les seuls moyens à la disposition des observateurs locaux.

5.2 La mécanique quantique

Les relations d'incertitude font partie intégrante de la mécanique quantique et bien peu de physiciens ou de philosophes les refusent aujourd'hui. Le principe de complémentarité de Bohr n'est pas moins central. C'est d'ailleurs en se fondant sur une expérience de pensée similaire à celle que nous avons décrite plus haut, soit l'impossibilité conceptuelle de la mesure simultanée des variables canoniques en MQ, que Bohr a dû faire appel à des descriptions complémentaires. La dualité onde-corpuscule est l'aspect le plus superficiel de la thèse de la complémentarité : la complémentarité se joue au niveau des descriptions causale et spatiotemporelle, à savoir les descriptions complémentaires en termes de lois de conservation (les variables dynamiques) et en termes de coordonnées spatiotemporelles.

Un bel exemple est la théorie de la mesure d'une particule. L'équation de Schrödinger décrit l'évolution causale de l'onde porteuse de la particule alors que pour localiser la particule lors d'une mesure il faut faire intervenir la probabilité, la localisation de la particule ne pouvant être définie dans l'absolu en vertu du principe d'indétermination de Heisenberg. C'est donc l'exclusion mutuelle des descriptions qui entraine leur complémentarité dans la mécanique quantique, alors que ces descriptions sont tout à fait compatibles en mécanique classique en vertu du caractère macrophysique des interactions physiques. Qu'on ait élevé par la suite les principes d'incertitude et de complémentarité au rang d'une doctrine philosophique relève de l'histoire des idées et de la sociologie, non de la physique ou de l'épistémologie. Quoi qu'il en soit, la thèse de la complémentarité a donné naissance à ce qu'il est convenu d'appeler l'interprétation de Copenhague de la mécanique quantique, et c'est encore aujourd'hui l'interprétation dominante malgré les attaques persistantes, si ce n'est percutantes, venant en particulier des réalistes plus ou moins critiques (ou naïfs).

6. HYPOTHÈSES, THÉORIES, MODÈLES

Il est sans doute pertinent de rappeler que la notion d'hypothèse change de sens avec la révolution ou la transformation (*Umwandlung*) kantienne. Ainsi le grand mathématicien Bernhard Riemann, influencé par Herbart, son professeur de philosophie qui défend un apriorisme matériel ou empiriste, définit-il l'hypothèse comme « tout ce que la pensée ajoute aux phénomènes ». Il s'agit bien entendu d'un point de vue kantien qui lui permet d'identifier *Hypothesen* et *Thatsachen* (faits) : la loi d'inertie qui est une loi du mouvement est une hypothèse et non un axiome selon Riemann, parce que la loi d'inertie relève de l'expérience *a posteriori*, alors qu'un axiome est analytique et *a priori*. Riemann exprime d'ailleurs la loi d'inertie sous la forme d'un énoncé conditionnel contrefactuel comme on le fait aujourd'hui : « S'il n'y avait qu'un seul point matériel dans le monde et qu'il se mût dans l'espace avec une vitesse déterminée, il conserverait alors toujours cette vitesse[6] ». L'hypothèse, c'est la théorie incertaine. Seules les théories logiques et mathématiques sont vraies *a priori*, c'est-à-dire non soumises aux tests empiriques de confirmation ou de validation. Kant croyait que les énoncés logiques étaient analytiques, c'est-à-dire valides en dehors de toute expérience, alors que les énoncés mathématiques étaient synthétiques *a priori*, c'est-à-dire qu'ils étaient vrais en vertu des conditions de toute expérience possible, conditions inscrites dans les dispositions cognitives du sujet connaissant et qui ne sauraient découler de l'expérience. Ce sont les formes a priori de l'espace et du temps qui sont au fondement de la perception sensible et les catégories a priori de l'entendement qui rendent possible la connaissance.

Revenons à l'hypothèse. L'hypothèse est donc un énoncé qui porte sur le monde, elle peut donc être vraie ou fausse. Le monde dont nous parlons ici est le monde empirique, l'univers physique. La théorie physique est donc hypothétique par nature et ses modèles ne sont que des réalisations diverses de la structure ou appareil analytique de la théorie. Voyons brièvement ce qu'il en est.

7. LA POSTURE CONSTRUCTIVISTE

La perspective adoptée dans ce travail est manifestement celle du constructivisme logicomathématique. En mathématiques, c'est le constructivisme arithmétique de Kronecker dans la grande tradition arithmétique de Fermat et Gauss, qui est le leitmotiv ; vient ensuite l'intuitionnisme mathématique de Brouwer qui a introduit le concept de sujet créateur pour rendre compte de l'activité mathématique. La logique intuitionniste est la version logique du constructivisme mathématique et témoigne à son tour de la prédominance de l'activité de construction des objets mathématiques sur les structures idéales du réalisme platonicien, selon son appellation courante. On peut encore aller plus loin cependant et doter la logique d'un contenu numérique, ce que seule une logique arithmétique ou logique interne de l'arithmétique, la logique polynomiale modulaire, peut accomplir (voir Gauthier 2015). Si ce constructivisme est toujours une option valable dans les fondements de la physique, c'est qu'il met l'accent sur la surdétermination de l'appareil analytique par rapport à l'appareil expérimental et aux données de l'expérience qui ne peuvent jamais être des faits bruts. Bachelard disait qu'un appareil ou un instrument scientifique est une *théorie matérialisée*. L'appareil analytique, une création de Hilbert dans ses travaux de physique mathématique, c'est l'ensemble constitué des formalismes mathématiques à l'œuvre dans une théorie physique qu'on peut opposer à l'appareil expérimental constitué non seulement des appareils de mesure, mais des données expérimentales et des préparations de l'expérience, laboratoires et instrumentations. Il faut bien voir que ce vocable « appareil analytique », en apparence délesté de toute charge théorique, porte en réalité tout le poids logique et mathématique de la théorie physique. Qu'il suffise de penser que certains physiciens, dont Einstein et Wheeler dans sa « géométrodynamique » ou certains adeptes de la théorie des cordes et supercordes en physique contemporaine, ont espéré réduire la physique à la géométrie. Mais la prise en charge du réel physique nous interdit de voir dans les relations entre appareil analytique et appareil expérimental une surface lisse qu'aucun phénomène physique ou résultat expérimental ne viendrait briser.

En réalité, l'appareil analytique et l'appareil expérimental entretiennent des relations complexes dans un ensemble réticulé de flèches ou morphismes : ce sont les modèles de la théorie physique qui modulent ou médiatisent les deux composantes, appareil analytique et appareil expérimental. Ce dernier représente les données empiriques et leur préparation en vue de la mesure, mais la mesure elle-même est soumise à l'interaction d'un système observé et d'un système observateur : l'observateur dispose d'un arsenal théorique qui donne un sens aux résultats expérimentaux du système observé. Le cas de la probabilité en mécanique quantique est patent, puisque c'est le carré de la valeur absolue de la fonction d'onde ψ, i.e. $|\psi|^2$ dans un intervalle réel (0, 1) qui rend compte du caractère probabilitaire de la physique quantique. C'est donc le réseau de relations ou la dialectique réticulaire entre le théorique et l'empirique qui règle le régime des influences entre l'appareil analytique et l'appareil expérimental. En effet l'appareil analytique ne saurait être conçu comme un système rigide de constructions ou structures mathématiques pas plus qu'on ne peut concevoir un dispositif expérimental qui serait totalement assujetti à l'appareil analytique.

L'appareil analytique de la théorie physique n'est pas canonique ou univoque, il a besoin de modèles multiples pour sa réalisation et le contenu expérimental de la théorie ne peut être récupéré par un seul modèle au détriment de la richesse des données expérimentales. Il y donc influence ou détermination réciproque des deux appareils dans une dialectique qui n'est pas linéaire entre les composantes de la théorie physique. Ce schéma assouplit la notion d'appareil analytique que Hilbert avait d'abord défini comme ensemble fermé de l'axiomatique physique, réservant à la seule interprétation de la théorie physique la souplesse et la malléabilité de l'expérience. Hilbert ne disposait pas de la notion moderne de modèle pour apprécier la diversité des modèles non standards et la mutuelle dépendance des appareils, analytique et expérimental ; notons encore que la distinction ici ne veut refléter que la structure dynamique et la teneur constructive des théories physiques en mettant en veilleuse les engagements ontologiques ou les options métaphysiques des postures fondationnelles en philosophie de la physique.

Ce sont encore les modèles théoriques qui constituent l'arsenal de la physique mathématique en théorie quantique des champs. Un bel exemple est le régime théorique des symétries et supersymétries de la théorie des particules élémentaires qui repose sur le théorème fondamental CPT pour les symétries de la charge C, de la parité P (symétrie miroir) et du temps T. La symétrie de la parité peut être brisée, comme le duo CP, mais le trio CPT doit demeurer intact pour garantir l'invariance des lois physiques et la théorie des supercordes s'alimente aux supersymétries pour assurer ses avancées dans une théorie unifiée de la théorie des particules élémentaires et de la théorie de la gravitation où l'on recherche encore des *symmétrons*, particules élémentaires candidates de la supersymmétrie. Si une brisure de symétrie *spontanée* peut rendre compte de l'asymétrie matière-antimatière au moment du *Big Bang*, la théorie des supercordes doit recomposer les symétries brisées dans des modèles duaux et ainsi reconstituer par exemple la symétrie miroir ; remarquons toutefois que la réflexion bidirectionnelle (homéomorphique) doit se faire dans la même dimension, ici la dimension 2, autrement il y diffraction *différentielle* des images qui ne sont plus conformes… La théorie des cordes en 10 ou 11 dimensions recourt à la variété ou à l'espace de Calabi-Yau comme arène pour compactifier les dimensions supplémentaires au continuum quadridimensionnel : la compactification signifie que l'on réduit 6 dimensions à des filaments ou des cordelettes dans un espace à 3 + 1 dimensions. L'opération n'est pas sans mal mathématique, mais elle parvient à conserver la cohérence ou la consistance logique de la théorie qui est renormalisable, c'est-à-dire qu'elle est exempte des divergences ou des infinités rampantes des théories infinitaires. Le problème ou plutôt la tâche philosophique –au sens de l'*Aufgabe* kantienne – consiste ici à rendre explicites les motifs finitistes ou constructivistes qui lestent la théorie d'une surcharge de l'appareil analytique incompatible avec les contraintes finitaires de l'appareil expérimental de la théorie physique.

C'est dans la perspective d'une logique interne de la physique ou logique physique (*physikalische Logik*) selon le terme de Hilbert, qu'on peut situer cette analyse de l'appareil analytique et de ses conditions de réalité (*Realitätsbedingungen*), comme le disaient Hilbert et von Neumann dans leurs travaux sur les fondements mathématiques de la mécanique quantique.

La posture constructiviste consistera à mettre l'accent sur ce que Hilbert et son élève von Neumann ont appelé l'appareil analytique (*analytischer Apparat*), c'est-à-dire l'ensemble des structures logiques et mathématiques, le formalisme qui surdétermine le donné expérimental. L'appareil analytique génère des modèles qui ne sont pas isomorphes, ce qui signifie qu'on a nécessairement des modèles non standards et que la théorie ne peut être canonique ou à interprétation unique ; modèle est pris ici dans un sens plus large que la notion de modèle dans la théorie des modèles en logique mathématique ou dans le sémantique ensembliste usuelle de la logique formelle où l'on ne peut avoir de modèle principal pour l'arithmétique de Peano, par exemple, que pour une théorie du second ordre où l'on quantifie sur les propriétés ou les sous-ensembles des individus ou éléments individuels du 1er ordre. Ce sens plus large ne fait pas la distinction entre les ordres de la quantification et permet d'admettre des cardinalités non dénombrables comme dans la théorie des multivers d'Everett « *the many-universe interpretation of Quantum Mechanics* ». Mais c'est cette largesse dans la prolifération des modèles qui permet de réfuter la thèse d'Everett qui suppose une bijection ou correspondance biunivoque entre l'appareil analytique et le modèle des multivers. En effet, Everett défend l'idée que la ramification universelle de la fonction d'onde dans la théorie ondulatoire de Schrödinger engendre des univers multiples, alors que nous ne sommes conscients que d'un monde : mais il n'y a pas de bijection ou de correspondance biunivoque entre ce monde de l'expérience, qui est certainement au plus infini dénombrable ou de cardinalité aleph zéro ($\aleph_0$), et la fonction d'onde dont les valeurs sont des nombres réels ou complexes avec la cardinalité du continu (2 à l'aleph zéro ou $2^{\aleph_0}$). C'est pour cette raison que les cosmologues disent maintenant que s'il y a des mondes parallèles, ils sont inaccessibles. La même critique peut être faite à la théorie des mondes possibles de Lewis où un monde possible désigné, le monde réel, n'est pas sur un pied d'égalité ou de même cardinalité avec l'ensemble des autres mondes. Autrement, le monde physique serait dans tous ses états en même temps « *toto simul sub specie aeternitatis* », selon une expression de Spinoza, ce qui rendrait toute mesure impossible. Il faut bien voir que l'univers physique est mesurable, et si on peut en prendre la mesure localement, c'est que nous avons affaire à chaque fois à un état singulier, un événement que nous mesurons dans un intervalle de probabilité finie ou tout au plus infini dénombrable – avec additivité sigma, dit-on en termes techniques. C'est l'appareil expérimental qui est responsable de la mesure dans la préparation de l'expérience qui, elle, traite les données expérimentales et le passage de l'appareil analytique à l'appareil expérimental s'opère alors par la médiation des modèles.

Si la théorie physique donne naissance à plusieurs modèles, c'est que la théorie est une construction hypothétique – obtenue par abduction selon le terme de C.S. Peirce – et fondée sur un appareil analytique ou un formalisme logicomathématique dont la solidité a été éprouvée. Prenons le cas de la mécanique quantique : son armature analytique est l'espace de Hilbert, nommé ainsi par von Neumann qui a écrit l'ouvrage majeur sur les fondements mathématiques de la mécanique quantique en 1932. Comme on l'a vu plus haut, von Neumann y parle de conditions de réalité ou de réalisation de l'appareil analytique, comme le caractère fini des valeurs propres d'un opérateur hermitique dans l'espace de Hilbert ; ce sont les modèles qui réalisent la structure logicomathématique de la théorie physique. En suivant ce train de pensée, on peut résoudre le problème ou le mystère de l'applicabilité des mathématiques au monde physique, comme le disait Eugene P. Wigner. Le mystère se dissipe en effet quand on met l'accent sur l'interaction de l'appareil analytique et de l'appareil expérimental dans une théorie de la mesure, qui se résume à l'interaction du système observé et du système observateur. Il est assez évident que les structures logicomathématiques appartiennent au système observateur qui est aussi le *mesureur* du système observé qui se trouve ainsi structuré pour ne pas dire construit de part en part. L'appareil analytique s'applique au monde physique, parce que les modèles qu'il génère modulent les conditions de sa réalisation. La thèse de la surdétermination de l'appareil analytique vient ainsi conforter la notion du mythe du donné (*the myth of the given*) formulée par W. Sellars ou de l'imprégnation du donné empirique par la théorie, c'est la *theory-ladenness* ou la charge théorique, sa prégnance, qui s'appuie sur le donné pour le soulever, comme un levier (*Hebel*), appareil qui a servi de modèle à Hegel pour l'articulation de la sursomption (*Aufhebung*).

8. REMARQUES FINALES

Nous avons tenté de tracer le trajet de l'observateur de Kant et Husserl à l'observateur local de la physique contemporaine. L'observateur local a un statut physique en tant que système observateur en interaction avec un système observé dans le monde physique ; il a en plus un statut mathématique dans l'appareil analytique d'une théorie physique, un lieu topologique dans les théories de la relativité restreinte, de la relativité générale et de la mécanique quantique jusqu'à la théorie quantique des champs et la cosmologie. L'observateur local comme système observateur en interaction avec l'univers physique fait partie des appareils expérimental et analytique d'une théorie physique qu'il n'a pas encore interprétée. L'interprétation ou la lecture herméneutique des résultats d'une mesure d'une expérience dans l'appareil expérimental et de sa relation avec l'appareil analytique exige la présence d'un sujet ou d'un agent linguistique « hors du monde physique ». C'est ce locuteur ou agent linguistique qui prend la relève de l'observateur local « physique » pour interpréter l'expérience de l'observateur constructeur (*der konstruktive Zuschauer*), comme le dirait sans doute Eugen Fink avec l'accord de Husserl et de Kant. C'est cette filière transcendantale qui a été remontée pour justifier la thèse de l'activité d'un sujet qui transcende par le langage le monde objectif ou l'univers physique pour mieux l'observer et l'interpréter. À la question « Pourquoi y a-t-il un monde ? », le sujet transcendantal a la réponse en lui-même en tant qu'interprète de « son monde » et du monde physique transcendant qu'il doit aussi interpréter comme « son » monde. C'est en ces termes que Husserl concevait la raison comme subjectivité transcendantale se constituant en constituant le monde (*Vernunft als*

Selbstkonstituirende und Weltkonstituirende transzendentale Subjektivität) dans (Husserl 1965, p. 275). Wittgenstein n'est si loin ici, lorsqu'il énonce dans la proposition 5.6 de son *Tractatus logico-philosophicus* (Wittgenstein 1922) que « les limites de mon langage sont les limites de mon monde » tout en invoquant une mystique de l'indicible étranger à la phénoménologie transcendantale…[7].

Du point de vue scientifique et philosophique, la question cosmologique est centrale. Les questions de l'origine et de l'horizon sont étroitement liées. Répétons-le, l'origine de l'univers (cosmogonie) et sa structure (cosmologie) sont à ce point confondues qu'on peut réduire ces deux questions au seul problème cosmologique. Ce problème a toutes les apparences d'un problème presque résolu, puisque le modèle standard du *Big Bang* est considéré par la plupart des physiciens comme la théorie vraie de l'univers physique réel.

L'univers aurait donc 13,7 milliards d'années et serait né d'une singularité initiale, le *Big Bang*, gigantesque explosion qui aurait engendré, après une période d'inflation extraordinaire, les galaxies telles que nous les connaissons maintenant. À la suite de la période d'expansion et depuis la fin de cette période, l'univers se contracterait pour aboutir à un *Big Crunch* ou *Grand Écrasement*, à moins qu'il ne soit ouvert, ce qui signifierait que l'expansion n'a pas de fin. D'autres scénarios sont possibles, comme celui d'une fluctuation du vide quantique qui produirait une ou plusieurs bulles d'univers qui pourraient éclater pour se dissiper ensuite dans l'indifférence de la soupe primordiale. Ce dernier scénario est quantique, c'est-à-dire qu'il tente d'unifier la cosmologie relativiste et la mécanique quantique. Mais les cosmologies sans singularité initiale sont possibles et les modèles de Segal (chronogéométrie) et de Alfvén (champs électromagnétiques) entre autres ont des vertus indéniables parce qu'ils réussissent à éviter la masse ou l'énergie infinies que doit postuler le modèle standard à l'origine. D'autres encore, comme la théorie des supercordes ou membranes (la M-théorie), sont des théories unificatrices ou Théories du Tout (TdT), qui misent sur des dualités ou symétries fondamentales entre modèles théoriques (*e.g.* dualité entre l'univers anti de Sitter et une théorie quantique des champs dite conforme avec transformations préservant les angles).

Les grands tests cosmologiques ne sont pas concluants. Il y a d'abord l'isotropie et l'homogénéité du rayonnement de fond thermique à trois degrés Kelvin découvert par Penzias et Wilson en 1964 et qui serait dans le modèle standard un vestige du *Big Bang* ou encore la densité critique de la matière qui permettrait à l'univers de se refermer, ce qui nécessite la présence encore inobservée d'une matière-énergie sombre et froide invisible et plus lente que les photons ou la lumière, l'abondance de l'hélium et du deutérium, etc. Ces tests n'ont pas de valeur absolue, mais ils montrent bien que la cosmologie est loin du compte et que le modèle standard ne suffit plus à la tâche. Pour la théorie des particules élémentaires, là aussi le modèle standard ne parvient pas à rendre compte de l'origine de la masse des particules (malgré le boson de Higgs), de la gravitation, de la dualité matière-antimatière ou encore de la matière sombre. Il faut donc aller au-delà dans une physique nouvelle comme la théorie des supercordes, dont le sort n'est pas encore scellé.

Mais la cosmologie ou théorie de l'univers est-elle possible et n'est-elle pas limitée par un horizon, l'horizon du visible ou de l'observable ? Imaginer un au-delà de l'horizon est la tâche de la métaphysique qui prend alors la relève de la mythologie pour inventer la scène originelle d'une mer infinie d'où émerge une tortue géante porteuse de la terre et de l'univers tout entier comme dans le mythe amérindien, l'indétermination de l'abîme, le *tohu-wa-bohu* de la Bible, ou sa turbulence chaotique, *Tiamat* dans la mythologie assyro-babylonienne ou *Noun* dans la mythologie égyptienne. Cette eau originaire, que l'on retrouve encore chez Thalès dans la philosophie grecque présocratique, n'est pas si éloignée des fluctuations du vide quantique et le mythe de l'océan primitif peut être perçu comme la matrice de toutes les cosmogonies. Mais qui abordera jamais les rives de l'origine ? La limite antérieure de l'origine rejoint la limite de l'horizon : toutes deux sont récessives et on ne peut concevoir l'univers que comme une sphère, ce qu'un autre penseur présocratique, Parménide, avait bien vu[8].

Mais cette sphère parménidienne est la projection de l'observateur local qui tient ensemble l'origine et l'horizon ; c'est lui qui mesure l'empan de l'univers et c'est seulement dans une théorie de l'interaction de l'univers observé et de l'observateur, qui est toujours local, que la philosophie de la physique trouve son point culminant. La circonférence de l'univers visible n'est pas indépendante du regard synoptique de l'observateur, pourrait-on dire en langage imagé. Au-delà de l'image, il demeure que la science atteint ses propres limites en cosmologie. Une théorie unifiée des champs électromagnétiques, nucléaires (fort et faible) et gravitationnels ne fournira pas l'idée parfaite, le modèle absolu du tout. L'union de la cosmologie et de la mécanique quantique ou la théorie des particules élémentaires ne produira pas l'unité ultime du savoir total, mais plutôt la synthèse limitée de savoirs inachevés et inachevables. La critique fondationnelle intervient, en effet, au moment même où l'idéal d'un savoir veut s'identifier au savoir idéal. Le physicien ou plus généralement le scientifique tombe parfois dans ce piège et plus d'un a prédit la fin de la science, de la physique en particulier. Mais la limite travaille le savoir de l'intérieur et la fin ne peut être que provisoire, puisqu'une science complète serait encore objet d'analyse, de critique ou de simple réflexion. Qu'on ne voie pas là une profession de foi philosophique en je ne sais quelle supériorité de la réflexion ou de la pensée critique sur la science ou le savoir en général, comme si la philosophie seule était éternelle, *philosophia perennis* selon l'expression consacrée. L'utopie d'une philosophie (sagesse ?) universelle qui engloberait tous les savoirs dans un vaste théorème est un rêve aussi vain que le savoir absolu. La métaphysique et les systèmes philosophiques traditionnels, dont celui de Hegel, ont incarné ce rêve ; les philosophies de la nature ont cru pouvoir formuler les principes premiers du réel quand elles ne sont pas parvenues à fixer les règles et les limites du savoir dans une sorte de dogmatique transcendantale. La science fixe ses propres limites et la critique fondationnelle ou philosophique prend acte et cherche à formuler une métathéorie qui replace les théories scientifiques dans le contexte global du savoir et de l'expérience : c'est cette installation dans le panorama des savoirs et des pratiques qui justifie la philosophie critique des sciences et non l'appel à des principes supérieurs d'une théorie de l'être, ontologie ou métaphysique, ou encore d'une théorie de la connaissance (épistémologie) qui viendrait marquer de son sceau la théorie finale du réel.

Si la philosophie critique des sciences avec les instruments formels de la logique et de la théorie des probabilités a des ambitions plus modestes, c'est qu'elle a un rôle mieux défini dans l'organisation et l'accroissement du savoir auquel elle contribue non seulement par une évaluation critique, mais aussi par des interventions constructives qui peuvent en modifier le cours (dans le meilleur des cas).

Quoi qu'il en soit, la philosophie conserve son rôle critique de vigile du savoir, parce que la philosophie n'est pas un savoir, si ce n'est un savoir historique, la science de sa propre histoire, tant il est vrai que tout philosophe doit refaire l'histoire de la philosophie, comme s'il la portait depuis toujours dans une mémoire millénaire. Le savoir est cumulatif, la philosophie est rétroactive, mais la philosophie des sciences, en oscillant entre le présent de la science et le passé de la philosophie, doit d'abord s'ajuster au savoir contemporain et, peut-être en s'inspirant de l'histoire des sciences plus que de sa propre histoire, tout en ne l'oubliant pas, doit projeter l'image future de la science dans l'interconnexion des savoirs. Son aboutissement n'est pas une sagesse ou une science suprême, mais l'inquiétude du savoir, puisque la philosophie n'est plus la servante d'aucune théologie profane ou sacrée, mais le seuil critique de la connaissance scientifique. La science est la construction symbolique du monde, comme aimait à le dire le mathématicien et philosophe Hermann Weyl ; Weyl s'inspirait ici de Kant qui, dans sa *Critique de la raison pure*, considérait la constitution transcendantale du monde objectif, c'est-à-dire la construction du savoir scientifique comme une tâche ou une mission (*Aufgabe*) du travail philosophique et non comme un problème scientifique[9].

NOTES

1. Les traductions françaises utilisent le plus souvent le terme de spectateur pour Zuschauer. Je choisis de traduire par « observateur », puisque Kant annonce sa révolution post-copernicienne en s'appuyant sur Copernic qui en tant qu'astronome était un observateur (actif) et non un simple spectateur du ciel étoilé ! L'ego transcendantal n'est pas un spectateur passif du monde phénoménal chez Kant ou du monde transcendant chez Husserl, c'est le moins qu'on puisse dire. La préposition *zu* du vocable *Zuschauer* suggère d'ailleurs de porter son attention active au spectacle (*Schau*), tout comme le préposition *ob* du latin *observatio* qui implique l'action d'observer. Le français spectateur comme le latin *spectator* a la connotation première de témoin passif.

2. Cf. *Kritik der reinen Vernunft*, Vorrede zur zweiten Auflage (voir Kant 1787, XVI). « Es hiermit eben so, als mit den ersten Gedanken des Kopernikus bewandt, der, nach dem mit der Erklärung der Himmelsbewegungen nicht gut fort wollte, wenn er annahm, das ganze Sternheer drehe sich um den Zuschauer, versuchte, ob es nicht besser gelingen möchte, wenn er den Zuschauer sich drehen, und dagegen die Sterne Ruhe ließ ».

3. Cf. *Kritik der reinen Vernunft,* Vorrede zur zweiten Auflage (voir Kant 1787 *[4]) « So verschafften die Centralgesetzte der Bewegungen der Himmelskörper dem, was Kopernikus, anfänglich nur als Hypothese annahm, ausgemachte Gewißheit und bewiesen zugleich die unsichtbare den Weltbau verbindende Kraft (der Newtonischen Anziehung), welche auf immer unentdekte geblieben wäre, wenn der erstere es nicht gewackt hätte, auf eine widersinnische, aber doch wahre Art die beobachteten Bewegungen nicht in den Gegenständen des Himmels, sondern in ihrem Zuschauer zu suchen ».

4. Cf. *Cartesianische Meditationen und Pariser Vorträge* (Husserl 1950, p. 20) « Hat der natürliche Mensch (darin das Ich, das letztlich zwar transzendental ist, aber davon nicht weiß) eine in naiver Absolutheit seiende Welt und Weltwissenschaft, so hat der seiner als transzendentales Ich bewußt gewordene transzendentale Zuschauer die Welt nur als Phaenomen, das sagt als cogitatum der jeweiligen cogitatio, als Erscheinen der jeweiligen Erscheinungen als bloßes Korrelat ».

5. La traductrice N. D. utilise ici le néologisme *sursomption* pour traduire l'*Aufhebung* hégélienne – j'ai introduit le terme dans mes travaux sur la logique hégélienne (voir Gauthier 1967, 2005, 2016). Ce n'est pas seulement l'*Aufhebung* que Fink emprunte à Hegel, mais des expressions comme «*die Selbstbewegung des konstituerende Lebens*», sauf que Hegel aurait plutôt dit «*die Selbstbewegung des Begriffs*»… Ce n'est pas le lieu ici de mesurer l'apport de Hegel à la phénoménologie de Fink. On sait que Husserl ne s'inspire jamais de Hegel.

6. Cf. Riemann 1990, p. 525. «*Man pflegt jetzt unter Hypothese Alles zu der Erscheinungen Hinzugedachte zu verstehen*». La définition de Riemann contraste avec la formule de Newton «*Hypotheses non fingo*» et la définition qu'il donnait de l'hypothèse dans ses *Philosophiae naturalis principia mathematica* : «*Quidquid enim ex Phaenomenis non deducitur*, *Hypothesis vocanda est*». L'ouvrage capital de Riemann sur « les hypothèses qui sont au fondement de la géométrie » concerne essentiellement les concepts mathématiques qui rendent compte de la géométrie physique. C'est dans le même esprit que Helmholtz parlera après Riemann de « faits » qui sont au fondement de la géométrie, mais il s'agit bien de faits au sens des apriori matériels de Herbart et des hypothèses de Riemann. Kant soutenait que c'était sur le mode hypothétique que Copernic avait conçu son observateur, mais il souhaitait au-delà de Copernic démontrer de façon apodictique et non plus hypothétique la construction des représentations de l'espace, du temps et des concepts fondamentaux ou catégories de l'entendement. C'est là l'essentiel de la reprise copernicienne de Kant qui transforme l'observateur « local » de Copernic en sujet transcendantal, mais Herbart, Riemann ou Helmholtz ne revendiquent pas le statut de sujet transcendantal dans les fondements des mathématiques et de la physique.

7. Mais on pourrait trouver plusieurs points de convergence entre Wittgenstein et Husserl. Par exemple, ce qui ne se laisse pas dire, se montre (*zeigt sich*) soutient Wittgenstein. Pour Husserl, la monstration (*Erscheinung*) manifeste le monde uniquement comme phénomène et ce que Wittgenstein appelle le sujet métaphysique (*das metaphysische Subjekt*) dont il dit qu'il n'appartient pas au monde, mais est une limite du monde «*Das Subjekt gehört nicht zur Welt, sondern es ist eine Grenze der Welt*» (Wittgenstein 1922, prop. 5.632) ; cette caractérisation correspond parfaitement au sujet transcendantal défini par Husserl dans ses *Pariser Vorträge*, comme nous l'avons vu plus haut.

8. Voir là-dessus mon ouvrage (Gauthier 2018).

9. Les néo-kantiens de l'École de Marbourg, Cohen, Natorp et Cassirer reprendront la tâche philosophique de la théorie ou du problème de la connaissance, comme dit Cassirer dans la perspective de la construction symbolique du monde. C'est là un thème que retiendra Hermann Weyl, un des mathématiciens les plus importants du vingtième siècle qui était à la fois philosophe et physicien. L'auteur T. Ryckman traduit l'*Aufgabe* kantienne par problème dans son ouvrage sur le règne de la rela-

tivité (Ryckman 2005) et il parle ailleurs, dans un ouvrage sur Einstein (2017) du « cryptic vocabulary between *gegeben* et *aufgegeben* » chez Kant, comme s'il y avait ambiguité ! Le philosophe des sciences Bas van Fraassen dans (van Fraassen 2008, p. 361) écrit que le récit (tale) de Ryckman est transcendantal, alors que le sien est empiriste : il s'agit ici en réalité d'un commentaire de Hermann Weyl sur l'impossibilité d'éliminer l'ego des sciences théoriques « ineliminable residue of the annihilation of the ego ». On a vu que l'ego de Weyl est bien transcendantal au sens kantien – Weyl a été aussi husserlien – et on peut se demander si l'ego de van Fraassen n'est qu'empirique, identifiable au moi empirique de Kant, ou s'il n'y a pas un reste inéliminable, comme dit Weyl. Dans la postérité de Kant, Humboldt avait déjà infléchi l'ego transcendantal vers le sujet linguistique en énonçant le principe que « c'est une force unique qui engendre en même temps la pensée (*Denkkraft*) et le langage (*spracherzeugende Kraft*) », force qui se manifeste universellement dans la diversité des langues humaines – sur la philosophie du langage de Humboldt, voir l'excellent article de Jean Leroux dans *Philosophiques* (Leroux 2006). Pour le présent auteur, le *reste* égoïque ou déictique demeure un motif philosophique et le mobile matériel d'un être de langage ou d'un animal logique (*zôon logikon*) sans attache transcendantale ou métaphysique et pour qui l'ego transcendantal est soluble dans le langage.

* Je remercie l'un des évaluateurs anonymes de *Philosophiques* pour sa lecture attentive et ses suggestions pertinentes qui ont permis de rendre plus lisible un texte parfois touffu.

** **Note personnelle**
John Archibald Wheeler, le célèbre physicien et cosmologue américain promoteur des expressions « black hole » (trou noir), « wormhole » (trou de ver) et « participatory universe » (univers participatif) m'a écrit une longue lettre d'appréciation (le 27 avril 1975) à propos de mon article (Gauthier 1971) dans lequel je mettais l'accent sur la notion d'observateur en mécanique quantique. J'avais envoyé une note critique à Wheeler sur les questions fondationnelles de son ouvrage classique *Gravitation* de 1973 écrit en collaboration avec deux autres cosmologues réputés C. W. Misner et K.S. Thorne (voir Misner 1973). Je note aussi que Wheeler a été un promoteur de la théorie des multivers d'Everett (qui avait été son étudiant), mais qu'il s'en est détaché par après. Par ailleurs, j'ai critiqué l'interprétation d'Everett dans de nombreuses publications (voir en particulier Gauthier 1992, 2015, 2017).

BIBLIOGRAPHIE

Fink, E. VI *Cartesianische Meditation. Teil 1. Die Idee einer transzendentaler Methodenlehre,* hrsg. von Ebeling, Holl, H. und Van Kerckhoven, G., Husserliana-Dokumente Bd II/I, 1932.

— *Sixième Méditation cartésienne. L'idée d'une théorie transcendantale de la méthode*, trad. Nathalie Depraz, Grenoble, Éditions Jérôme Million, 1994.

Friedman, M. *Kant and the Exact Sciences*, Stanford, CSLI, 1992

Gadamer, H. G. « Die phänomenologische Bewegung *Philosophische Rundschau* 11 (1963), 1-45.

— *Wahrheit und Methode. Grundzüge einer philosophischen Hermeneutik*, 1. Aufl., Tübingen, J.C.B. Mohr (Paul Siebeck), 1965.

Gauthier, Y. « Logique hégélienne et formalisation », *Dialogue*, vol. VI, n° 2, 1967, 151-165.

— « The use of the axiomatic method in quantum physics », *Philosophy of Science* vol.38 (1971) : 429-437.

— « Quantum Mechanics and the Local Observer », *International Journal of Theoretical Physics*, vol. 22, no. 12(1983), 1141-1152.

— « The logical analysis of mathematical physics : the case of renormalization procedures in Quantum Field Theories », *Zeitschrift für allgemeine Wissenschaftstheorie*, vol. XV, nº 1-2 (1985) : 251-260.

— *La logique interne des théories physiques*, Montréal/Paris, Bellarmin/Vrin, 1992.

— « Moment cinétique et syllogistique dynamique chez Hegel », *Philosophiques*, vol. 32, nº. 2, 2005, p. 357-368.

— « Hermann Minkowski : from Geometry of Numbers to Physical Geometry », in *Minkowski Spacetime : A Hundred Years Later*, ed. V. Petkov, Dordrecht, Springer (2010) : 247-257.

— « A General No-Cloning Theorem for an Infinite Multiverse », *Reports on Mathematical Physics*, vol. 48 (2013), nº 2, 191-199.

— *Towards an Arithmetical logic. The Arithmetical Foundations of Logic*, Bâle, Birkhäuser/Springer, 2015.

— « De Kant à Hegel : de la logique transcendantale à la syllogistique dynamique », *Hegel-Jahrbuch* 2016 (1), pp. 415-421.

— « From the Local Observer in QM to the Fixed-Point Observer in GR », *Advanced Studies in Theoretical Physics*, vol. 11, 2017, no. 12, p. 687-207.

— *Nouveaux Entretiens sur la pluralité des mondes. Essai de cosmologie sauvage à l'usage des profanes*, Presses de l'Université Laval, Québec et Hermann Éditeurs, Paris, 2018.

Fink, E. VI *Cartesianische Meditation. Teil 1. Die Idee einer transzendentaler Methodenlehre,* hrsg. von Ebeling, Holl, H. und Van Kerckhoven, G., Husserliana-Dokumente Bd II/I, 1932.

— *Sixième Méditation cartésienne. L'idée d'une théorie transcendantale de la méthode* trad. Nathalie Depraz, Grenoble, Éditions Jérôme Million, 1994.

Friedman, M. *Kant and the Exact Sciences*, Stanford, CSLI, 1992.

Husserl, E. *Cartesianische Meditationen und Pariser Vorträge*, hrsg. S. Strasser, Haag, Martinus Nijhoff, 1950.

— *Die Krisis der europaïschen Wissenschaften und die transzendentale Phänomenologie*, Husserliana, Band 6, hrsg. W. Biemel, Haag, Martinus Nijhoff, 1965.

— *Méditations Cartésiennes et les Conférences de Paris*, trad. Marc de Launay, Paris, Presses Universitaires de France, 1994.

Kant, I. *Kritik der reinen Vernunft*, (1787) *Gesammelte Schriften* (Akademie Ausgabe) I-XXIII, Electronic Edition, Band 3, Vorrede zur zweiten Auflage, XVI,*[4].

— *Critique de la raison pure*, trad. E. Renaut, 3e édition corrigée, Paris, GF-Flammarion, 2006.

Leroux, J. « Langage et pensée chez W. von Humboldt », *Philosophiques*, vol. 33, nº 2 (2006), p. 379-390.

Misner, C.W., Thorne, K.S., Wheeler, J.A., (1973) *Gravitation*, San Francisco, Freeman and Co.

Riemann, B. *Collected Papers*, Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1990.

Rosenfeld, L. « Misunderstandings on the Foundations of Quantum Theory », *Observation and Interpretation in the Philosophy of Physics with Special Reference to Quantum Mechanics*, Körner, S. (ed), New York, Dover, 1962.

Ryckman, T. *The Reign of Relativity*, Oxford : Oxford University Press, London, 2005.

Sartre, J.P. *La Transcendance de l'ego*, Paris, Vrin, 1992.

Segal, I.E. *Mathematical Cosmology and Extragalactic Astronomy*, Cambridge, Mass.,

Academic Press, 1976.

Van Fraassen, Bas C. *Scientific Representation. Paradoxes of Perspective,* Oxford Clarendon Press, 2008.

Wittgenstein, L. *Tractatus logico-philosophicus*, trad. C.K. Ogden, London, Routledge and Kegan Paul, 1922.

CHAPITRE 3

Commentaire de « Minkowski 1908 : l'espace-temps comme structure absolue de la relativité restreinte »

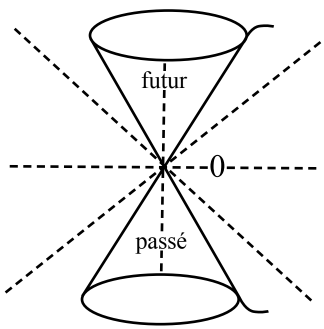
Ce texte a servi d'ébauche pour mon article « Hermann Minkowski : From Geometry of Numbers to Physical Geometry » paru dans l'ouvrage *Minkowski Spacetime : A Hundred Years Later*. V. Petkov (ed.), Dordrecht, Springer (2010), p. 247-257 et il a été reproduit dans mon ouvrage *Towards an Arithmetical Logic. The arithmetical foundations of logic*, Birkhäuser/Springer, 2015, p. 94-101. L'article propose une lecture du parcours de Minkowski de la géométrie des nombres à la géométrie physique. Minkowski est d'abord un mathématicien oeuvrant en théorie des nombres qui est venu ensuite à la physique et son texte séminal de 1908 « *Raum und Zeit* » (Espace et Temps) allait fournir la bonne formulation de la théorie einsteinienne de la relativité restreinte de 1905 – ce sont les mots de Hermann Weyl dans l'article suivant de ce recueil « Hermann Weyl on Minkowskian Space-Time and Riemannian Geometry ». Einstein a été pourtant réfractaire au point de vue de Minkowski pour se rallier par la suite.

Dans son texte de 1908, Minkowski énonce le postulat du monde absolu « *Postulat der absoluten Welt* » qui stipule que l'espace et le temps constituent une seule structure ou un substrat unique de l'univers physique quadridimensionnel, l'espace-temps. Minkowski trouve que le terme de relativité est plutôt terne (*matt* en allemand) quand il s'agit de caractériser le groupe des transformations de Lorentz (groupe de Poincaré) et veut le remplacer par celui de postulat du monde absolu de l'espace-temps.

Peu de commentateurs ont tenté de raccorder les travaux de Minkowski en géométrie des nombres qui est une sorte d'arithmétique géométrique à ses travaux en géométrie physique qui elle-même une sorte de physique géométrique. Ce que je montre dans l'article, c'est que les intuitions géométriques de Minkowski motivent à la fois son travail arithmétique et ses essais en physique avec en arrière-fond l'idéal leibnizien d'une harmonie préétablie entre mathématique et physique.

Minkowski avait introduit la notion de crible ou treillis numérique pour la représentation géométrique des entiers en coordonnées rectangulaires. Les diagrammes de la géométrie des nombres ne diffèrent pas essentiellement de ceux que l'on trouve dans l'article de 1908 où Minkowski écrit que « le vecteur force du mouvement (d'une particule) est le même que le vecteur force en mouvement ». Un parallélogramme des forces illustre bien la situation physique en termes géométriques et il ne reste plus à Minkowski qu'à encadrer les lignes d'univers dans un diagramme de Minkowski pour le cône de lumière.

Le cône de lumière représente l'espace-temps de Minkowski avec la flèche verticale qui ordonne les lignes d'univers selon le passé et le futur en passant par le point d'intersection du présent horizontal qui s'étend sur tout l'espace.



C'est là formulation standard de la relativité en termes minkowskiens du postulat du monde absolu.

Minkowski 1908 : l’espace-temps comme structure absolue de la relativité restreinte

1. INTRODUCTION

Pour l’historien ou le philosophe des sciences, Hermann Minkowski est l’auteur de la formulation de la théorie restreinte de la relativité en termes d’un espace-temps quadri-dimensionnel. Le texte original de 1908 « *Raum und Zeit* » est bien connu, mais on mentionne rarement que Minkowski est l’auteur d’une géométrie des nombres « *Geometrie der Zahlen* » qui est une branche importante de la théorie des nombres. Dans cette arithmétique géométrique, Minkowski introduit la notion de treillis numérique « *Zahlenlengitter* » qui doit servir de représentation géométrique de relations arithmétiques, c’est-à-dire qu’il s’agit de points isolés et de points d’intersection dans un diagramme destiné à définir l’approximation d’un nombre réel par des nombres rationnels. Je veux montrer que le concept de treillis numérique est à l’origine des diagrammes de Minkowski dans la géométrie physique de la RR. L’espace-temps minkowskien est isomorphe à un treillis numérique universel sans import ontologique. Cette analyse pourrait être pertinente pour la nouvelle physique de l’espace-temps (avec cordes ou boucles) qui remet en question les concepts modernes d’espace et de temps en relativité et en mécanique quantique.

2. GÉOMÉTRIE DES NOMBRES

Quelle est la relation entre la relation entre la géométrie des nombres et la géométrie physique chez Minkowski ? Je rappelle que Minkowski est avant tout un mathématicien et que c’est la physique mathématique qui l'intéresse au premier chef. À la fin de son article « Espace et temps », il énonce clairement le sens de son entreprise :

> Avec la mise au jour de ses conséquences mathématiques, il y aura plein d'indices pour la confirmation expérimentale du postulat du monde absolu « *Postulat der absoluten Welt* » de sorte que si quelqu'un regrette la perte des images traditionnelles <*Anschauungen*>, il se consolera vite avec l'idée de l'harmonie préétablie entre la physique et les mathématiques pures.
>
> Minkowski 1967, p. 444 (ma traduction)

Cette déclaration de principe ou cette profession de foi fait écho à l'hommage qu'il a rendu à Dirichlet dans texte de 1905 « *Peter Lejeune-Dirichlet und seine Bedeutung für die heutige Mathematik* » (Minkowski 1967, pp. 449-461). Minkowski dit que les deux directions de la théorie des nombres et de la physique mathématique, bien qu'elles semblent diverger, sont harmonieusement intégrées dans le travail analytique de Dirichlet. Ici Minkowski renvoie résultats de Dirichlet sur la convergence des séries de Fourier et au principe de Dirichlet sur les minima de la fonction potentielle. En rendant hommage à Dirichlet pour avoir introduit des facteurs discontinus dans les intégrales multiples de la fonction potentiel, Minkowski évoque l'idée de Leibniz du grand dessein d'un monde parfaitement harmonieux. Dans un autre texte de 1907, il dit encore :

> Pour le mathématicien habitué aux variétés multidimensionnelles – ce sont les *Mannigfaltigkeiten* de Riemann – et à la géométrie non euclidienne, il n'est pas bien difficile d'adapter le concept de temps (comme quatrième dimension) aux transformations de Lorentz concrètes.
>
> Minkowski II, 366 (ma traduction)

Minkowski ajoute que tout cela est en accord avec la théorie de la relativité restreinte telle que la conçoit Einstein. Cette perspective de mathématicien se traduit pour Minkowski dans son postulat du monde absolu et je voudrais en explorer les motivations mathématiques. Il faut dire que les travaux de Minkowski en physique théorique (hydrodynamique, problème de la capillarité, théorie de la relativité et théorie de l'électron) sont marginaux par rapport à son œuvre en théorie des nombres et en géométrie et plus spécifiquement dans ce que Minkowski a appelé la géométrie des nombres <*Geometrie der Zahlen*>.

C'est en voulant représenter géométriquement des relations numériques que Minkowski introduit la notion de treillis numérique ou *Zahlengitter*. Minkowski définit un treillis numérique tridimensionnel comme une représentation géométrique de trois entiers en coordonnées rectangulaires ; ces trois entiers correspondent à des points discrets de l'espace et ces points représentent à leur tour des corps physiques. La question principale ici est le contenu de la surface <*Flächeninhalt*> sur laquelle, pour ainsi dire, ces corps flottent. Pour illustrer la question, examinons le diagramme dessiné par Minkowski pour l'approximation d'une quantité ou nombre réel par des nombres rationnels.

Les trois points du treillis H, J, K sur la droite Y= 1 sont dans la relation suivante HJ = JK = OA pour O le point nul au centre du treillis et a un point correspondant à K sur la droite G parallèle à Y = 1. Le parallélogramme inscrit ne contient pas d'autre point du treillis que le point O dans son intérieur. Minkowski utilise ce genre de diagramme pour montrer que deux nombres relativement premiers x, y peuvent être représentés par des formes linéaires $\xi = \alpha x + \beta y$, $\eta = \gamma x + \delta y$ pour les droites ξ et η avec des coefficients arbitraires α, β, γ, δ et un déterminant $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ de sorte que la norme ou la longueur entre x et y (qui ne sont pas tous deux zéro) est

$$| \xi\eta | \leq 1/2.$$

Les diagrammes que trace Minkowski sont très élaborés, comme le montre le suivant qui doit illustrer « le lien fort intuitif entre toutes les solutions possibles de l'inégalité

$$| \xi\eta | \leq 1/2$$

dans les entiers sans diviseurs communs », dans les mots de Minkowski. Dans un autre diagramme utilise des fractions continues pour obtenir l'inégalité

$$- 1/2 < \xi\eta < 1/2$$

pour ce qu'il appelle des fractions de chaînes diagonales <*Diagonalkettenbrüche*>.

Cette géométrie des nombres a un contenu arithmétique alors que la géométrie elle-même a un contenu intuitif, déclare-t-il. L'idée principale consiste à inscrire des triangles ou des parallélogrammes en coordonnées cartésiennes rectangulaires afin de représenter le système réticulaire – le treillis – de formes quadratiques positives – polynômes homogènes de deuxième degré comme le ds^2 qui est la forme quadratique fondamentale pour l'élément métrique invariant de la RR – avec coefficients entiers. Un treillis numérique est requis, selon Minkowski, pour représenter le volume d'un corps et sa propriété arithmétique fondamentale est la généralisation de la notion de longueur d'une droite à l'aide du principe que dans un triangle, la somme des longueurs de deux côtés n'est jamais plus petite que la longueur du troisième côté – comme cas spécial nous avons le théorème de Pythagore pour les triangles rectangles

$$c^2 = a^2 + b^2$$

qui est à l'origine de la forme différentielle ds^2

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2$$

en coordonnées euclidiennes. Minkowski a consacré une grande partie de ses travaux à la théorie des formes quadratiques qui a fait l'objet de recherches majeures en théorie des nombres de Gauss à Kronecker et Hermite. Mais je ne veux pas élaborer là-dessus, je voudrais plutôt montrer la connexion interne des treillis numériques avec ce nous appelons maintenant les diagrammes de Minkowski.

Dans ses diagrammes mathématiques, Minkowski décrit les points isolés et les points d'intersection dans un treillis pour représenter l'approximation d'un nombre réel par des nombres rationnels ou encore des chaînes diagonales qui illustrent le fait que qua dans un triangle, la somme des longueurs de deux côtés ne peut être plus petite que la longueur du troisième côté, comme je l'ai plus haut et comme on peut le voir sur ces graphiques. Ici des fonctions rationnelles entières sont utilisées comme dénominateurs de fractions continues. Ce que nous obtenons en fin de compte, c'est une représentation géométrique des solutions d'une inégalité dans les nombres réels en termes d'entiers sans diviseur commun.

3. GÉOMÉTRIE PHYSIQUE

Ces diagrammes ou treillis numériques ne diffèrent pas essentiellement de ceux que l'on trouve dans l'article de 1908 «*Raum und Zeit*». Ce qui est représenté dans ces diagrammes et qui tient lieu de points du treillis, c'est la notion de charge ponctuelle d'un électron ou d'un potentiel scalaire ponctuel à l'intérieur d'un cône de lumière – voir graphique. Le diagramme décrit un électron en mouvement sur sa ligne d'univers en passant par les points d'univers P, P_1 et Q.

Minkowski veut décrire ici une charge ponctuelle en mouvement dans l'univers <absolu>, c'est-à-dire dans un continuum quadridimensionnel avec trois coordonnées spatiales x, y et z et une coordonnée temporelle t. Le vecteur P_1Q a une norme ou longueur r, alors que le vecteur PQ a une longueur e/r puisque P repose sur la tangente orthogonale à P_1Q qui coupe la ligne d'univers de e. Si l'on ajoute c la vitesse de la lumière dans le cône de lumière, on définit alors le champs de potentiel de l'électron ponctuel au point P_1 ; adossé à l'hyperbole de de courbure de la ligne d'univers, le diagramme représente l'espace de jeu des équations de la force pondéromotive dans un champ électromagnétique.

Remarquons que le diagramme a pour fonction de représenter un monde quadridimensionnel – il y a des lignes d'univers courbes continues – alors que les diagrammes de la géométrie des nombres devaient représenter un monde tridimensionnel de corps <*Körper*> dans l'espace – il n'y avait que des lignes d'univers droites continues.

Le postulat du monde absolu n'est rien d'autre que la totalité des points du treillis que Minkowski appellera lignes d'univers dans un univers réticulaire qui n'a pas d'autre contenu physique ou ontologique qu'un univers mathématique. Le temps réticulé est pris dans les rets d'un monde tridimensionnel, si l'on me permet ce jeu de mots.

Pour obtenir une image ou représentation physique des diagrammes de Minkowski, il faut faire la supposition d'une correspondance entre le *vecteur d'énergie en mouvement* et le *vecteur d'énergie du mouvement*. Minkowski écrit :

> Der Kraftvektor der Bewegung ist gleich dem bewegenden Kraftvektor.
>
> Minkowski II, 441

Ce que cela signifie, c'est que le mouvement ne peut être représenté que par l'image ou le dessin d'un vecteur sur une ligne continue, c'est-à-dire une ligne d'univers comme un point d'univers mobile ; les diagrammes ne sont alors que des dessins ou des graphes pour représenter le mouvement dans une géométrie physique comme les treillis qui étaient destinés à recouvrir le contenu d'une surface, Minkowski dit bien <*Flächeninhalt*> dans une géométrie des nombres ou géométrie arithmétique. Le parallèle entre les deux entreprises de la géométrie arithmétique et de la géométrie physique, soit celle de recouvrir une surface avec des treillis ou celle de remplir un espace bidimensionnel avec des diagrammes, ce parallélisme suggère fortement qu'il a un chemin continu dans la vision du monde ou l'*imago mundi* mathématique de Minkowski ou encore dans sa construction théorique du monde, comme dirait Hermann Weyl.

4. LA RÉCEPTION D'HERMANN WEYL

Hermann Weyl, le créateur de la théorie de jauge en théorie quantique des champs, a adopté assez tôt l'image du monde minkowskienne pour la relativité restreinte, c'est-à-dire la représentation quadridimensionnelle du continuum spatio-temporel. Weyl a exploité à ses propres fins le vocabulaire minkowskien de monde ou univers absolu, lignes d'univers ou points d'univers et même le terme de <*Substanz*> ou substance pour désigner la matière dans ses travaux philosophiques, par exemple *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaften* de 1927. Mais Weyl s'est bien sûr tourné vers Riemann quand il s'est agi de formuler la structure géométrique de l'univers de la Relativité Générale dans sa théorie des champs unifiés (pour l'électromagnétisme et la gravitation).

Weyl a reconnu à Minkowski le mérite d'avoir le premier trouvé la bonne formulation de la théorie de la relativité. Je cite :

> Les équations du mouvement pour les corps en mouvement sont déterminées par le principe de la relativité si l'on admet la théorie maxwellienne pour la matière au repos.

Il a aussi noté à propos de l'article de Minkowski de 1907 «*Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körper*» («Les équations fondamentales pour les processus électromagnétiques dans les corps en mouvement») que «c'est Minkowski qui le premier a donné la formulation mathématique correcte de la théorie einsteinienne : nous lui devons, dit-il, l'idée d'une géométrie quadridimensionnelle». Dans son texte, Minkowski avait distingué le théorème de la relativité du principe de la relativité ; le théorème est purement mathématique, dit-il, en termes de la covariance des transformations de Lorentz, alors que le second permet selon Minkowski la dérivation des lois de la mécanique à partir du seul principe de la conservation de l'énergie. Le vocabulaire est encore celui des vecteurs spatio-temporels et n'anticipe pas le langage nouveau de «*Raum und Zeit*» de 1908 où le vocabulaire des points d'univers et des lignes d'univers devient canonique et constitue l'ingrédient principal pour la représentation graphique du groupe des transformations spatiotemporelles. Minkowski suggère alors que la terminologie pour le postulat de la relativité est plutôt terne – <*matt*> en allemand – pour désigner les propriétés d'invariance du groupe de transformations et il propose plutôt le terme de <postulat du monde absolu>, «*Postulat der absoluten Welt*». Je note ici que Einstein a pensé renommer la théorie de la relativité, théorie de l'invariance ou des invariants <*Invariantentheorie*>. Je fais l'hypothèse que l'idiome minkowskien a d'abord une signification mathématique en tant que moyen ou outil pour représenter la structure spatiotemporelle du monde physique et je suppose que Weyl n'a pas interprété autrement l'image mathématique du monde de Minkowski.

5. CONCLUSION

Quelles sont les conclusions philosophiques que l'on peut tirer de cette interprétation de l'entreprise de Minkowski ? En ce qui touche l'ontologie de l'espace-temps relativiste, un univers réticulé pourrait être vide ou vidé de toute substance <*Substanz*> si l'on veut utiliser le terme de Minkowski pour matière, de la même manière qu'un univers de de Sitter, solution des équations du champ d'Einstein, est un univers sans matière. Les points substantiels ou les points d'univers forment des lignes d'univers qui couvrent un univers absolu, répète Minkowski (Minkowski II, 434). Et comme je l'ai dit plus haut, la validité universelle du postulat du monde absolu est une indication de l'harmonie préétablie entre l'univers mathématique et le monde physique, selon le credo philosophique de Minkowski dans la conclusion de son texte <Espace et temps>. Puisque le postulat du monde absolu pourrait n'avoir qu'un sens mathématique en vertu de sa fondation arithmético-géométrique, je lui accorderais un statut transcendantal à la suite de Weyl, c'est-à-dire le statut d'une structure *a priori* dans la construction théorique du monde. Les diagrammes de Minkowski font partie de l'appareil analytique, <*der analytische Apparat*> selon le terme de Hilbert dans son article de 1927 qu'il a écrit avec Nordheim et von Neumann «*Über die Grundlagen der Quantenmechanik*» (Sur les fondements de la mécanique quantique) ; les diagrammes font partie de l'appareil analytique ou de ses modèles, ils ne sont pas les représentants directs des données expérimentales de la physique. De mon point de vue fondationnel, une interprétation réaliste de l'image du monde minkowskienne est exclue dans les termes mêmes de la théorie de Minkowski.

Bien que Minkowski soutienne que ses intuitions de l'espace et du temps reposent sur la terre ferme de la physique expérimentale, ce sont là ses propres mots, la validité de ses intuitions se trouve plutôt dans la justification mathématique de leur contenu intuitif. En deçа ou au delà de la géométrie physique <*physikalische Geometrie*> selon l'expression de Helmholtz, se tapit une géométrie des nombres dont le cœur est l'arithmétique ou la théorie des nombres ou simplement le nombre. Nous revenons ainsi à Pythagore, dont le théorème qui porte son nom, à tort ou à raison, est la pierre angulaire de toute cette histoire et qui a motivé la théorie des formes quadratiques à l'origine de l'œuvre de Minkowski.

En physique contemporaine, dans la théorie des supercordes ou des membranes, des chercheurs comme Seiberg et Witten supposent que l'espace et le temps ne sont que des illusions. Ces illusions ne sont pas des fictions ou encore des formes a priori, si on n'est pas kantien ; ce sont simplement des représentations bidimensionnelles de formes quadratiques, polynômes homogènes de second degré.

Pour la Relativité Générale, le principe de covariance générale pour tous les systèmes de coordonnées se réduit à l'invariance de la métrique de Minkowski pour les systèmes locaux, disons asymptotiquement ou tangentiellement pour le champ gravitationnel selon le modèle de Schwarzschild, par le principe d'équivalence. Pour contrer le substantialisme ou le subtantivalisme (pour l'anglais <*substantivalism*>) de la variété espace-temps et le <*hole argument*>, littéralement l'argument du trou, dans la théorie einsteinienne de 1915, il suffit d'identifier les événements spatiotemporels avec les points d'intersection d'un treillis de Minkowski pour obtenir une théorie relationnelle où les transformations difféomorphiques des coordonnées avalent ou absorbent le trou ou toute structure d'arrière-plan dans une géométrie infinitésimale lisse tout en obéissant à une géométrie arithmétique sans ontologie physique.

C'est là le résultat final de l'impact d'une géométrie arithmétique sur la géométrie physique aux mains d'un Minkowski mathématicien. La propre solution d'Einstein à l'objection de l'ouverture béante dans la métrique des transformations de coordonnées l'a conduit à écarter les points d'espace-temps comme dépourvus de réalité physique au seul profit de la distribution de la matière, la substance du monde minkowskien en quelque sorte. Mais la défaite du subtantivalisme n'implique pas l'abandon définitif de la substance de Minkowski et de son postulat du monde absolu. La structure métrique du monde ne s'ajuste pas aux champs de matière et l'argument de la béance s'évanouit simplement si l'on est prêt a admettre l'idée que le champ métrique physique n'a pas de signification physique et qu'une théorie des transformations de jauge se suffit à elle-même. C'est Hermann Weyl qui a introduit en 1919 le concept d'invariance de jauge dans sa théorie des champs unifiés et Weyl a défendu l'idée que la forme métrique fondamentale est dérivée de la structure différentielle de la variété quadridimensionnelle et en plus que le contenu matériel du monde ne pouvait constituer un cadre observationnel canonique, mais n'est qu'un canevas – Minkowski aurait dit un treillis – dans la construction théorique du monde, comme Weyl le dit.

Du point de vue constructiviste de Weyl, la vision du monde absolu de Minkowski pourrait se traduire dans une « *imago mundi* », une image scientifique du monde comme partie prenante dans la construction symbolique du monde en termes physico-mathématiques.

Chapitre 4

Commentaire de « Le contenu de la logique »

Ce texte est tiré du chapitre 1 de mon ouvrage de 2004 *La logique du contenu. Sur la logique interne* paru chez L'Harmattan à Paris. Il s'agit essentiellement d'un texte introductif sur la notion de logique interne ou logique du contenu, en allemand *inhaltliche Logik* que l'on continue de traduire en anglais par « *contentual logic* » : il est vrai que l'anglais associe *internal* à *medecine,* mais il n'est pas question ici d'opération chirurgicale, si ce n'est d'extraire le contenu de sa forme symbolique. Ou encore faudrait-il caractériser la logique comme médecine interne des mathématiques plutôt que comme hygiène des mathématiques selon la suggestion d'André Weil, l'architecte de l'édifice Bourbaki.

Puisqu'il est question du contenu de la logique dans ce texte et que je cite Tarski à quelques reprises, je rappelle que dans un texte de 1936[1] sur la notion de conséquence ou consécution logique – *logische Folgerung* en allemand, Frege disait *logische Folge* – Tarski définissait le contenu logique comme invariant dans les transformations sur les structures isomorphes dans un univers logique ; on dirait maintenant simplement invariance sous automorphismes et il s'agit clairement d'une notion algébrique qui est dépendante du contenu arithmétique des fonctions polynomiales, donc de l'arithmétique générale de Kronecker.

Quoi qu'il en soit, la logique interne dont il s'agit ici est la logique arithmétique ou logique du contenu arithmétique (et polynomial) dans l'esprit kroneckerien de l'arithmétique générale. C'est donc la relance de la posture fondationnelle constructiviste ou finitiste qui est mise en jeu dans ce texte liminaire.

NOTE

1. Voir A. Tarski « *Über den Begriff der logischen Folgerung* », in *Actes du Congrès International de Philosophie Scientifique,* fasc. 7 (Actualités Scientifiques et Industrielles, vol. 394), Paris : Hermann et Cie, 1936, p. 1–11.

Le contenu de la logique

1. INTRODUCTION

La logique interne, que certains continuent d'appeler logique contentuelle par mimétisme lexical de l'anglais pour le vilain néologisme « *contentual* », est bien une logique du contenu – pour l'allemand <*Inhalt*>. La logique interne <*inhaltliche Logik*> dont il est question ici n'est pas une logique du contenu au sens où la logique de Hegel serait une logique du contenu ; dans ce dernier cas, il s'agit plutôt d'une onto-logique ou logique de l'être. La logique interne de l'arithmétique a un contenu mathématique, de l'arithmétique élémentaire à l'arithmétique générale des polynômes qu'on appelait aussi théorie des formes au 19e siècle. C'est cette première théorie des formes – qui est une théorie algébrique et une théorie des nombres algébriques – qui trouve sa culmination chez Kronecker et que la logique interne veut investir à l'aide de la méthode de la descente infinie de Fermat. La notion générale de nombre naturel n'est plus ici celle de l'ensemble infini (dénombrable) des nombres naturels de Cantor, Dedekind, Peano mais celle du polynôme (de degré n) de Fermat, Gauss et Kronecker. L'arithmétique de Fermat-Kronecker, ainsi que je la désigne, n'est pas l'arithmétique ensembliste de Peano avec son postulat d'induction et la descente infinie qui y est substituée innerve de vastes domaines des mathématiques, de la théorie des nombres à la géométrie arithmétique.

Quel est donc le contenu ? C'est d'abord et avant tout l'arithmétique et ses extensions, l'extension principale étant bien entendu l'arithmétique générale au sens de Kronecker qui correspond à la théorie des domaines de rationalité. i.e. la théorie des corps au sens de l'algèbre moderne. Par la voie de l'algèbre, on peut aller jusqu'à la géométrie algébrique ou arithmétique et même jusqu'à la théorie des catégories – par la voie de l'algèbre homologique. L'arithmétique générale se ramifie jusque dans les structures-mères (structures d'ordre, structures algébriques et structures topologiques) de l'architectonique de Bourbaki. Le contenu de la logique peut se déployer aussi dans l'arithmétique transfinie de la théorie cantorienne des ensembles et dans l'arithmétique ensembliste de Dedekind-Peano qui a servi de matrice à la logique post-hilbertienne mieux que la théorie frégéenne de l'arithmétique – avec ou sans principe humien d'extensionalité.

Les sous-systèmes (ou sous-structures) de l'arithmétique de Peano pourront être considérés aussi comme des extensions de l'arithmétique ensembliste, mais la question du contenu de la logique va à contresens de la question frégéenne : « Jusqu'où peut-on aller en arithmétique à l'aide de la seule logique ? ». Le renversement anti-frégéen pose plutôt la question : « Jusqu'où peut-on aller en logique à l'aide de la seule arithmétique ? ». Rappelons que Frege a posé une question similaire dans sa thèse d'habilitation de 1874 à l'Université d'Iéna, lorsqu'il a passé en revue les méthodes de calcul fondées sur une extension du concept de quantité ; pour lui, l'addition apparaissait comme l'opération première qui engendrait l'ensemble de l'arithmétique jusqu'à la théorie des fonctions, i.e., la sommation ou l'intégration, mais il veut réduire cette arithmétique additive dans la *Begriffsschrift* à une langue formelle où le concept de succession dans une série « *Anordnung in eine Reihe* » est remplacé par celui de suite logique « *logische Folge* ». Si l'on accorde que c'est de l'arithmétique générale dont il s'agit ici, il nous faut penser que c'est essentiellement la théorie des polynômes comme entiers généralisés qui constitue le contenu de la logique.

Le contenu mathématique le plus général est polynomial, c'est-à-dire l'expression algébrique du nombre. Mais c'est aussi l'ensemble des formes géométriques et autres et leurs transformations qui tissent la toile de fond mathématique et dont on peut extraire des structures invariantes à contenu numérique. Le réseau de relations qu'entretiennent les concepts mathématiques entre eux constitue un espace de possibilités que l'invention mathématique produit en même temps qu'elle avance, comme un chemin qu'on ouvre en progressant là où il n'y a pas de voie tracée. La logique interne veut retracer l'itinéraire mathématique. Formes et formules ont bien un lien de parenté superficiel ; la logique interne y cherche une égalité formelle, ce que l'on peut appeler un isomorphisme. La logique a déjà trouvé dans l'isomorphisme entre types (logiques) et formules une assise pour l'intuitionnisme, mais Hilbert avant Gentzen avait mis l'accent dans sa théorie des systèmes formels sur la linéarité d'une logique interne qui s'exprime (s'extériorise) en formes (formules) linéaires. La consécution est la forme ; la conséquence est la formule. La logique interne s'inspire d'un constructivisme radical pour arithmétiser la logique, c'est-à-dire traduire les constantes et les quantificateurs dans le langage des polynômes pour vérifier la consistance de l'arithmétique. La fondation arithmétique de la logique est en continuité avec le finitisme de Kronecker relancé par Hilbert. C'est dans le contexte historique de l'héritage finitiste et dans l'horizon de l'arithmétique polynomiale que s'est élaborée la logique interne.

2. LA LOGIQUE INTERNE

C'est à la recherche des motifs d'une logique interne ou logique du contenu à la suite de Hilbert qu'est vouée la logique arithmétique. Le thème ne se trouve pas seulement dans la postérité immédiate de Hilbert, chez Gödel, Gentzen et Tarski, par exemple, mais à des échos jusque dans la théorie intuitionniste des types, l'informatique théorique et les logiques substructurales où le traitement formel des contenus constitue la tâche première du logicien.

L'hypothèse de la continuité d'une problématique fondationnelle de Hilbert à nos jours est fondée sur la thèse constructiviste héritée de Kronecker : la logique a pour contenu l'arithmétique et ses extensions, de la combinatoire à la géométrie arithmétique. Le fil conducteur du constructivisme ne doit pas laisser croire cependant que toute logique a un contenu constructif, seulement que la logique minimale obéit à des contraintes qui sont d'ordre interne, règles de genèse plutôt que de structure qu'il importe de définir dans un premier temps. Ainsi, que la théorie des démonstrations de Gentzen doit faire l'objet d'un examen attentif d'un point de vue interne ; mais la théorie des modèles issue de Tarski n'est pas qu'affaire de structures non plus, puisque le premier objet de la théorie des modèles se trouve dans les théories algébriques élémentaires, *i.e.* les théories axiomatiques au premier ordre de l'algèbre de Boole aux corps algébriquement clos et la théorie polynomiale dont Tarski a voulu montrer la décidabilité après Hilbert et Kronecker à l'aide de la méthode de l'élimination des quantificateurs. C'est donc tout le champ de la logique mathématique contemporaine, déjà balisée dans mon ouvrage *Logique et fondements des mathématiques* que je retraverserai dans la perspective de la logique interne du contenu.

3. LA FORME DU CONTENU

Depuis l'*Organon* d'Aristote jusqu'à l'informatique d'aujourd'hui, la logique semble s'être limitée à un rôle instrumental. C'est le sens que donnait Aristote à *Organon* et c'est le sens que les informaticiens lui accordent quand ils élaborent des *systèmes experts* où la logique sert de moteur d'inférence pour *organiser* ou constituer en un système des contenus ou des savoirs que les experts (humains) ont élaborés. Mais la distinction qu'instaurait la logique traditionnelle entre l'organe et la fonction tend à s'estomper en intelligence artificielle quand on pense que l'instrument devient autonome et peut se reproduire dans une autogenèse mécanique.

La syllogistique aristotélicienne reproduisait la même forme sur des contenus différents : c'est la forme prédicative « *A* est *B* » invariable et applicable à toutes les matières. Le sujet et l'objet de prédication (le prédicat) sont unis par un lien substantiel (la copule « être ») dans la dualité d'une forme essentielle et d'un contenu matériel. Le syllogisme emprunte un chemin nécessaire pour passer de certaines choses posées (les prémisses) à autre chose (la conclusion), comme l'enseignent les *Analytiques Premiers*. Mais ce passage nécessaire du « poser en posant » – le *modus ponens* ou *modus ponendo ponens*, comme l'on dira en latin – ne devrait rendre compte que de la consécution des signes sans regard sur le contenu. Le formalisme, la théorie de la forme logique, perdurera jusqu'à Hilbert selon une tradition historienne qui supposera la continuité de la pensée logique des origines à nos jours. Mais le formalisme de Hilbert, s'il y a formalisme, n'est pas celui d'Aristote ; la théorie des systèmes formels, que Hilbert appelle aussi métamathématique, a pour objet les théories mathématiques et porte sur les preuves intrathéoriques. Le finitisme hilbertien, hérité de Kronecker, est bien plus qu'un formalisme vide, il est plutôt en parfaite continuité avec le calcul rationnel « *calculus ratiocinator* » d'un Leibniz qui conçoit une *mathesis universalis* sur le modèle de l'arithmétique. Frege relancera cette idée d'une écriture des concepts *Begriffsschrift* en se demandant jusqu'où peut-on aller en arithmétique à l'aide de la seule logique, c'est-à-dire à l'aide de la consécution inférentielle. Si Frege (avec Peirce) introduit les quantificateurs et si Hilbert, malgré la nouveauté de sa métamathématique, veut conserver la logique ordinaire aristotélicienne, ni l'un ni l'autre ne veulent se priver du principe du tiers exclu. Brouwer montrera qu'une mathématique nouvelle, la mathématique intuitionniste, peut s'en passer pour les suites (ou procès) infinies, là où les privilèges du fini ou du décidable s'estompent parce qu'on ne peut les retrouver avec la certitude administrée par la manipulation du fini, ce que l'informatique actuelle revendique de haute main. Cette certitude est au fondement de l'entreprise hilbertienne et la position finitiste <*die finite Einstellung*> qu'il défend, il l'emprunte, selon son propre aveu, à Kronecker qu'il pourfend pourtant pour avoir dédaigné les richesses illusoires du paradis cantorien des ensembles, ordinaux et cardinaux transfinis. Kronecker, le premier, parle de la consistance et de la vérités internes de l'arithmétique générale, pierre de touche de ce qu'on appeler son constructivisme intégral puisque la construction qu'il propose s'appuie sur la théorie des entiers, *i.e.* les nombres naturels positifs et négatifs avec le zéro. L'arithmétique générale se confond avec la théorie des formes ou polynômes (homogènes) qui font figure d'entiers généralisés dans une entreprise fondationnelle qui n'a pas perdu de sa pertinence, malgré l'oubli relatif où elle a été tenue par les logiciens et les philosophes. Seuls quelques mathématiciens, parmi les plus grands, de Hilbert (et Poincaré) à André Weil ont su reconnaître le caractère novateur de ce qu'il faut bien appeler le programme de Kronecker qui anticipe le programme de Hilbert et qui, à certains égards, le dépasse. La géométrie algébrique contemporaine, aussi nommée géométrie arithmétique, retourne à Kronecker comme fondateur de la théorie arithmétique des courbes algébriques, une théorie qui est à l'avant-scène des mathématiques actuelles, de Grothendieck à Langlands, de Weil à Faltings et Wiles.

Le propre de cette logique de l'arithmétique ou de cette logique arithmétique est qu'elle s'identifie à son contenu (<*inhaltliche Logik*> en allemand) en ce qu'elle veut faire dériver la structure logique du contenu lui-même. Loin donc d'un logicisme qui a voulu subordonner le contenu mathématique, arithmétique d'abord, à une forme logique externe et étrangère à tout formalisme vide (de contenu), la logique interne est au sens strict une logique du contenu qui traduit les connecteurs et quantificateurs logiques dans un calcul polynomial. L'arithmétique dont il est question n'est pas l'arithmétique ensembliste de Peano, mais l'arithmétique de Fermat-Kronecker, qui substitue au postulat d'induction de Peano la méthode de descente infinie de Fermat et l'intègre à l'arithmétique générale des formes ou polynômes homogènes de Kronecker. L'internalisation de la logique a pour effet la production d'un algorithme qui génère une preuve finitiste de la consistance de l'arithmétique, comme Hilbert l'avait espérée et que

Gödel n'avait pas exclue dans sa preuve d'incomplétude de l'arithmétique de Peano. Il est vrai que Gödel l'avait reconnu dans sa seconde preuve d'incomplétude sur les démonstrations de consistance pour la même arithmétique de Peano qu'une telle preuve devait employer des moyens plus forts que ceux du système formel pour le cas de l'arithmétique de Peano. Gentzen a alors eu recours en 1936 à l'induction transfinie pour démontrer la consistance de ce système formel tout en s'interrogeant sur le caractère finitaire ou constructif de l'induction transfinie – la deuxième version de sa preuve en 1938. Il faut reconnaître que Gentzen a voulu en limiter le caractère imprédicatif, mais le recours aux premiers échelons de la hiérarchie transfinie de la seconde classe de nombres de Cantor définie par l'expression

$$\lim_{n \to \omega} \omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot \omega}}}} {}^{n} = \varepsilon_0$$

le force à justifier l'induction transfinie comme méthode de preuve. D'autres comme Ackermann, Kalmár, Schütte – qui introduira une règle d'induction infinitaire, la règle ω – ou Takeuti, le suivent sans parvenir à fournir une justification interne de l'induction transfinie. Gödel, quant à lui, dans son interprétation *Dialectica* (1958) aura recours à une induction complète sur tous les types finis pour suggérer une « extension du point de vue fini », comme il le dira. Toutes ces tentatives se heurtent cependant à la limite externe de la consistance, selon la terminologie de Gödel lui-même. Le dehors de l'arithmétique, c'est la théorie des ensembles de Cantor, ce que Tarski appellera le système infinitiste où l'infini potentiel devient actuel par un *fiat* qui n'a rien de prédicatif ! La consistance ω de l'arithmétique de Peano dans la première preuve d'incomplétude de Gödel signifie que l'ensemble infini des nombres naturels sert d'arrière-fond à l'arithmétique et qu'il la déborde dans un univers externe ou un univers transcendant, celui de la théorie cantorienne des ordinaux transfinis. La logique interne aura pour fonction de réintégrer la preuve de consistance à l'intérieur de l'arithmétique : l'arithmétique générale des formes ou polynômes de Kronecker permettra de revenir dans le sein de l'arithmétique pour en montrer « la consistance et la vérité interne » dans les mots de Kronecker. La forme que devra prendre la logique interne est celle d'une logique polynomiale modulaire. J'explique d'abord ce que signifie logique modulaire.

4. LA LOGIQUE STRUCTURALE ET SOUS-STRUCTURALE

La logique pertinente « *relevant logic* » s'intéresse à la pertinence des prémisses dans les structures déductives. Ainsi, la conjonction de prémisses pertinentes s'écrira

$$\frac{X \quad \mathrm{A} \quad \mathrm{Y} \quad \mathrm{B}}{\mathrm{X} \,;\, \mathrm{Y} \qquad \mathrm{A} \circ \mathrm{B}}$$

pour la fusion, désignée par « ∘ », correspondant à la conjonction multiplicative $X * Y$ ou $X \otimes Y$ de la logique linéaire. La fusion garantie que la combinaison des prémisses définie par le point-virgule ; est nécessaire

$$X ; A \quad B, \quad ssi \quad X \quad A \rightarrow B,$$

ce qui restitue le théorème de déduction de Herbrand

$$\frac{X ; A \quad B}{X \quad A \rightarrow B} \text{ et } \frac{X \quad A \rightarrow B}{X ; A \quad B} .$$

On le voit, la fusion est liée directement à l'implication, ce que l'on appelle « résiduation » en logique de la pertinence. Le phénomène de résiduation en logique de la pertinence se situe au niveau de la combinaison des prémisses et n'est pas interne à la théorie de la consécution, puisqu'il équivaut à une règle de structure. Le calcul combinatoire des règles structurales peut être intégré dans une logique modulaire finie qui fasse l'économie de toute structure (externe).

La résiduation est un processus de modularisation, puisqu'on peut traduire la notion de résidu en termes d'une relation de congruence

$$a^n \equiv b \pmod{c}$$

où b est le résidu. La congruence est une relation d'équivalence et la résiduation montre que l'implication $A \rightarrow B$ comporte un résidu dans la combinaison des prémisses $X;A$. Le résidu X ici est dans la structure.

Pour bien voir qu'il s'agit d'une structure algébrique, considérons la notion de treillis qui est un ensemble partiellement ordonné par la relation $\leq$; un treillis modulaire a la formule :

$$\text{si } a \geq c, \text{ alors } a \quad (b \quad c) = (a \quad b) \quad c,$$

pour l'intersection et l'union, ce qui devient pour la logique des énoncés :

$$a \leq b \leftrightarrow a \vee b = b$$

et

$$\neg\, a \vee b \equiv a \rightarrow b$$

pour le conditionnel de la logique classique booléenne dans une algèbre ou treillis de Boole complémenté ; une algèbre de Heyting H a un pseudo-complément et a → b devient

$$a \wedge x \leq b$$

pour le plus grand élément $x \in H$. En théorie des catégories, une algèbre de Heyting n'est pas une catégorie cartésienne fermée comme l'est l'algèbre de Boole avec complément absolu – j'appelle le pseudo-complément complément local.

Si l'on prend maintenant l'interprétation topologique de l'implication intuitionniste

$$a \rightarrow b = In \quad (X - a) \quad b$$

pour a,b les ouverts d'un espace topologique X qu'on veut retraduire en langage modulaire, on obtient

$$b \equiv a \pmod{X}$$

où X est l'univers arithmétique combinatoire de la modularité ou divisibilité, le domaine des entiers Z.

5. LA LOGIQUE POLYNOMIALE MODULAIRE

Ici, c'est la théorie des polynômes qui prend la relève. La notion de polynôme est en effet la plus apte à définir la consécution comme suite ou série – un polynôme est le support fini d'une série de puissances infinie et a la forme générale

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n.$$

Polynôme a le sens de division multiple et nous renvoie immédiatement au concept de modularité. La traduction polynomiale de la logique se fera donc naturellement en termes de polynômes – nous nous limitons ici aux monômes et binômes. Voyons comment il est possible d'interpréter les constantes logiques dans un langage polynomial.

Définissons l'identité par

$$(A \cdot A)^{\circ}$$

qui fera office d'unique axiome avec $A^{\circ} \cdot A^{\circ} + 1$ qui correspond à l'univers combinatoire -0 sera $\overline{1}$ l'univers vide. Les autres clauses se traduisent par

$$A \vee B = A + B$$

$$A \wedge B = A \cdot B$$

$$\neg A = 1 - A$$

$$A \rightarrow B = \ (1 - A) + B$$

$$\exists x A x = \textstyle\sum_n A_n$$

$$\forall x A x = \textstyle\prod_n A_n$$

pour Σ et Π, somme et produit. Remarquons que la formule générale du binôme $(a + b)^n$ nous permet d'avoir la disjonction et la conjonction polynomiale en une seule expression qui rend la fusion de la logique pertinente $A \quad B$ ou la conjonction multiplicative $A \circ B$ de la logique linéaire. Nous avons donc pour l'implication résiduelle en logique de la pertinence (nous rendons $1 - A$ par $\overline{A}$)

$$(\overline{A} + B)^n.$$

L'avantage de cette formulation polynomiale est évident : elle autorise le passage direct de la conjonction à l'implication en révélant le caractère combinatoire de la connexion puisque l'expansion du binôme

$$(A + B)^n = A^n + nA^{n-1}B \quad n(n-1)/2! \quad A^{n-2}B^2 + \ldots + B^n$$

exhibe les coefficients dans la suite polynomiale. Puisqu'il s'agit de $\overline{A}$ ou de $1 - A$, c'est donc l'univers résiduel qui est dénombré comme l'exige la logique modulaire. Il faut ajouter ici le quantificateur effini que je définis par

$$\text{Ŧ}\ xAx = \Pi_{n\ldots} A_{n\ldots}$$

et qui sert à quantifier la suite effinie avec borne prépositionnelle ou initiale 0, mais sans borne postpositionnelle ou terminale. J'explique plus loin le sens de ce quantificateur pour la logique constructive et je renvoie à l'appendice pour la présentation formelle de la logique modulaire.

6. LA TRADUCTION POLYNOMIALE

L'addition apparaît comme l'opération fondamentale de la consécution, comme l'avait entrevu Frege et comme l'arithmétique élémentaire et l'arithmétique polynomiale l'exigent. C'est donc la disjonction qui est primitive et qui est traduite par l'addition

$$A \vee B = A + B.$$

La conjonction est rendue naturellement par la multiplication

$$A \wedge B = A \cdot B.$$

L'unique axiome (d'identité) sera noté

$$A \cdot B \ \ ^{\circ} = 1$$

$(A + B)^1$ signifiera la disjonction de deux éléments.

$(A + B)^n$ signifiera la disjonction de plusieurs éléments ou le quantificateur existentiel $\Sigma_n A_n$.

$(A \cdot B)^1$ est le produit de deux éléments.

$(A \cdot B)^n$ est le produit généralisé ou quantificateur universel $\Pi_n A_n$.

$(A \cdot B)^{n\ldots}$ est le quantificateur effini $\Pi_{n\ldots} A_{n\ldots}$.

L'implication se traduit par

$$\bar{A} + B \ \ ^{n}$$

pour $\bar{A} = 1 - a$ qui rend $\neg A \vee B$ dans le domaine d'intégrité Z. La négation apparaît ici comme le complément relatif de l'implication intuitionniste dans l'interprétation topologique $a \to b = In\ ((X - a) \quad b)$. On remarquera la parenté ou la connexion $(A + B)^n$ et de $(\bar{A} + B)^n$.

L'exposant n agit comme multiplicateur, mais comme la traduction polynomiale nous force à le faire le produit s'exprime par une somme de produits ; ainsi

$$A \cdot B = A_0\, B_0 + \ A_0\, B_1 + A_1\, B_0 \ \ x + \ldots + \ \ A_k\, B_1 \ \ x^{k+l}.$$

Pour la somme, prenons le cas $(A+B)^2$ du binôme et nous avons

$$A+B \ \ ^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

L'avantage de cette traduction polynomiale est qu'elle met au jour la consécution des coefficients, *i.e.* du contenu beaucoup mieux qu'une logique de la pertinence ou une logique linéaire. Par exemple, dans $(A+B)^2$, le contexte apparaît explicitement dans le coefficient $2AB$ et plutôt deux fois qu'une ! La fusion ou la conjonction multiplicative se trouve ici connectée ou combinée avec la disjonction (multiplicative) d'une façon interne sans l'artifice de règles structurales ou de nouvelles constantes. En plus, l'intime connexion de $(A+B)^n$ et de $(\overline{A}+B)^n$ révèle que l'implication est l'union de contenus complémentaires ou leur fusion dans une théorie additive de la consécution, ce qu'est essentiellement la théorie polynomiale. La formulation explicite de la théorie polynomiale requiert une fonction d'évaluation φ pour les clauses suivantes

1) $\varphi(A)\,[n] = a_0\,x$ pour un A arbitraire

2) $\varphi(\neg A)\,[n] = (1 - a_0\,x)$

3) $\varphi(A \vee B)\,[n] = (a_0\,x + b_0\,x)$

4) $\varphi(A \wedge B)\,[n] = \ (a_0\,x) \cdot (b_0\,x)$ pour le produit de deux monômes

5) $\varphi(A \rightarrow B)\,[m^n]\ (\bar{a}_0\,x + b_0\,x)^n$ pour $\bar{a}_0\,x = 1 - a_0\,x$

6) $\varphi(\exists\, xAx)\,[n + m + l] = \Sigma_{0\ldots}\,(a_0\,x + b_0\,x + c_0\,x)_{i<n}$

7) $\varphi(\forall\, xAx)\,[n \times m \times l] = \Pi_0\,(a_0 x b_0 x c_0 x)_{i<n}.$

8) $\varphi(\mp xAx)\,[n \times m \times l\ldots] = \Pi_{0\ldots}\,(a_0 x b_0 x c_0 x)_{i<n}.$

La traduction polynomiale a pour fin l'arithmétisation complète de la logique. Les avantages de l'interprétation polynomiale sont nombreux : ils redonnent un contenu numérique aux formules des logiques structurales et sous-structurales en soumettant les notions de résiduation, d'implication et de *modus ponens* (coupure et élimination de la coupure en calcul de séquents de Gentzen) à un calcul arithmétique qui absorbe le contenu algébrique de la logique et soustrait les logiques à leurs fondations ensemblistes – la relation de congruence est une relation arithmétique avant d'être une relation d'équivalence (ensembliste). La logique arithmétique qui est la logique interne de l'arithmétique est en même temps la logique interne de l'algèbre et redonne à l'arithmétique son droit d'aînesse en retrouvant le titre de Newton «*arithmetica universalis*» que Newton n'a pas revendiqué et celui de Kronecker «*allgemeine Arithmetik*» dûment revendiqué par Kronecker.

7. CONCLUSION

La logique polynomiale modulaire est une logique minimale au sens où elle prétend constituer le socle premier de l'édifice logique, le premier palier de la hiérarchie des logiques. Ce fondement logique se dissout pourtant en une logique interne, la logique polynomiale modulaire, qui élimine la logique au profit d'un contenu arithmétique. L'idée d'une logique arithmétique est antifrégéenne, c'est la réduction de la logique a l'arithmétique, à l'arithmétique élémentaire d'abord et à une arithmétique générale, *i.e.* polynomiale ensuite. Du point de vue structural, on peut dire que la logique modulaire n'a pas de structure, mais a un contenu. C'est d'ailleurs le lot d'une logique constructive de se parer de peu de structure externe, contenu plein n'ayant point besoin d'apparat formel. Une logique minimale doit pourtant se doter d'un appareil formel et ici l'économie maximale de moyens doit rendre transparent le contenu de la logique. Il n'est nul besoin cependant de surcharger la présentation formelle : l'économie est garante seulement de la logique minimale, puisque la logique arithmétique (modulaire) a l'ambition d'embrasser toute l'arithmétique, de la théorie des nombres élémentaires à la géométrie arithmétique – la partie arithmétique de la géométrie algébrique – en passant par l'algèbre abstraite et la théorie algébrique des nombres. Le cadre formel de la logique arithmétique ne vise pas à réduire l'ensemble des mathématiques à l'arithmétique, seulement à fonder sur l'arithmétique et ses extensions le corpus mathématique le plus vaste. Dans ce sens, l'arithmétisation de la logique n'est que la continuation de l'arithmétisation de l'analyse qui s'est accomplie au dix-neuvième siècle de Gauss et Cauchy à Weierstrass et Kronecker. Encore faut-il noter que l'arithmétisation de la logique, qui est l'œuvre du vingtième siècle à mon sens n'est pas encore achevée.

C'est un juste retour des choses que les mathématiques constructives puissent par le détour de la logique revenir maintenant au bercail arithmétique. Hilbert, Brouwer, Skolem, Herbrand, Gödel et Tarski ont tous contribué à cette arithmétisation (et algébrisation) de la logique et ce n'est que maintenant que l'on peut prendre la pleine mesure de ce mouvement de fond en deçà des vagues qu'a provoquées l'invention cantorienne de la théorie des ensembles transfinis. L'arithmétique analogique au sens propre et figuré – analogique et non numérique – des ordinaux transfinis aura ouvert de nouveaux horizons *transarithmétiques*, *e.g.* la deuxième classe de nombres de Cantor, sur lesquels Hilbert et Gödel ont voulu fonder la logique, le premier pour démontrer la consistance de l'arithmétique et l'hypothèse du continu, le second pour démontrer l'incomplétude de l'arithmétique et la consistance de l'hypothèse du continu. L'extension analogique de l'arithmétique signifie qu'il ne faut accorder qu'une existence formelle – si elle n'est pas contradictoire – à ces ordinaux transfinis. Ce n'est pas ce que pensait Gödel qui a confessé son platonisme ou réalisme ensembliste. Hilbert et ses successeurs n'ont pas partagé cette foi. Mais refuser l'existence des entités abstraites, ne veut pas dire non plus que l'on renferme l'invention mathématique (et logique) dans un univers clos où seuls auraient droit de cité les objets finis du constructivisme.

La logique arithmétique à ce titre n'espère pas jouer au gardien des portes de la ville, elle ne cherche qu'à délimiter les territoires respectifs du constructif et du non constructif, des contenus arithmétiques et non arithmétiques. L'attitude fondationnelle peut être ici tolérante sans être béatement œcuménique et l'instinct critique n'est pas nécessairement celui du chien du garde. L'invention mathématique ne saurait respecter des limites préétablies et l'arithmétisation des mathématiques et de la logique n'est pas finie, mais comme l'a montré Kronecker, une théorie générale, la théorie arithmétique des formes ou des polynômes, peut constituer une pièce-maîtresse de l'entreprise constructiviste. A la suite de Kronecker, il est certes possible de concevoir une théorie logique qui rende compte de l'arithmétique, c'est-à-dire qui en montre la consistance interne. L'arithmétique dont il est question est l'arithmétique minimale de Robinson avec la descente infinie, ce qui donne l'arithmétique de Fermat ou de Fermat-Kronecker pour l'arithmétique générale dont les extensions couvrent tout le champ de l'arithmétique polynomiale de N à R et au-delà, *i.e.* $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$... La logique modulaire part de Z plutôt que de N pour se donner les entiers au départ et non seulement les nombres naturels, même si N peut servir de base pour le modèle arithmétique, les entiers négatifs pouvant être écartés à l'aide des notion de congruence et de modulo. C'est dans le corps Q des nombres et des polynômes rationnels que les nombres naturels et les entiers sont plongés pour la preuve de consistance. Les corps *R* et *C* seront considérés comme adjonctions à l'univers rationnel ! L'internalisation de la consistance de l'arithmétique est un travail purement logique comme l'a bien vu Hilbert le premier, conscient qu'il était de la nécessité du finitisme et sa théorie des preuves ou métamathématique a été conçue expressément pour répondre à la question philosophique de la consistance, comme il la désignait lui-même. Qu'il ait fallu un siècle pour apporter une réponse satisfaisante à la question de la consistance de l'arithmétique est peut-être un signe des temps. L'informaticien en prenant le relais du mathématicien constructiviste exige des preuves finitaires pour ses constructions finies. La logique modulaire, en épousant au plus près le contenu arithmétique, risque de lui fournir les instruments qu'une théorie parfaitement consciente de ses ressources ne saurait qu'exploiter à bon escient.

CHAPITRE 5

Commentaire de « La consistance de l'arithmétique revue et corrigée »

Ce texte est tiré du chapitre 4 de mon ouvrage *La logique du contenu. Sur la logique interne* publié chez L'Harmattan (Paris, 2004). Le texte n'appelle pas de commentaires élaborés, puisqu'il s'agit d'un rappel de mes travaux antérieurs en anglais sur la question de la consistance de l'arithmétique et il peut servir d'introduction informelle à mes travaux ultérieurs sur la question consignés dans mes ouvrages *Logique arithmétique. L'arithmétisation de la logique* (Québec, PUL, 2010) et *Towards an Arithmetical Logic. The Arithmetical Foundations of Logic* (Bâle, Birkhaüser et Springer, 2015).

La consistance de l'arithmétique revue et corrigée

1. INTRODUCTION

Le problème de la consistance de l'arithmétique a été posé par Hilbert – c'est le second problème de sa célèbre liste de 1900 – mais sa solution par Gentzen, Ackermann ou Gödel fait appel à des moyens qui débordent le cadre finitiste dans lequel Hilbert avait d'abord formulé son problème. On sait que la formulation initiale de Hilbert – le programme métamathématique – voulait trop embrasser et que Gödel a montré en 1931 qu'il était irréalisable pour l'arithmétique de Peano, c'est-à-dire l'arithmétique ensembliste, dans les termes de Hilbert. Le résultat de Gödel n'exclut pas cependant, de l'aveu même de Gödel, d'autres formulations du problème de la consistance de l'arithmétique qui ne transcendent pas le programme finitiste. La formulation du problème chez Hilbert n'est pas sans ambiguïté. L'arithmétique en question est l'arithmétique des nombres réels avec un axiome de continuité qui stipule dans sa version archimédienne qu'entre deux nombres réels a et b il existe toujours un entier positif n tel que $a < nb$.

Dans l'esprit de Hilbert, une fois la consistance de cette arithmétique établie) – c'est l'arithmétique qui lui avait servi de modèle de référence pour la consistance de la géométrie euclidienne – la consistance de l'analyse (avec fonctions définies sur les réels) et la théorie des ensembles (sans inclure la hiérarchie des alephs) devait s'ensuivre. Mais Hilbert insiste sur la nature finitaire de la preuve de consistance et dans un manuscrit cité par M. Hallett[1], Hilbert soutient qu'il s'agit pour l'arithmétique de démontrer la consistance d'»un nombre fini d'axiomes finis» et qu'il n'est aucunement question de processus infini dans cette arithmétique. Et il ajoute qu'en cela il suit Kronecker. Or, pour être en mesure de suivre Hilbert ici, il faut remonter jusqu'à

Kronecker et refaire le trajet qui a mené de Kronecker à Hilbert, c'est-à-dire refonder le programme de Hilbert sur le programme de Kronecker. C'est ce que je veux m'employer à faire dans ce qui suit en suivant la piste de la preuve de la consistance de l'arithmétique.

C'est la piste que j'ai suivie dans un article « The Internal Consistency of Arithmetic with Infinite Descent » paru dans la revue *Modern Logic*. J'en donne ici une version simplifiée dans un texte informel pour retracer la genèse des concepts et dessiner les principales articulations de la preuve. L'arithmétique dont il s'agit n'est pas l'arithmétique ensembliste de Peano (AP), mais l'arithmétique de Fermat-Kronecker (AFK) baptisée ainsi parce que la descente infinie de Fermat y remplace le postulat d'induction de Peano et que les indéterminées de Kronecker y jouent le rôle de variables dans l'arithmétique générale des polynômes. Cette arithmétique comprend non seulement la théorie classique des nombres, mais aussi les structures abstraites de l'algèbre (corps ou domaines de rationalité) et les constructions fondamentales de la géométrie algébrique (ou arithmétique). Pour une telle arithmétique il y a une preuve de consistance interne, que j'esquisse ici à grands traits. Je veux auparavant refaire l'histoire du problème de la consistance depuis Gödel. Le second théorème d'incomplétude de Gödel ou théorème sur les preuves de consistance interdit la formulation de la preuve de consistance de l'arithmétique de Peano (AP) avec les moyens de cette même arithmétique. Gödel admet dès le point de départ que ce résultat ne contredit pas le programme de Hilbert puisqu'il peut exister des preuves constructives de la consistance qui échappent au cadre ensembliste de l'arithmétique de Peano. Gödel hésitera toujours, semble-t-il, à reconnaître que son résultat de 1931 portait un coup fatal au programme de Hilbert. Quoi qu'il en soit, Gödel s'appuie dans sa preuve sur ce qu'il appelle la consistance ω (oméga) et dans une note ajoutée en 1966 à la traduction de son texte de 1931, il parle de consistance externe <*outer consistency*>. La consistance oméga ou la consistance externe est simplement la consistance du modèle-ω (ω pour le premier ordinal infini) unique de l'arithmétique de Peano du premier ordre avec un ensemble infini de nombres naturels. Dans les mots de Gödel, la consistance-ω est définie par les propriétés des nombres naturels. On sait que B. Rosser à réduit la consistance-ω de la preuve d'incomplétude à la consistance simple au prix de l'introduction de l'énumérabilité récursive que Church avait formulée pour établir l'indécidabilité récursive de l'arithmétique de Peano et la logique des prédicats du 1er ordre (au-delà de la théorie des prédicats monadiques). En se fondant sur le résultat de Gödel et avec la diagonalisation sur tous les prédicats récursifs, Church a montré, en particulier, qu'il n'y a pas de prédicat récursif binaire qui énumère (ou binumère) tous les prédicats récursifs unaires ; en d'autres mots, on peut définir une fonction sur les entiers qui ne soit pas calculable et comme Kleene l'a répété, la notion générale de fonction récursive ne nous livre pas de procédé constructif pour définir une fonction récursive particulière. Le problème réside évidemment dans le fait que la procédure diagonale est appliquée à l'énumération totale des nombres naturels et il est facile d'exhiber en arithmétique ensembliste un ensemble récursivement énumérable qui n'est pas récursif, *i.e.* dont le complément n'est pas récursivement énumérable.

Ce qui nous importe ici, c'est de bien voir que la consistance externe de Gödel renvoie au modèle-ω de l'arithmétique de Peano dont on peut dire de surcroît qu'elle est ω-complète dans ce contexte. C'est ce modèle unique extérieur au système formel qui justifie le point de vue de la sémantique ensembliste que Gödel a adopté. Tarski l'a bien vu qui remarque dès 1933] que la consistance-ω (et la complétude-ω) requiert un système « infinitiste » en acte avec une règle d'induction infinie (appelée aujourd'hui règle-ω), alors que l'arithmétique classique n'est qu'un système potentiellement « infinitiste ».

Gentzen voudra reprendre en 1936 le problème de la consistance là où l'avait laissé Gödel tout en poursuivant le programme de Hilbert – comme le souhaitera Herbrand qui a fourni sa preuve (incomplète) de consistance en 1931. Mais c'est en recourant à l'induction transfinie à la manière de Ackermann que Gentzen élaborera sa preuve. L'induction transfinie signifie que l'on étend l'induction complète ou infinie au-delà des ordinaux finis jusqu'aux ordinaux transfinis de la deuxième classe de nombres de Cantor limitée par l'ordinal ε_0. Gödel, de son côté, utilisera l'induction sur tous les types finis dans sa preuve de *Dialectica* (1958) de la consistance de l'arithmétique de Peano ; c'est pour lui une extension du point de vue fini, c'est-à-dire le programme finitiste de Hilbert, qui doit permettre de formuler la preuve de consistance ; il faut noter cependant que l'interprétation fonctionnelle – fonctions récursives sur les types supérieurs au type zéro des nombres naturels – va au-delà du point de vue finitiste en admettant les types comme objets abstraits dans un esprit intuitionniste. De toute évidence, il s'agit dans ce cas d'une notion très large de preuve constructive, puisque malgré le vœu d'une preuve de consistance interne d'une arithmétique réductible à l'arithmétique (abstraite) de Heyting, la quantification infinie sur l'ensemble des nombres naturels réintroduit le point de vue oméga de l'arithmétique de Peano et on doit conclure que l'arithmétique ensembliste (AP) est condamnée à une consistance externe qui repousse la limite ω des ordinaux finis jusqu'à la limite ε_0 des ordinaux transfinis de la seconde classe de nombres de Cantor. J'ai montré dans des travaux antérieurs que cette extension n'est pas consistante d'un point de vue constructif radical, celui que j'aborde maintenant.

2. ARITHMÉTIQUE

2.1 Le programme de Hilbert

Le programme de Hilbert peut être modifié, comme l'a suggéré Kreisel. La modification majeure que j'ai introduite consiste à refonder le programme de Hilbert sur ce que j'ai appelé le programme de Kronecker. Quand Hilbert, dans sa conférence de 1926 « *Ueber das Unendliche* »", explique que du point de vue finitaire <*finiter Standpunkt*> il y a deux sortes de formules en mathématiques, les premières qui correspondent aux énoncés finitaires et les secondes aux structures idéales – qui ne signifient rien – il ne fait que transposer Kronecker et son langage d'une arithmétique pure ou arithmétique générale et de ses extensions indéterminées (qui recouvrent les éléments idéaux) dans le contexte de la métamathématique ou théorie des preuves qu'il veut ériger. Mais si les opérations extra-arithmétiques de la logique ne signifient rien, pas plus que les grandeurs algébriques hors d'un domaine de rationalité, et si seule l'arithmétique est interne alors que l'algèbre est formelle, le système formel des opérations logiques n'aura que le rôle d'une extension dénuée de sens de l'arithmétique, à condition que cette extension soit consistante, c'est-à-dire qu'une fois éliminées les structures idéales (ou les indéterminées), on conserve toujours la validité des lois logiques (du domaine primitif de l'arithmétique) ou l'arithmétique pure du domaine de rationalité. On voit le parallèle évident entre la démarche de Kronecker et celle de Hilbert. La parenté est si grande qu'on peut supposer que Hilbert s'inspire toujours, consciemment ou non, de l'idéal arithméticien de Kronecker.

Les objets concrets qui vont remplacer les entiers dans la métamathématique hilbertienne sont les signes et la combinatoire finie qu'ils génèrent est le pendant formel de l'arithmétique. Au commencement est le signe, c'est la devise philosophique de Hilbert dès 1902. Sur cette base finitaire, on peut formaliser les théories mathématiques existantes en construisant ensemble logique et arithmétique. Cette logique arithmétique, comme nous pouvons l'appeler, recèle une logique interne – une métamathématique – qui, par-delà les preuves formelles des mathématiques ordinaires, doit mener à une preuve de non-contradiction des mathématiques, puisque l'objet de la métamathématique est l'ensemble des preuves de la mathématique usuelle. Cette logique interne doit produire de nouveaux axiomes, alors que la logique formelle ne fait que dériver de nouveaux théorèmes des axiomes connus. La logique finitaire suffit à garantir la vérité intuitive de l'arithmétique élémentaire. On connaît la définition hilbertienne de système formel avec connecteurs et quantificateurs. Les quantificateurs universel et existentiel sont définis à l'aide d'une fonction de choix transfinie $\varepsilon(A)$ qui associe à tout prédicat un objet ou à toute fonction un nombre ; ainsi le quantificateur universel est défini par la fonction de choix qui ne peut trouver de contre-exemple au prédicat (ou à l'image de la fonction). Hilbert y ajoute l'axiome aristotélicien pour l'import existentiel du quantificateur universel et le principe du tiers exclu qui signifie que la négation du quantificateur universel implique l'existence d'un contre-exemple.

Bien que la fonction (logique) de choix ne soit pas constructive, Hilbert croyait que par son emploi réitéré un nombre fini de fois, la finitude de la procédure était assurée et qu'il était possible d'obtenir une preuve de consistance dans cette voie. Ackermann a pu ainsi obtenir une preuve de consistance de l'arithmétique en utilisant la méthode de la substitution ε élaborée par Hilbert et Bernays dans leur texte capital de (*Grundlagen der Mathematik*, 1934 et 1939).

On sait que l'espoir que fondait Hilbert de démontrer la consistance de l'arithmétique et au-delà, de l'analyse, ne s'est pas réalisé, sans doute parce qu'il s'éloignait trop du point de vue finitaire et qu'il voulait même justifier la théorie des ensembles transfinis de Cantor.

Le programme de Hilbert n'a pas échoué en vertu des résultats de Gödel sur l'incomplétude des systèmes formels contenant au moins l'arithmétique, il a échoué en tout cas parce qu'il a voulu aller plus loin que l'arithmétique au sens de Kronecker, arithmétique qu'on peut appeler finitaire ou prédicative et qui trouve des échos contemporains dans le travail de E. Nelson *Predicative Arithmetic* (1986).

L'arithmétique prédicative exige des bornes supérieures (ou logarithmiques) tout autant que dans la théorie des systèmes d'invariants complets qui est fondée sur la théorie du corps (ou du domaine de rationalité) des fonctions algébriques de Kronecker. L'arithmétique de Peano, de ce point de vue, n'est pas prédicative en vertu du postulat d'induction.

Le point de vue génétique de Kronecker lui a permis d'échapper à la tentation formaliste infinitaire de Hilbert qui a cru finalement à la réalité des indéterminées formelles, pourrait-on dire, parce qu'il n'a pas réussi à les réduire ou à les éliminer. Par ailleurs, le point de vue prédicatif (formaliste ou nominaliste) de Nelson est plus près de Kronecker que de Hilbert, quoi qu'en pense Nelson. En effet, l'arithmétique prédicative s'adjoint des entiers non standard (infinitésimaux) $\nu = \infty$ à la manière des indéterminées de Kronecker et il y a passage de l'interne à l'externe dans une théorie interne des ensembles, mais la théorie malheureusement n'est pas prédicative cette fois. Seule une logique prédicative de l'arithmétique prédicative semble répondre adéquatement au constructivisme de Kronecker.

Le formalisme de Hilbert ne serait donc que l'extension infinitaire (indéterministe, si l'on suit Kronecker) du point de vue fini <*finiter Standpunkt*> qui serait tributaire de l'intuitionnisme ou mieux du constructivisme arithmétique de Kronecker. La vérité intuitive ou interne de l'arithmétique lui confère le statut d'une véritable logique arithmétique qui est au fondement de tout l'édifice mathématique.

En dépit de ses nombreuses attaques contre l'attitude de Kronecker qu'il qualifie à plusieurs reprises de « dictateur de l'interdit » <*Verbotsdiktator*>, Hilbert a fini par reconnaître en 1930 dans son texte *Neubegründung der Mathematik* (Nouvelle fondation des mathématiques) que

> « Kronecker a formulé clairement une conception qu'il a explicitée dans de nombreux exemples : cette conception correspond pour l'essentiel à notre point de vue finitiste ».

Le finitisme de Hilbert est donc très proche par la filiation de Kronecker de l'intuitionnisme brouwerien et du semi-intuitionnisme d'un Poincaré, par exemple. Ce finitisme n'est pas touché par les résultats d'incomplétude infinitaires, c'est uniquement son extension formaliste infinitaire avec son idéal de consistance absolue qui est affectée. Il n'est pas étonnant à ce compte que ce soit l'induction infinie, le postulat d'induction dans l'arithmétique de Peano, qui constitue l'obstacle majeur. La preuve de Gentzen de la consistance de l'arithmétique fait appel à une induction transfinie jusqu'à ε_0. Le postulat d'induction de Peano n'est pas prédicatif, l'induction transfinie ne saurait l'être. La logique interne de l'arithmétique requiert une induction bornée, une suite « effinie », *i.e.* potentiellement infinie, de nombres naturels, rien de plus. Kronecker, Poincaré, Brouwer ont reconnu le caractère ouvert du procès de l'induction. Les propriétés métamathématiques de consistance, complétude, décidabilité, etc., perdent leur signification concrète, génétique dans une théorie des démonstrations <*Beweistheorie*> qui emprunte son arsenal infinitaire à la théorie des ensembles, se confondant par là avec une théorie des modèles qui est essentiellement une sémantique ensembliste des théories logiques et mathématiques.

L'idéal de la consistance est pourtant simple : accéder pour l'analyse (et la théorie des ensembles) à la même certitude <*Sicherheit*> que possède l'arithmétique finie qui est le fondement intuitif dernier ; c'est pourtant cette même certitude qui devrait guider la métamathématique et sa logique interne <*inhaltiches logisches Schliessen*>, selon l'expression de Hilbert. Que cet idéal se soit dévoyé dans un programme formaliste voué à l'échec n'a rien de surprenant, puisque Hilbert n'a pas su s'en tenir au cadre finitaire de l'arithmétique et de ses extensions indéterminées à la manière de Kronecker. Entretemps, c'est Hilbert (ou son programme) qui a engendré par coups et contrecoups, de Herbrand à Gödel et de Tarski à Robinson, la logique contemporaine. L'avenir proche de la logique, avec la théorie de la computation, les langages informatiques et la logique arithmétique (ou prédicative), verra peut-être un retour à l'inspirateur de Hilbert, Kronecker et à son idéal arithméticien.

La posture finitiste <*finite Einstellung*> n'a pas suffi à Hilbert, puisqu'il reproche toujours à Kronecker en 1930 d'avoir banni les méthodes de preuve infinitaires. Or, et c'est là une curieuse ironie de l'histoire, Gödel publiait en 1931 sa preuve d'incomplétude de l'arithmétique de Peano (AP) en utilisant une méthode de preuve que l'on peut dire infinitaire, le procédé de diagonalisation de Cantor sur l'ensemble infini des nombres naturels. Le second théorème d'incomplétude stipulait qu'une preuve de consistance pour AP ne pouvait être formulée avec les moyens de AP.

Pour certains, la diagonalisation de Cantor conserve un sens constructif, même si elle comporte la quantification universelle sur l'ensemble des entiers. Puisqu'elle puise dans l'ensemble complémentaire des entiers qui ne sont pas sur la diagonale – pour cette raison je préfère parler de la *codiagonale* de Cantor – la preuve de Gödel fait intervenir par la codiagonalisation l'ensemble des énoncés non diagonaux qui dès lors n'est pas récursivement énumérable ; en fait cet ensemble est non dénombrable puisqu'il recouvre l'ensemble des réels sur le parcours de la codiagonale qui devient par là fonction d'une variable réelle. C'est pour cette raison que la codiagonale sur tous les nombres de Gödel des énoncés de AP produit un *nombre de Cantor* dont on ne peut savoir s'il est dénombrable ou non[2]. Cette curieuse situation, comme le disait Gödel pour l'autoréférence à propos du paradoxe du menteur, se répète ici dans le contexte du paradoxe de Skolem pour la théorie logique des prédicats du premier ordre incapable en principe de référer à l'ensemble des sous-ensembles $P(\omega)$ d'un ensemble infini dénombrable ω. Paradoxe éminemment sémantique, puisqu'il relève de la logique ensembliste du théorème de Löwenheim-Skolem, corollaire du théorème de complétude pour la même logique des prédicats du premier ordre obtenu par Gödel en 1930. La diagonale de Cauchy ou produit de convolution[3] à l'encontre de la diagonale de Cantor, ne va pas au-delà de la suite des entiers : elle ne fait qu'entrelacer deux séries de puissances, $a_n x^n$ et $b_n x^n$, dans une troisième, $c_n x^n$. Il s'agit d'un procédé nettement constructif qui ne fait appel qu'à la sommation finie de coefficients entiers. Le produit de convolution est un instrument privilégié dans la preuve finitaire de la consistance de l'arithmétique dans la mesure où la théorie des polynômes (de degré fini) constitue le support, évidemment fini, des séries de puissances infinies[4].

La même théorie des polynômes est au coeur de l'œuvre de Kronecker qui à élaboré une arithmétique générale <*allgemeine Arithmetik*> qui trouve son point culminant dans ses *Fondements (ou traits fondamentaux) d'une théorie arithmétique des grandeurs algébriques,* <*Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen*> (1882). La théorie des formes, comme on l'appelait à l'époque et que Hilbert (et Emmy Noether) a achevée, est une théorie des polynômes homogènes[5]. L'objet privilégié est ici la notion d'indéterminée <*Unbestimmte*> que Kronecker emprunte à Gauss : ce sont les <*indeterminatae*> ou variables indépendantes des équations diophantiennes (équations indéterminées avec coefficients intégraux).

L'arithmétique générale de Kronecker est un calcul des indéterminées associées à une arithmétique des entiers et le programme de Kronecker consiste essentiellement à réduire toutes les grandeurs algébriques à une arithmétique des polynômes. On n'ignore pas qu'une fonction entière – qui prend toutes ses valeurs finies – qui n'est pas un polynôme est une fonction transcendante, *i.e.* n'est pas algébrique, mais l'idée de Kronecker est d'obtenir une théorie arithmétique où même les fonctions transcendantes, par adjonction des indéterminées, se ramènent à un calcul finitaire – de là sans doute le mot qu'on lui attribue : « Dieu a créé les entiers, tout le reste est l'œuvre de l'homme », même si dans quelques rares textes il affirme que les entiers sont aussi des constructions de l'esprit humain.

Voyons cela d'une façon un peu plus précise. Pour Kronecker, la théorie arithmétique des grandeurs algébriques se résume à la théorie des fonctions intégrales entières qui inclut la théorie des fonctions rationnelles entières, c'est-à-dire des formes ou polynômes d'un domaine de rationalité <*Rationalitätsbereich*>, un terme qu'il préférait à <*Körper*>, corps en français (<*field*> en anglais), parce qu'il trouvait ce dernier trop chargé matériellement.

Le but de Kronecker était de formuler une théorie arithmétique des grandeurs algébriques ou, en ses termes, d'établir les fondements de l'existence arithmétique des quantités algébriques. Le passage des grandeurs rationnelles aux grandeurs algébriques doit conserver les mêmes déterminations conceptuelles <*Begriffsbestimmungen*> et les opérations arithmétiques doivent garder leur sens dans les domaines d'extension. Un principe d'association ou d'adjonction permet d'annexer les indéterminées, à la condition qu'elles ne modifient pas la structure du domaine d'origine (extension conservatrice). Kronecker compare ses indéterminées aux nombres idéaux de Kummer et aux fonctions transcendantes de Weierstrass : pour lui, ces adjonctions n'ont pas d'existence propre, puisqu'elles ne sont qu'une extension du domaine de l'arithmétique <*Gebietserweiterung der Arithmetik*>. Soumises au calcul de l'arithmétique, les indéterminées n'ont qu'un rôle dérivé, inessentiel et elles peuvent être éliminées. Il y a donc économie en entités réelles puisqu'on n'a pas besoin des nombres transfinis, transcendants ou irrationnels qui ne sont dès lors que des êtres idéaux gouvernés par les lois de l'arithmétique. Cette perte en idéalités mathématiques est largement compensée, aux yeux de Kronecker, par le gain en pureté de l'arithmétique. Malgré ses voeux, Cantor ne pourra donner à son arithmétique transfinie le statut d'une arithmétique finie pure, puisqu'il devra accorder l'existence à des ordinaux-limites ou à des nombres critiques qui noient l'arithmétique dans une analyse infinie.

2.2 L'arithmétique fermatienne

Je caractérise l'arithmétique fermatienne par la méthode de la descente infinie qui est une méthode de preuve centrale en théorie des nombres de Fermat jusqu'à Kummer et au-delà jusqu'à Mordell, Weil et la géométrie algébrique contemporaine[6].

Fermat dit de la descente infinie (ou indéfinie) qu'elle est une *apagogê eis adunaton* ou une *reductio ad absurdum*. Il applique sa méthode au problème des triangles rectangulaires (dans les entiers rationnels) dont l'aire doit être un carré. S'il existait un tel triangle, nous dit Fermat, il devrait en exister un pour des entiers plus petits avec les mêmes propriétés ; et s'il y a un second, il doit y en avoir un troisième, un quatrième, etc. à l'infini. Mais cela est impossible, puisqu'il n'y a pas de suite descendante infinie dans les nombres naturels. Remarquons d'abord que la réduction est inoffensive ici, puisqu'elle est finitaire et la double négation qu'elle entraîne est parfaitement légitime ; elle ne transcende pas le domaine du fini. La chose est plus évidente encore quand Fermat dit qu'il a appliqué sa méthode non seulement à des questions négatives, mais aussi à des problèmes positifs comme « tout nombre premier qui est plus grand qu'un multiple de 4 d'une unité, doit être composé de deux carrés ». S'il y avait un tel nombre premier plus grand qu'un multiple de 4 d'une unité, mais qui ne serait pas composé de carrés, il y en aurait un plus petit de même nature et encore de plus petits, jusqu'à ce qu'on atteigne 5, qui est le plus petit nombre ayant cette propriété. On doit alors conclure par voie indirecte que le théorème est vrai. Ici, on peut trouver que nous avons l'équivalent du principe du plus petit nombre, mais Fermat l'emploie dans un contexte tout à fait différent, c'est-à-dire un contexte purement arithmétique. La différence essentielle réside dans la formulation plus restreinte ou plus constructive de Fermat et si la descente infinie est parfaitement acceptable en tant que *reductio ad absurdum*, l'induction complète et le principe du plus petit nombre obéissent au principe du tiers exclu via la double négation pour un ensemble infini (*e.g.* N) et sont donc inadmissibles d'un point de vue intuitionniste[7]. Une telle réprobation ne s'applique pas à la descente infinie et je tenterai d'en trouver la justification fondationnelle dans la suite. Peirce et Poincaré ont insisté sur le fait que la descente infinie (que Poincaré appelle *récurrence*) n'est pas équivalente à l'induction complète.

L'arithmétique de Fermat est caractérisée par la méthode de la descente infinie et je soutiens que du point de vue métamathématique, c'est-à-dire du point de vue de la théorie des démonstrations, la descente infinie remplit le rôle de l'induction sans avoir recours à la notion d'ensemble infini. Il est évident que Fermat n'avait pas le point de vue ω dans l'esprit. Fermat affirme qu'il a inventé la méthode de la descente infinie ou indéfinie, mais elle est déjà <*in nuce*> chez Euclide. Prenons, par exemple, la proposition 31 du livre VII des *Éléments* « tout nombre composé peut être divisé par un nombre premier ». La preuve utilise une décomposition ou une réduction qui ne peut continuer indéfiniment puisque toute suite descendante de nombres naturels est finie. L'algorithme d'Euclide, qui anticipe la méthode de la descente infinie, est une méthode constructive pour trouver, par descente, le plus grand diviseur commun (p.g.d.c.) de deux entiers. On peut appliquer le même procédé aux polynômes. Le théorème d'Euclide sur l'infinité des nombres premiers qui énonce que les « Les nombres premiers sont plus nombreux que toute quantité définie (de nombres premiers) » – c'est la proposition 20 du livre IX des *Éléments* – découle directement de l'algorithme de division. On a donc là une preuve constructive et l'infini dont il est question n'est que potentiel, en accord avec la doctrine d'Aristote dans sa *Physique*.

Le principe de la descente infinie peut être formulé de la façon suivante : si l'existence d'une propriété pour un n donné implique l'existence de cette même propriété pour un nombre arbitrairement plus petit, alors cette propriété est attribuable à des nombres de plus en plus petits *ad infinitum*, ce qui est impossible puisque toute suite descendante de nombres naturels est finie. Pour justifier le principe, on se contente de remarquer qu'il n'y a plus de descente infinie dans les nombres naturels. Mais il s'agit en réalité d'un algorithme euclidien généralisé et comme l'a bien noté André Weil, la descente infinie opère dans tout corps de nombres (idéaux ou polynômes) fini où le produit de deux entiers ordinaires (ou algébriques) est égal à une puissance (ou degré) et leur plus grand diviseur commun s'obtient pas descente finie ; c'est le cas, en particulier, pour le corps quadratique $Q\ \sqrt{N}$ des formes quadratiques binaires de discriminant N. Ce principe de descente n'a pas besoin d'un quantificateur universel classique, mais d'un quantificateur effini pour la descente finie ou indéfinie, « effini » signifiant potentiellement infini, c'est-à-dire les suites indéfinies ou les suites infiniment processives de Brouwer.

L'arithmétique de Fermat est l'arithmétique classique avec descente infinie (sans quantification sur un ensemble infini). L'arithmétique de Peano avec postulat d'induction est l'arithmétique ensembliste – on pourrait aussi bien l'appeler arithmétique de Dedekind-Peano puisque Dedekind a été le premier à formuler l'arithmétique élémentaire en termes ensemblistes. Mais les concepts fondamentaux de l'arithmétique, zéro, addition, multiplication, successeur peuvent être formalisés dans une arithmétique minimale, l'arithmétique de R. Robinson $Q = <0, S, +, \times>$. La théorie Q est une théorie ouverte, *i.e.* sans quantificateurs et sans postulat d'induction, mais sur le fond(s) ensembliste d'un ensemble infini de nombres naturels. Cette arithmétique ne peut pas servir d'assise à l'arithmétique de Fermat et à la logique arithmétique (ou polynomiale) que j'aborde maintenant.

3. LOGIQUE

3.1 Syntaxe

La consistance est un problème logique : il faut montrer comment on ne peut avoir un énoncé et sa négation dans une même théorie ou, en termes arithmétiques, que $1 \neq 0$, *i.e.* $\neg(1 = 0)$. C'est l'auto-consistance de l'arithmétique de Fermat qui doit être démontrée ; auto-consistance signifie que la preuve ne doit utiliser que des moyens internes à la théorie ou qu'elle est bornée par les termes mêmes de la théorie. Nous n'aurons donc que la quantification bornée ; le quantificateur existentiel et le quantificateur universel ne s'appliquant qu'à des suites ou ensembles finis sont automatiquement bornés ; en ce qui touche le quantificateur effini pour les suites effinies, il est borné naturellement par le degré (fini) du polynôme qui représente une suite effinie déterminée.

Une preuve de la consistance de l'arithmétique sans postulat d'induction est possible, qui fasse appel seulement à la descente infinie. Il n'y a pas de recours à l'induction transfinie et on ne fait pas le détour par un ensemble infini[8]. Nous appelons cette arithmétique l'arithmétique de Fermat (AF) pour la contraster avec l'arithmétique de Peano. L'idée principale est de traduire la logique dans l'arithmétique à l'aide d'une interprétation polynomiale avec les indéterminées

<*Unbestimmte*> de Kronecker ; il s'agit donc d'une arithmétisation de la logique, c'est-à-dire d'une paramétrisation de la logique par les polynômes avec leurs indéterminées. Le produit de convolution des polynômes sert à arithmétiser la logique, *i.e.* l'implication locale et la quantification locale « effinie » dans la traduction polynomiale qui parvient à réduire (éliminer) la logique par descente infinie de la même manière qu'on extrait le contenu des polynômes à l'aide de la descente infinie.

La logique est présentée dans un calcul des séquents minimal[9], sans règles structurelles, mais avec des notions nouvelles, deux nouveaux connecteurs, la négation locale et l'implication locale et un nouveau quantificateur appelé « quantificateur effini », symbolisé par 王[10].

Ce symbole est tiré du japonais et se prononce <*ho*>; c'est un kangi archaïque emprunté au chinois <*wáng*> qui signifie le roi ou la royauté. L'idéogramme chinois 王 signifie maître, souverain ou président – on se contentera de dire pour les besoins universels de la logique qu'il s'agit d'un symbole magistral ! Je l'ai conçu plutôt comme l'accolade du quantificateur existentiel $\exists$ et de la lettre E. Le concept fondamental de suite est scindé en suites finies qui sont des ensembles et en suites effinies qui n'en sont pas. Il n'y a pas de suites infinies. Une suite effinie n'a pas de dernier terme <*open-endedness*>, n'a pas de borne post-positionnelle, *e.g.* ω, mais a une borne pré-positionnelle, *e.g.* 0. Une suite effinie signifie une suite potentiellement infinie ou une suite infiniment processive sans limite pré-assignée par analogie avec le concept de suite (de choix) chez Brouwer. La suite des nombres naturels est une suite effinie. Si une suite effinie a une borne, elle devient un segment initial, *i.e.* un ensemble. Bien que minimale, la logique que nous envisagerons doit fournir un cadre naturel pour l'arithmétique, c'est-à-dire, les théorèmes constructifs de la théorie des nombres, *e.g.* le théorème d'Euclide sur l'infinité des nombres premiers. Dans un sens, cette logique est une sonde finitaire pour le concept d'infinité et la logique elle-même est une « logique locale ».

La syntaxe est ensuite pourvue d'un modèle arithmétique. Pour le constructiviste, la sémantique ou la notion de modèle n'est qu'une métaphore multiforme. Le prolongement de la syntaxe dans un univers arithmétique doit donc être univoque : à chaque formule est assigné un entier positif, son « évaluateur », *i.e.* un entier qui localise la formule dans l'univers arithmétique borné où la conjonction, la disjonction et l'implication sont représentées respectivement par la multiplication, l'addition et l'exponentiation. La négation est simplement un énoncé nié dans l'univers arithmétique. Somme et produit représentent les quantificateurs existentiel et universel ; un produit continué (indéfini) correspond au quantificateur effini. Une fonction d'assignation injecte les formules closes ou énoncés dans l'univers arithmétique[10].

3.2 La traduction polynomiale

Une seconde fonction, la fonction d'évaluation, va traduire les formules closes de l'univers arithmétique et leurs évaluateurs en termes de polynômes avec coefficients entiers et indéterminées[11]. Dans cette traduction, la négation $\neg a$ sera conçue comme complément local de l'univers arithmétique selon la formule $1-a$ et l'implication *locale* correspondra à l'implication intuitionniste[12].

La traduction polynomiale rend compte d'un univers arithmétique ou combinatoire 2^n en expansion, mais borné dans chaque cas – dans chaque mesure – par un entier fini n, le degré d'un polynôme. La descente infinie sur les puissances décroissantes d'un polynôme fini permet d'éliminer la logique dans la traduction polynomiale en transformant toutes les formules logiques en polynômes linéaires (irréductibles), puisque la descente infinie pour les polynômes réductibles s'arrête à 1 ou à 0. Le fait que la descente infinie s'applique à l'arithmétique générale des polynômes vient du théorème fondamental de la factorisation unique des polynômes (ou forme algébrique entière, comme dit Kronecker) en produit de polynômes irréductibles (premiers). H. Weyl dans son classique sur la théorie algébrique des nombres (*Algebraic Theory of Numbers*, 1940) a bien vu que la factorisation unique (l'axiome de factorisation limitée) est obtenue par la condition de la chaîne descendante (anneau noethérien) qui n'est autre que la descente infinie par la généralisation de l'algorithme de division d'Euclide, puisque l'anneau des polynômes de degré fini avec plusieurs indéterminées est un anneau noethérien. Ainsi la théorie algorithmique des diviseurs, qui fait partie aussi de l'arithmétique générale de Kronecker est-elle une généralisation de l'arithmétique finie (ou finitaire) de Fermat avec descente infinie. Les énoncés logiques sont devenus des expressions numériques générales, c'est-à-dire des polynômes et la descente infinie réduit ces expressions numériques en formules combinatoires. La réduction de la logique est donc complète dans une logique arithmétique ou polynomiale et la consistance se résume alors à la distinction intrinsèque entre 0 et 1, pour les polynômes à la distinction entre polynômes linéaires, de degré 1, et les polynômes constants, de degré 0, ou encore entre polynômes constants et le polynôme 0 qui n'a pas de degré (noté $-\infty$). Nous avons donc bien et la consistance de l'arithmétique est démontrée.

4. CONCLUSION

Comment faire de la logique et des mathématiques sans la notion positive d'infini, c'est-à-dire sans la notion d'infini actuel ? Une longue tradition mathématique, des Grecs à Fermat, de Gauss, Cauchy et Kronecker à Brouwer et Nelson a défini le constructivisme mathématique. Heyting, Kolmogorov, Kleene, Kreisel ont formalisé la logique intuitionniste qui est une variété du constructivisme mathématique. La logique interne, d'inspiration constructiviste, vise à réintégrer la logique dans l'arithmétique, pierre angulaire de l'édifice mathématique et à montrer comment les concepts d'indéfini et d'indéterminé peuvent se substituer à la notion d'infini (et de transfini dans le vocabulaire cantorien).

Indéfinie est l'autre nom pour la descente infinie de Fermat, qui, comme nous l'avons vu, doit s'arrêter. La descente infinie ou indéfinie est donc finie en réalité et elle tient lieu non seulement de l'induction complète sur les nombres entiers, mais aussi de l'induction transfinie sur les ordinaux[13]. Quant aux indéterminées, Kronecker s'inspirant de Gauss en a fait l'instrument privilégié de la théorie arithmétique des grandeurs algébriques. Une indéterminée peut même remplacer efficacement un nombre ou une grandeur transcendante dans un domaine de rationalité (ou corps au sens algébrique du terme)[14].

W. Hodges dans son traité de théorie des modèles (*Model Theory*, 1993) reconnaît le caractère fondateur de l'arithmétique générale de Kronecker lorsqu'il dit que la théorie arithmétique des domaines de rationalité génère le modèle canonique de la théorie des corps contemporaine ; il faudrait ajouter ici que c'est la théorie des formes (polynômes) qui constitue la matrice des modèles canoniques et que cette théorie est finitaire par génération successive de ses éléments. Dans la même veine, H. Weyl a mis l'accent sur la structure algorithmique de la théorie algébrique des nombres chez Kronecker. Enfin, la théorie kroneckerienne de l'élimination a inspiré la moderne théorie de l'élimination (du quantificateur existentiel) qui a permis à Tarski d'obtenir ses résultats de décidabilité pour la géométrie et l'algèbre du premier ordre : la théorie des corps réels, par exemple décidable. Les théories qui admettent l'élimination des quantificateurs, *i.e.* qui sont réductibles à des systèmes d'équations ou d'inéquations polynomiales sont du même coup décidables en vertu de la finitude de la procédure de réduction. Ces résultats en algèbre abstraite (les structures abstraites) ne sont pas soumis à l'incomplétude et dans le sillage de Kronecker, on pourrait dire qu'une grande partie des mathématiques, si ce n'est la majeure partie, échappe aux limitations gödeliennes. C'est là une leçon qu'on peut tirer de la tradition constructiviste avant Brouwer et l'intuitionnisme mathématique.

Au-delà de la descente infinie de Fermat et de la théorie des indéterminées de Kronecker, il fallait concevoir, dans la preuve de consistance interne de l'arithmétique, une stratégie pour contrer ce que j'ai appelé le procédé de codiagonalisation de Cantor qui est un ingrédient essentiel des résultats d'incomplétude de Gödel et des théorèmes d'indécidabilité (Post, Church, Rosser, Turing). La diagonale ou produit de Cauchy assurait un premier accès à la théorie des polynômes de degré fini (support des séries de puissances infinies) qui allait permettre de comprendre la théorie des formes de Kronecker comme une arithmétique polynomiale. L'expression des puissances d'un polynôme en ordre décroissant donnait prise directement à la descente infinie qui pouvait effectuer la réduction de la logique à l'arithmétique par la traduction polynomiale. Cette même traduction polynomiale a été motivée à l'origine par une logique constructive des suites effinies (les suites infiniment processives ou potentiellement infinies de Brouwer) qui requérait l'invention d'un nouveau quantificateur, le quantificateur effini $\text{Ŧ}x\,Ax$ qui parachevait une théorie des notions locales en logique, dont celle de négation locale apparue tôt.

L'ordre logique des idées laisse apparaître un sous-ordre chronologique qu'on peut marquer de la façon suivante : 1. négation locale, 2. quantificateur effini, 3. diagonale de Cauchy (ou produit de convolution), 4. descente infinie de Fermat, 5. arithmétique générale des polynômes, 6. traduction polynomiale de la logique, 7. consistance interne de l'arithmétique de Fermat-Kronecker par extension conservatrice (logique et algèbre), 8. réduction de la logique à l'arithmétique – c'est là la thèse fondationnelle (philosophique) et le retour à Hilbert qui avait formulé le problème de la consistance comme problème philosophique dont la solution devait être mathématique. Ce que j'ai voulu montrer, c'est que le problème de la consistance interne de l'arithmétique avait une solution arithmétique, mais il fallait pour y arriver, aller au-delà de Hilbert ou plutôt en-deça et refaire le chemin à rebours, de Hilbert à Kronecker et à Fermat ou redescendre du paradis incertain de Cantor sur la terre ferme du fini. L'auto-consistance de l'arithmétique exige en effet le circuit fini de la preuve qui doit pouvoir énoncer les conditions de sa production, c'est-à-dire que l'autosuffisance et la minimalité des moyens de preuve doivent être garantis par la structure interne de la théorie. Or l'arithmétique polynomiale en internalisant la logique s'approprie les moyens de son autodétermination en vertu de la clôture de la théorie par les termes polynomiaux de degré fini.

La théorie kroneckerienne de l'anneau « naturel » des entiers et du corps des entiers algébriques (extensions algébriques) fournit, en tant que théorie finitaire, un premier exemple d'auto-consistance. En m'inspirant du théorème de Kronecker sur l'équivalence des polynômes, j'ai généralisé le résultat à toute forme logique finie, c'est-à-dire à toute expression logique traduisible dans le langage de l'arithmétique polynomiale. La descente infinie de Fermat permet de rester dans les limites de l'arithmétique « naturelle », *i.e.* l'anneau naturel des entiers et le corps naturel de ses extensions algébriques. Qu'au-delà de Cantor et en deçà de Hilbert, Kronecker ait formulé la théorie finitaire des formes algébriques, et qu'il ait pu tracer exactement la démarcation entre extensions algébriques et extensions transcendantes tout en refusant à ces dernières un statut ontologique autonome, c'est là la marque première d'un constructivisme arithmétique qui influencera Hilbert, Poincaré et Brouwer.

Si le rêve de jeunesse <*Jugendtraum*> de Kronecker n'est pas encore devenu réalité, ce que j'ai appelé son programme a été réalisé pour une part importante par Kronecker lui-même – la théorie arithmétique des grandeurs algébriques. Ce que j'espère avoir accompli dans ce travail en ce qui touche particulièrement l'arithmétique, c'est d'en avoir montré l'auto-consistance finitaire : le programme de Kronecker, moins ambitieux que celui de Hilbert, mais plus précis, est réalisable. L'arithmétique de Peano apparaît alors comme le passage à la limite de l'arithmétique de Kronecker ou de l'arithmétique de Fermat. En tout cas, l'arithmétique transfinie de Cantor n'aura servi que de cas-limite pour la consistance de l'arithmétique (infinie) de Peano.

Que seules les suites « effinies » soient admissibles est une conséquence du fait que la descente infinie est en réalité finie et qu'elle n'autorise qu'une induction effinie au sens de l'extension indéfinie du fini – rappelons que Fermat disait descente infinie ou indéfinie. La quantification universelle sur les éléments d'une suite sans borne post-positionnelle ne saurait avoir d'autre signification. L'illusion de la quantification sur un ensemble infini (même dénombrable) est dissipé par une descente infinie qui résout le problème de l'induction en le ramenant à la réduction de l'infini dans le fini (ou de l'indéfini au défini) par la voie indirecte de la contradiction finitaire. L'arithmétique doit emprunter ce détour par le fini – et non pas par les éléments idéaux comme chez Hilbert – pour fermer la boucle de sa propre consistance[15]. Poincaré ne disait-il pas que l'infini est une abréviation du fini !

Le retour ultime à Fermat confirme le caractère naturel de la descente infinie. Ce que Kronecker appelait « nombre fini d'essais » dans une terminologie qui sera reprise par Skolem dans sa formulation de l'arithmétique récursive primitive en 1923 – s'inspirant directement de Kronecker – n'est autre que ce que Poincaré désigne par « nombre fini d'hypothèses » dans son texte de 1912 sur « Les propriétés arithmétiques des courbes algébriques » et qui est pour lui la définition de la descente infinie. À rebours donc de Cantor et Peano et de la logique formelle depuis Frege et Russell et à rebours du programme de Hilbert de la métamathématique, nous retrouvons dans sa pureté (*i.e.* auto-consistance) l'arithmétique telle qu'en elle-même l'ont conçue Fermat, Gauss, Kronecker et leurs héritiers.

Le double retournement que j'ai opéré en remontant de Hilbert à Kronecker et de Kronecker à Fermat est en réalité un pas en arrière <*ein Schritt zurück*> de Gödel et de l'arithmétique ensembliste de Peano. C'est donc en deçà de Cantor qu'il faut penser l'auto-consistance de l'arithmétique. Mais il fallait pour revenir aussi loin s'avancer jusqu'à Gödel et les preuves de consistance avec induction transfinie. Du point de vue constructiviste, la descente infinie ou indéfinie n'est pas équivalente à l'induction infinie sur tous les ordinaux et constitue en réalité un chemin fini sur la suite des nombres naturels. La logique interne à laquelle on arrive enfin n'est que le passage de la logique à l'intérieur de l'arithmétique pour en produire l'auto-consistance dans la certification <*Sicherung*> de la preuve.

NOTES

1 Cf. M. Hallett, « Hilbert and Logic », Québec Studies in the Philosophy of Science, Part I, M. Marion and R. S. Cohen, Kluwer, Dordrecht, 135-187.

2 Pour des détails sur la méthode de la diagonale, voir mon ouvrage Logique et fondements des mathématiques (Diderot, 2000), pp. 10-12.

3 L'expression formelle du produit de Cauchy donne

$$\sum_{0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{0}^{\infty} a_n x^n \quad \sum_{0}^{\infty} b_n x^n$$

$$\text{avec } c_n = a_0 b_n + a_1 \mathrm{b}_{n-1} + \ldots + a_n b_n.$$

4 Un polynôme de degré fini s'écrit

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

où les a_i sont des coefficients entiers et les x_i sont des indéterminées (ou variables générales).

5 « Homogènes » signifie seulement que les coefficients du polynôme ont le même degré

$$f(y,z) = a_0 + a_1 y^{n-1} z + a_2 y^{n-2} z^2 + \ldots + a_n z^n$$

pour les coefficients entiers a_i et les indéterminées y et z.

6 On peut même penser que la méthode de la descente infinie se retrouve dans la preuve récente d'Andrew Wiles (1995) du dernier théorème de Fermat sous la forme de l'anneau noethérien des nombres premiers ou chaîne ascendante d'entiers finis dont l'autre forme est un anneau artinien ou chaîne descendante d'entiers finis. Ce sont donc des conditions de finitude qui sont essentielles dans la preuve de Wiles.

7 Le principe du plus petit nombre est équivalent à l'induction complète par la double négation sur un ensemble infini. L'induction complète obtenue du postulat d'induction de Peano

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \;\; A(0) \wedge \forall x\,(Ax \rightarrow ASx) \;\; \rightarrow \forall x\, Ax$$

s'énonce

$$\forall x \;\; \forall y_{y<x} Ay \rightarrow Ax \;\; \rightarrow \forall x\, Ax.$$

Le principe du plus petit nombre stipule

$$\exists x Ax \rightarrow \exists x \;\; Ax \wedge \forall y_{y<x} \neg Ay$$

qu'on obtient du principe d'induction complète par la négation $\forall x \neg Ax$ et par la double négation $\neg\forall x \neg Ax \leftrightarrow \exists x Ax$; c'est ce qui permet d'identifier classiquement le principe du plus petit nombre avec la descente infinie sous sa forme

$$\forall x \;\; Ax \rightarrow \exists y_{y<x} Ay \;\; \rightarrow \forall x \neg Ax.$$

Il va sans dire que cette transformation classique transgresse les critères intuitionnistes ou constructivistes et deux fois plutôt qu'une.

8 Le postulat d'induction de Peano s'exprime au second ordre

$$\forall X \quad X(0) \wedge \forall y\,(Xy \rightarrow XSx) \quad \rightarrow \forall y\, Xy$$

qu'on traduit au premier ordre

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \quad A0 \wedge \forall x\,(Ax \rightarrow ASx) \quad \rightarrow \forall x\, Ax$$

avec les variables libres . Remarquons que le postulat de Peano au second ordre correspond à l'axiome de l'infini dans la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel

$$\exists x \quad \varnothing \in x \wedge \forall y\,(y \in x \rightarrow .\, y \qquad y \ \in x)$$

9 Le calcul des séquents (dû à Gentzen) est une formulation séquentielle des règles qui gouvernent l'emploi des constantes logiques, i.e. pour la conjonction $\wedge$

$$\frac{\Gamma \quad A \qquad \Gamma \quad B}{\Gamma \quad A \wedge B}$$

où la barre sépare l'antécédent du conséquent.

10 Par exemple, nous avons pour la conjonction

$$\varphi\,(A \wedge B)\,[n \times m] = 1, \text{ ssi } A \in D_n \text{ A et } B \in D_m$$

où D_n et D_m sont des domaines arithmétiques pour les évaluateurs n et m des formules atomiques A et B.

11 Ainsi pour la conjonction, nous aurons

$$\varphi \quad (A \vee B)\,[n \times m] = (a_0x)\,(b_0x)$$

pour φ la fonction d'évaluation, (a_0x) et (b_0x) deux monômes. De même pour la disjonction, nous aurons

$$\varphi \quad (A \vee B)\,[n + m] = (a_0x + b_0x).$$

12 Dont la traduction polynomiale est

$$\varphi \quad (A \rightarrow B)\,[m^n] = (\bar{a}_0x + b_0x)^n.$$

pour $\bar{a}_0x = 1 - a_0x$ où 1 est l'univers arithmétique. Nous avons donc pour l'implication l'expression du binôme.

13 L'induction transfinie, utilisée par Gentzen et Ackermann dans leurs preuves de la consistance de l'arithmétique de Peano, substitue des ordinaux σ aux nombres naturels dans le schéma suivant :

$$\forall \sigma \quad \forall t_{t<\sigma} \quad A\,(t, x) \rightarrow A\,(\sigma, x) \quad \rightarrow \forall \sigma A\,(\sigma, x)$$

avec la limite

$$\lim_{n \rightarrow \omega} \omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}{}^{n} = \varepsilon_0$$

pour la seconde classe des nombres de Cantor. Remarquons ici que Gentzen dit de ne pas utiliser l'induction transfinie dans la seconde version de sa preuve de consistance de l'arithmétique (1938), mais il la replace par une induction complète sur les nombres naturels qu'il associe aux ordinaux de la deuxième classe de Cantor, ce qui revient au même. Schütte a introduit une induction infinitaire, la règle ω, qui facilite l'accès à l'au-delà transfini et on peut même sans quantifier sur l'ensemble de la deuxième classe de nombres $< \varepsilon_0$ s'avancer *récursivement* jusqu'à ω_1^{CK} (*CK* pour les ordinaux constructifs de Church-Kleene), l'analogue récursif du premier ordinal ω non dénombrable ω_1.

14 Pour une indéterminée x (qui peut être un nombre transcendant) adjointe à un corps K, on dit que $K(x)$ est isomorphe au corps $K[x]$ des fonctions rationnelles d'une variable avec coefficients dans K.

15 La preuve de consistance de l'arithmétique Fermat-Kronecker n'a rien à voir évidemment avec la preuve du dernier théorème de Fermat obtenue récemment par A. Wiles. Mais la preuve de Wiles pour la formule (en nombres naturels)

$$\forall n_1 > 2\ \forall x\ \forall y\ \forall z\ (x^n + y^n \neq z^n)$$

est en quelque sorte une confirmation de la consistance interne de l'arithmétique de Fermat. Une version constructive de la preuve de Wiles serait assurément une confirmation de plus !

CHAPITRE 6

Commentaire de « La descente infinie, l'induction transfinie et le tiers exclu »

Ce texte est paru dans la revue *Dialogue*, vol. 48 (2009), p. 1-17. La thèse principale de l'article est que dès que la frontière transfinie est franchie pour les théories classiques, intuitionnistes et soi-disant constructives, comme la théorie des types constructive, le tiers exclu est réintroduit subrepticement ou ouvertement dans les extensions imprédicatives, que ce soit en logique, en mathématiques ensemblistes (la notion de *forcing*) ou catégoriques pour les catégories supérieures (catégories-∞). L'induction transfinie est de nature ensembliste et son utilisation en logique dans la preuve de Gentzen de la consistance de l'arithmétique de Peano en porte la marque. L'induction complète de l'arithmétique de Peano va jusqu'à ω l'ordinal limite de la théorie du premier ordre et l'induction transfinie va jusqu'à la limite des ω avec $\lim(\omega) = \varepsilon_0$. Dans sa preuve, Gentzen redescend l'échelle transfinie en éliminant les quantificateurs et en associant les ordinaux transfinis à des nombres naturels dans une sorte de copie de la descente infinie de Fermat, mais en empruntant la voie de l'ordinal polynomial ou la forme normale de Cantor pour les ordinaux que j'ai discutée dans un autre article de ce recueil.

Gentzen va jusqu'à dire que la descente infinie (en réalité finie) est une sorte d'induction déguisée ! On peut rétorquer ici que le déguisement est ensembliste et qu'il caricature l'induction descendante finie de Fermat à partir d'un nombre naturel *n*. Il est bien évident que dès que l'on introduit un ensemble infini de cardinalité $\aleph_0$ comme l'a fait Gödel dans sa première preuve d'incomplétude – Gödel dit expressément qu'il suppose un ensemble dénombrable de signes de variables pour le langage de son système *P* qui formalise la logique des *Principia*

Mathematica qui n'avait pas cette « extension infinitaire » ; la consistance-ω que définit Gödel dans son texte est un autre témoignage de l'adoption du cadre ensembliste.

La descente infinie, l'induction transfinie et le tiers exclu

1. INTRODUCTION

La plupart des mathématiciens et des logiciens qui n'ont pas de penchant constructiviste et les philosophes, lorsqu'ils connaissent un peu de logique ou de mathématiques, ont tendance à identifier l'induction complète et la descente infinie. Parmi eux, C. S. Peirce est une exception, puisqu'il considérait la méthode de la descente infinie de Fermat comme « le plus grand exploit que l'esprit humain ait jamais accompli ». Peirce a lui-même employé la descente infinie pour faire la distinction entre une collection dénombrable – « *numerable* » est le terme qu'il utilisait – et une collection non dénombrable (« *innumerable* »). Il a même écrit à Cantor pour lui faire savoir que l'inférence fermatienne, dans ses termes, n'était pas équivalente à ce qui était selon lui improprement désigné comme « *vollständige Induktion* » ou induction complète. Peu ont eu la perspicacité de Peirce en ce domaine.

Parmi les mathématiciens, ce sont surtout les praticiens de la théorie des nombres qui font la distinction, mais ils préfèrent donner des exemples plutôt qu'une justification fondationnelle ; c'est le cas de Yves Hellegouarch dans son ouvrage *Invitation aux mathématiques de Fermat-Wiles*. André Weil, le grand théoricien des nombres, est plus explicite. Weil a eu recours à la descente infinie dans ses travaux sur l'arithmétique des courbes algébriques où une courbe elliptique dans tout corps fini n'a qu'un nombre fini de points rationnels.

Ici Weil s'est appuyé sur le résultat de Mordell qui a utilisé la méthode de la descente infinie pour la conjecture de Poincaré sur les propriétés arithmétiques des courbes algébriques. Poincaré parlait d'un « nombre fini d'hypothèses » pour caractériser la descente infinie alors que Weil met l'accent sur la procédure de décomposition ou réduction dans les corps finis : la descente infinie opère dans tout corps fini de nombres (idéaux ou polynômes) où le produit de deux entiers ordinaires (ou algébriques) est égal à une puissance donnée (ou degré) et leur plus grand diviseur commun s'obtient par descente finie ; c'est le cas, en particulier, pour les corps quadratiques Q(√ N) des formes quadratiques binaires de discriminant N (voir Weil [14] pp. 335-336).

C'est cette version de la descente infinie – qu'on pourrait caractériser comme algorithme euclidien généralisé – qui m'apparaît la plus fidèle à l'esprit fermatien et c'est à elle que je me référerai dans la suite.

Les logiciens quant à eux ont voulu identifier la descente infinie avec l'induction transfinie sur les ordinaux jusqu'à ε_0, la limite de la deuxième classe de nombres de Cantor :

$$\lim_{n\to\infty} \omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}}{}^{n} = \varepsilon_0$$

Hilbert a aussi eu recours à une forme de la descente infinie dans sa procédure de réduction pour l'élimination de son symbole epsilon comme fonction de choix transfinie, mais Gentzen n'a vu dans la descente infinie qu'une forme déguisée de l'induction complète. Dans ses tentatives répétées pour justifier l'induction transfinie, qu'il tenait pour équivalente à l'induction complète, Gentzen a thématisé la notion d'accessibilité (« *Erreichbarkeit* ») pour les ordinaux (Gentzen [8]). Sa preuve de consistance pour l'arithmétique de Peano repose essentiellement sur l'emploi du principe ou du postulat de l'induction transfinie ou règle ω, comme on dit maintenant, et s'il relègue le principe au rang de théorème dans la seconde version de sa preuve de consistance, c'est que le déguisement de la descente infinie en induction complète se fait sous le couvert d'un calcul des séquents où le tiers exclu et l'élimination de la double négation apparaissent naturels dans le calcul LK. Malgré tous ses efforts pour conserver des principes constructifs, ou des inférences constructivistes, comme il dit, Gentzen n'a pas réussi à légitimer l'induction sur les ordinaux transfinis.

On ne peut mettre en doute le caractère de méthode constructive de la descente infinie. Fermat disait que la descente est infinie ou indéfinie. En réalité, la descente doit être finie, puisque d'un nombre naturel (ou ordinal) arbitraire *n*, il ne peut y avoir régression à l'infini et la descente s'arrête nécessairement à 1 ou 0, si l'on prend 0 comme premier ordinal. Gentzen insistait sur l'interprétation potentialiste de la notion d'accessibilité et il voulait imaginer une traversée (« *ein Durchfahren* ») des ordinaux transfinis jusqu'à ε_0 qui est toujours dénombrabled'après la doctrine ensembliste. Mais Aristote, philosophe de l'infini potentiel entre autres choses, contredit Gentzen sur ce point dans sa *Physique* en disant que l'infini ne peut être traversé « αδιεξιτητος ») : il n'y a pas de chemin hors du fini – il faut le construire ! Gentzen a tenté de « potentialiser »l'infini actuel à l'aide d'un calcul finitaire dans la continuité du programme de Hilbert. Ce faisant, il oublie que l'arithmétique ensembliste de Peano n'est pas la théorie des nombres où il n'y a pas de ω comme limite de la suite illimitée (effinie) des nombres naturels ou encore de limite de la suite illimitée des nombres premiers. L'arithmétique ensembliste de Cantor, Dedekind et Peano abrite trop d'ordinaux et il y a plusieurs échelons manquants dans l'échelle qui permet de descendre de ε_0 à 0. L'univers actualiste de cardinalité $2^{\aleph_0}$ pour l'arithmétique de Peano du second ordre est certainement mieux rempli que le modèle standard du premier ordre de l'arithmétique de Peano, mais il y a encore plus d'entités dans ce ciel platonicien que dans le monde constructible où le tiers exclu est exclu, la décidabilité est limitée et le choix est fini.

Dans l'exercice qui suit, je veux montrer que l'induction complète (IC), l'induction transfinie (IT), la descente infinie (DI) et le principe du plus petit nombre (PPN) sont des principes équivalents du point de vue de la logique classique si l'on veut payer le plein prix du tiers exclu via la double négation pour un ensemble infini dénombrable. Je montrerai aussi que la logique intuitionniste, si elle rejette l'équivalence de l'induction transfinie avec le principe du plus petit nombre, nonobstant le rejet intuitionniste du tiers exclu, ne parvient pas à justifier l'équivalence qu'elle maintient toujours entre induction transfinie et descente infinie.

2. L'INTUITIONNISME ET LE TIERS EXCLU

La logique intuitionniste (BHK pour Brouwer, Heyting et Kolmogorov) rejette en principe le tiers exclu. Dès 1923, Brouwer publie son célèbre article sur « La signification du principe du tiers exclu en mathématiques, spécialement dans la théorie des fonctions ». Ce que Brouwer appelle le principe de réciprocité de l'espèce (ensemble) complémentaire

$$\forall x(\neg\neg Ax \rightarrow Ax)$$

ou principe de décidabilité globale pour un prédicat P

$$\forall x(Px \vee \neg Px)$$

diffère essentiellement du principe de testabilité ou décidabilité « locale »

$$\neg A \vee \neg\neg A$$

pour un élément construit $x_0 = x$ ou suite de ces éléments. Ce principe ne peut s'appliquer indifféremment aux ensembles (espèces) finis et infinis – les espèces au sens intuitionniste sont des collections de propriétés. Seule la double absurdité peut redonner un sens à la négation

$$\perp \perp a \leftrightarrow a$$

dans le fini, ce qui ne veut pas dire que ce qui est doublement absurde a du sens ! Puisqu'une espèce (collection de propriétés) est ou bien finie ou bien infinie, c'est dans les espèces infinies – pour Brouwer, par exemple, l'espèce infinie des points du continu – que le tiers exclu ne peut s'appliquer. C'est ainsi qu'il critique le théorème de Bolzano-Weierstrass qui affirme que toute espèce infinie bornée de points possède un point limite. Les contre-exemples que Brouwer produit alors n'ont pour effet que de montrer l'inapplicabilité du principe du tiers exclu en analyse (théorie des fonctions) intuitionniste. On peut trouver aujourd'hui dans l'analyse infinitésimale lisse un semblable rejet du tiers exclu, la logique interne de l'analyse infinitésimale lisse étant intuitionniste du point de vue de la théorie des topoi. Il est intéressant de noter que l'analyse infinitésimale lisse est un autre nom pour la géométrie différentielle synthétique dont on trouve les linéaments chez Fermat. Les petits infinis (les infinitésimaux) seraient plus réfractaires au tiers exclu que les grands infinis (les alephs), à moins que l'on plonge les premiers dans une analyse non standard et les seconds dans une théorie des ensembles où l'hypothèse du continu vient se noyer.

Kolmogorov en 1925 dans son texte « Sur le principe *tertium non datur* » (Kolmogorov [9]) abonde dans le même sens dans sa théorie des jugements finitaires. Ce qui est obtenu par la double négation $\neg\neg a$ est une pseudo-vérité (*pseudoistinosti*) dans la logique des jugements de la pseudo-mathématique et le principe du tiers exclu comme la dualité booléenne $\neg\neg Ax \rightarrow Ax$ n'a de validité que dans le fini.

Si Kolmogorov avant Gödel a proposé une traduction (la traduction négative) des mathématiques classiques ou pseudo-mathématiques dans la mathématique intuitionniste de la double négation $A \rightarrow \neg\, A$, cette traduction est à sens unique, à l'aller seulement, puisqu'elle n'est plus fidèle au retour. Kolmogorov montre bien que les pseudo-mathématiques font un usage illégitime du principe du tiers exclu. Il montre en plus que l'induction transfinie repose en réalité sur une application illégitime du principe du tiers exclu ou de la double négation à des collections infinies. Si Kolmogorov a anticipé la logique de Heyting et la traduction négative de Gödel, c'est en supposant que l'on peut traduire la logique classique en logique intuitionniste ou ce qu'il appelle les pseudo-mathématiques en mathématiques de la vérité, mais pas inversement. Autrement dit, la traduction négative n'est pas un billet aller-retour.

Par ailleurs si S. Artemov [1] a tenté un retour dans une sémantique constructive pour BHK en reprenant la logique des problèmes de Kolmogorov avec le vocable de logique des preuves – (*logic of proofs*) sous forme de polynômes –, ce n'est pas une logique polynomiale qu'il propose, mais une interprétation standard de la logique propositionnelle intuitionniste dont le mérite est restreint puisqu'elle se limite à donner une version classique du calcul de la prouvabilité de Gödel dans le système S4 de la logique modale. Même si ce dernier calcul est bidirectionnel d'après les résultats de Gödel, McKinsey et Tarski, c'est-à-dire dans les deux sens et pour la déduction, il n'est pas fidèle à la source intuitionniste ; la logique des preuves d'Artemov produit une sémantique constructive ou plutôt une sémantique des constructions pour le calcul S4 avec opérateur de réflexion où la prouvabilité devient un foncteur de projection oublieux (*forgetful functor*) de son origine, ce qui signifie que le retour à la logique de départ intuitionniste n'est pas assuré. À preuve, la logique des preuves ne fait que rendre explicite le passage d'un problème (syntaxe) à sa solution (sémantique de la preuve) dans un cadre classique : l'intérêt de l'entreprise est plutôt épistémique que fondationnel.

Un autre mathématicien, E. Bishop (Bishop [2]), l'a compris qui a baptisé de principe d'omniscience le tiers exclu sous sa forme

$$\neg\forall x A x \rightarrow \exists x\, \neg A x.$$

D'autres mathématiciens, les semi-intuitionnistes français, l'ont aussi compris. Lebesgue, Borel et Poincaré – et avec eux les prédicativistes de Hermann Weyl à Edward Nelson (voir Nelson [10]) – abhorrent les ensembles infinis (non dénombrables). Pourtant, Brouwer a critiqué cette École de Paris en montrant que l'intégrale de Lebesgue repose sur la notion de mesurabilité où l'on a un nombre réel r avec $r = 0$, $r > 0$ ou $r < 0$, ce qui n'est pas possible si l'on n'emploie pas le principe du tiers exclu, c'est-à-dire si l'on ne suppose pas que le continu linéaire forme un ensemble ordonné de points.

Enfin, le finitisme de Hilbert et Skolem jusqu'à Wittgenstein devrait en principe n'admettre le tiers exclu que dans les situations logiques et mathématiques où l'infini (actuel) est effectivement exclu. Si Brouwer n'a pas toujours été clair sur le rejet de l'infini dénombrable (ω pour les nombres naturels et ω^2 pour les paires de nombres naturels) tout en trouvant absurde d'admettre des cardinalités non dénombrables $>\aleph_0$, la postérité logicienne de Brouwer, de Heyting à Troelstra et Kreisel, n'a pas toujours été claire elle non plus sur les principes.

Alors que Brouwer insistait sur les suites infiniment processives (ou effinies) ou les suites de choix, les successeurs de Brouwer semblent admettre sans réserve l'ensemble $\aleph_0$ des nombres naturels, l'induction complète avec le postulat d'induction de Peano et l'induction transfinie en plus de sa prétendue équivalence avec la descente infinie. Voyons ce qu'il en est.

3. PRINCIPES D'INDUCTION

Voyons d'abord les formulations classiques de divers principes d'induction.

1. Postulat d'induction de Peano au premier ordre

   (PIP) $\forall xAx \quad A0 \rightarrow (\forall xAx \rightarrow ASx) \quad \rightarrow \forall xAx$

   – on remplace A par X (pour sous-ensembles) pour obtenir le postulat de Peano au second ordre.

2. Axiome de l'infini dans Z-F (correspond à PIP au deuxième ordre)

   (AI) $\exists x \quad 0 \in x \wedge \forall y\, (y \in x \rightarrow y \quad \{y\} \in x)$

   – c'est la formulation originale de Peano dans *Opere scelte* (voir Peano [11])

3. Induction complète

   (IC) $\forall x \quad \forall y\, (y < x)\, Ay \rightarrow Ax \quad \rightarrow \forall xAx$

(AI) $\exists x \quad 0 \in x \wedge \forall y\,(y \in x \rightarrow y \quad \{y\} \in x)$

4. Induction transfinie

   (IT) $\forall\sigma \quad (\forall\tau)(\tau < \sigma)A(\tau, \sigma) \rightarrow A(\sigma, x) \quad \rightarrow \forall\sigma A(\sigma, x)$

   pour σ et τ des ordinaux.

5. Principe du plus petit nombre

   (PPN) $\exists yAy \rightarrow \exists y \quad Ay \wedge \forall z\,(z < y)\,\neg Az$

6. Descente infinie (ensembliste)

   (DIE) $\forall x \quad Ax \rightarrow \exists y\,(y < x)\,Ay \quad \rightarrow \forall x \neg Ax$

Par transformations successives (équivalences ou tautologies classiques), j'ai

$$\forall x \neg Ax \vee \exists yAy$$

et

$$\neg\forall x \neg Ax \wedge \neg\exists yAy \quad \vee \forall x \neg Ax$$

et par

$$(\neg\forall x \neg Ax) \leftrightarrow \exists xAx$$

j'obtiens

$$\forall x \neg Ax \vee \exists xAx,$$

c'est-à-dire le tiers exclu (ou principe d'omniscience de Bishop).

Pour cette raison, 3, 4, 5 et 6 sont équivalents au point de vue classique par contraposition (ou encore par voie indirecte), 5 et 6 ne le sont pas du point de vue intuitionniste, puisqu'il faudrait

$$\forall xAx \leftrightarrow \neg\exists x \neg Ax,$$

mais le passage de

$$\neg\exists x \neg Ax \rightarrow \forall xAx$$

est interdit en intuitionnisme, bien que 3 et 6 soient considérés comme équivalents, puisque l'on accepte le postulat d'induction de Peano. Si la règle de Markov permet le passage

$$\text{(RM)}\ \neg\neg\exists xA(x, y) \rightarrow \exists xA(x,y),$$

c'est bien parce que Kolmogorov n'avait accepté le tiers exclu que pour les jugements finitaires, alors qu'il avait reconnu dans sa théorie de la *pseudoistinosti* ou pseudo-vérité que l'induction transfinie comportait le tiers exclu (Kolmogorov [9], pp. 666-667). Remarquons ici que *psevdoistinosti* signifie littéralement vérité fausse, une belle *contradictio in terminis*. Les pseudo-mathématiques auraient-elles une logique interne dialectique ?

En toute logique intuitionniste, on devrait donc rejeter l'identification du principe d'induction transfinie avec le principe de la descente infinie parce que cette équivalence correspond à une double négation sur l'ensemble infini dénombrable ω des nombres naturels (ou des ordinaux $\omega < \varepsilon_0$).

La raison de cette inconséquence dans les principes intuitionnistes tient bien sûr à la notion d'ensemble infini et à sa carence en constructivité. Les nombres naturels sont bien ordonnés dans leur suite illimitée, mais lorsque l'on veut en tirer un principe général, on s'engage dans une sémantique ensembliste.

Le principe du bon ordre dit

$$\forall S \subseteq \mathrm{N} \quad S \neq 0 \wedge Ax(x \in S) \;\; \rightarrow \;\; \exists y < x \wedge y \in S \;\; ,$$

c'est-à-dire qu'il existe une suite strictement décroissante pour tous les éléments des sous-ensembles de l'ensemble N des nombres naturels, ce qui revient à la descente infinie ensembliste ou au principe du plus petit nombre tout aussi ensembliste et imprédicatif. La version prédicative du principe du plus petit nombre exige un quantificateur borné, comme le montre Nelson dans son ouvrage *Predicative Arithmetic* (Nelson [10]) et la version sans quantificateur de l'induction transfinie (IT) dans la preuve de Gentzen n'évite pas plus le tiers exclu puisqu'elle recourt à un bon ordre sur ω équivalent à la règle ω ou à l'induction complète sur N ou encore à la descente infinie au sens ensembliste.

Même une théorie bien intentionnée comme la théorie constructive (ou intuitionniste) des types de Martin-Löf, tout en voulant être prédicative, recouvre le tiers exclu par des moyens détournés via l'induction transfinie. L'ascension à petits pas de l'induction transfinie sans quantificateur veut qu'une traversée virtuelle – Gentzen disait potentielle – des omégas se rende jusqu'à ε_0 ; mais une fois arrivé au sommet du premier oméga ω on ne peut redescendre sans faire de faux pas…

Voyons de façon plus précise ce que peut être une induction transfinie sans quantificateur où l'on doit recourir à une règle d'induction infinie ou règle ω qui remonte à Hilbert, mais qui a été systématiquement employée par le logicien allemand K. Schütte.

La règle ω stipule que si on a démontré une formule $A(x)$ pour tous les nombres naturels, on peut conclure $\forall x A(x)$, alors que l'induction transfinie non quantifiée suppose que l'on a obtenu $A(x)$ pour A sans quantificateur en parcourant un à un les ordinaux dans un ordre récursif primitif jusqu'à ε_0. La procédure suppose bien évidemment que l'on a parcouru tous les ordinaux finis jusqu'à ω avec une règle d'inférence pour chaque instance numérique *n.* Pour transformer l'induction transfinie descente infinie ici, il suffit de supposer $\neg A$ qui donne $\forall \mathrm{x} \neg Ax$ dans un bon ordre récursif, c'est-à-dire dans une suite strictement décroissante d'ordinaux pour arriver à une contradiction et la preuve est obtenue par *reductio ad absurdum* dans la descente infinie ensembliste

$$\text{(DIE)} \quad \forall x \quad Ax \rightarrow \exists y\,(y < x)\,Ay \quad \rightarrow \forall x \neg Ax.$$

Par la double négation pour $A = (0 \neq 1)$ et $\neg A = \neg\,(0 \neq 1)$ on obtient une preuve indirecte de la consistance de l'arithmétique de Peano. On voit à l'évidence que cette descente n'a rien d'une descente finie, le bon ordre ou l'échelle ordinale de type d'ordre ω servant en quelque sorte de marchepied à l'échelle ordinale de type d'ordre ε_0.

Dans sa version constructive, la méthode de la descente infinie a recours à la suite illimitée de terme général x_n, comme on dit en langue bourbakiste, pour exprimer la quantification effinie ou illimitée

$$\mathrm{I}\!\!\exists x_n\, Ax_n$$

pour un prédicat A et un « terme général » arbitraire.

On a alors deux versions, positive et négative, de la descente infinie :

7a. Descente infinie (positive)

$$\mathrm{I}\!\!\exists x \quad [Ax \wedge \exists x\,(y < x)\,Ax] \rightarrow \exists y Az\,(z < y)\,Az \quad \rightarrow$$
$$\exists z\,(z = 0 \vee 1 \vee n)\,Az \quad \rightarrow \mathrm{I}\!\!\exists x Ax$$

7b. Descente infinie (négative)

$$\mp x \;\; Ax \wedge \exists y\,(y < x)\,Ay] \rightarrow \exists y\,\forall z\,(z < y)\,Az \;\; \rightarrow \mp x \neg Ax.$$

Il ne s'agit pas ici de quantification bornée $\forall x_{x<y}$ ou $\exists x_{x<y}$, mais de quantification illimitée sur une suite (ou sous-suite) arbitraire de nombres naturels.

La théorie des nombres classique de Fermat à Kronecker (arithmétique FK pour Fermat-Kronecker) en passant par Euler, Gauss, Lagrange, Legendre, Dirichlet, Kummer jusqu'à Mordell et Weil en géométrie arithmétique contemporaine, l'algèbre computationnelle (e.g. la théorie des bases de Gröbner) ou la théorie algorithmique (en informatique théorique) ou plus généralement encore, la théorie de la divisibilité (l'arithmétique modulaire) dans les corps finis, ne procèdent pas autrement. Dans cette perspective, la descente infinie est bien plutôt un algorithme euclidien généralisé qu'une méthode de preuve indirecte ou une réduction à l'absurde. Dans tous les cas, pour des prédicats numériques A, on a la descente

$$\begin{array}{l} Ax_n \\ Ax_{n-1} \\ \mathrm{A}x_{n\text{-}(n-1)} \\ Ax_0 = A\mathrm{x}_{n\text{-}n}. \end{array}$$

C'est ainsi que la descente infinie ou indéfinie dans les termes de Fermat est en réalité une descente finie et ce n'est qu'après la descente que nous savons que $(0 = 1)$. C.Q.F.D.

La voie directe nous donne

$$(0 \neq 1)$$

et la voie indirecte (*reductio ad absurdum*)

$$\neg\neg(0 = 1) \rightarrow (0 = 1)$$

ce qui est légitime ici, puisque nous sommes « descendus » dans le fini.

La morale de cette histoire, c'est que nous n'avons pas besoin de la notion d'ensemble infini de nombres naturels pour effectuer la descente « naturelle » (ou polynomiale) dans l'arithmétique de FK, pas plus que dans sa preuve sur l'infinitude des nombres premiers Euclide n'avait eu besoin de la notion d'infini (actuel).

La plupart des logiciens, qui veulent pourtant faire la théorie de la pratique mathématique, n'ont pas su apprendre cette leçon ou la retenir s'ils l'ont jamais apprise. Voyons maintenant si la logique intuitionniste peut justifier l'équivalence entre induction complète, induction transfinie et descente infinie.

4. LA LOGIQUE INTUITIONNISTE ET L'INDUCTION TRANSFINIE

En logique (et mathématiques) classique, le principe du plus petit nombre (PPN) est équivalent à l'induction transfinie sur l'ensemble des ordinaux finis

$$\text{(PPN)} \quad \exists xBx \rightarrow \exists x\,(Bx \wedge \forall y < x\, \neg By)$$

Il suffit de substituer $\neg Bx$ à Bx pour obtenir par contraposition

$$\text{(IT)} \quad \forall y\, [\forall x < yAx \rightarrow Ay] \rightarrow \forall xAx.$$

Du point de vue intuitionniste, PPN implique le tiers exclu pour l'arithmétique de Heyting (selon Troelstra et van Dalen [13]). Le logicien intuitionniste peut aussi avoir recours au principe de Markov qui stipule

$$\neg\neg\exists xA\,(x, y) \rightarrow \exists xA\,(x, y)$$

et peut donc affirmer avec la double négation sur le quantificateur existententiel

$$\neg\neg \quad \exists xAx \rightarrow \exists x(Ax \wedge \forall y < x\, \neg Ay)\ .$$

Du point de vue de la théorie des démonstrations (dans ce cas le calcul des séquents de Gentzen), on dira que le quantificateur universel est isolé des instances positives du quantificateur existentiel de la disjonction (condition de Mints-Orevkov). On sait que la logique intuitionniste exige que dans une disjonction ($A \vee B$), l'un des membres de la disjonction soit une instance numérique – que l'on puisse isoler – et la même exigence vaut pour le quantificateur existentiel $\exists xAx$ qui doit pouvoir exhiber une instance numérique An.

On peut alors montrer que

$$\exists xAx \rightarrow \neg\neg\exists x\,(Ax \wedge Ay < x\, \neg Ay)$$

est équivalent à

$$\forall x \quad Ax \rightarrow \neg\neg\exists z\,(Az \wedge \forall y < z\, \neg Ay \;\;),$$

mais il faut appliquer ici le principe de l'induction transfinie dont on suppose qu'il est équivalent à l'induction complète dans l'arithmétique de Heyting. Cette même induction complète est admise par les intuitionnistes pour toutes les propriétés constructives des nombres naturels. C'est ici que le bât blesse puisqu'on peut montrer que l'équivalence entre IC et IT (et DIE) repose sur la double négation pour un ensemble infini et entraîne le tiers exclu, comme l'avait soutenu Kolmogorov. Il suffit de faire l'exercice précédent avec le principe du plus petit nombre

$$\text{(PPN)} \quad \exists y Ay \rightarrow \exists y \quad Ay \wedge \forall z (z < y) \neg Az$$

Je substitue $\neg Ay$ à Ay

$$\neg\exists y \quad Ay \wedge \forall z\ (z < y \rightarrow \neg Az)$$

et j'obtiens par transformations sur les équivalences classiques et MP (modus ponens)

$$\forall y \quad \neg Ay \wedge \forall z (z < y \rightarrow \neg Az)$$

et

$$\forall y \quad \forall z (z < y \rightarrow \neg Az) \quad \rightarrow Ay$$

et

$$\forall y \neg Ay,$$

qui est le conséquent de la descente avec

$$\text{(DIE)} \quad \forall x \quad Ax \rightarrow \exists y (y < x)\, Ay \quad \rightarrow \forall x \neg Ax$$

obtenue classiquement de la règle d'induction

$$(A0 \wedge \forall y Ay \rightarrow ASy)$$

et du postulat d'induction de Peano

$$\text{(PIP)} \quad \forall x Ax \quad A0 \rightarrow (\forall x Ax \rightarrow ASx) \quad \rightarrow \forall x Ax$$

par MP.

On peut donc démontrer classiquement l'équivalence de PPN avec DI, mais PPN n'est pas déductible de IT en logique intuitionniste (à cause du principe du tiers exclu en logique intuitionniste, alors que IT est équivalent à IC et à DI du point de vue intuitionniste aussi bien que classique. Il y a donc bien dilemme ou plutôt trilemme : ou bien IC, IT et DI ne sont pas équivalents en logique intuitionniste, alors PPN ne peut être obtenu ni de IT (ou IC), ni de DIE et le principe

$$\neg\neg\ \exists x Ax \rightarrow \exists x (Ax \wedge \forall y < x\, Ay)$$

que nous pourrions appeler DIM, la « descente infinie de Markov », n'a qu'une valeur ou une portée limitée puisqu'il correspond à la recherche illimitée d'un contre-exemple.

Le principe fort de la descente infinie positive au sens de Fermat exclut nettement le tiers exclu par l'expression 7a de la descente selon que la descente finie s'arrête à 0 ou 1 ou n (pour $n = Ax_n \vee \ldots Ax_1 \vee Ax_0$). C'est uniquement dans ce contexte « positif » qu'un polynôme quadratique ou une équation diophantienne peut avoir un nombre infini (effini) de solutions. Pour les problèmes négatifs, comme dit Fermat, la double négation aboutit dans le fini à 0 ou 1 avec $1 \neq 0$. C'est là le sens même de la *reduction ad absurdum*, qui signifie en dernière instance la réduction d'une hypothèse fausse par une procédure de preuve qui aboutit à une conclusion contradictoire en un nombre fini d'étapes, ce qui est la méthode constructive à proprement parler.

Dans son programme de réforme de l'analyse mathématique classique, Brouwer a introduit des principes intuitionnistes pour l'ordination ou le bon ordre sur les suites de choix, c'est-à-dire sur les suites de choix successifs de valeurs dans la suite ordonnée des nombres naturels ; il s'agit du théorème de la barre, du théorème de l'éventail et du théorème de continuité uniforme sur [0, 1], l'intervalle compact. On peut formuler le théorème de la barre de la façon suivante : « si une propriété est vraie pour toute suite α habitée (par des valeurs initiales) et est vraie pour le segment initial des valeurs de α, et si elle est vraie de la concaténation $\alpha * < n >$ pour tout *n*, alors elle est vraie pour toute suite dans S (le déploiement universel, en néerlandais « *spreiding* ») – pour toutes ces notions je renvoie à (Gauthier [5], chap. 2 et [6], chap. 5). On voit donc la proche parenté de ce théorème avec le postulat d'induction (classique) de Peano – la preuve elle-même repose essentiellement sur l'induction, i.e. l'induction « barrée ». Or S.C. Kleene a montré que le principe général de l'induction barrée entraînait le tiers exclu et qu'il fallait donc une contrainte nouvelle, celle de la décidabilité « locale » des suites, pour valider le théorème de la barre d'un point de vue constructif – ce résultat de Kleene et d'autres sont dûment consignés dans *Elements of Intuitionism* de Dummett (Dummett [4]).

Les suites de choix sont engendrées par des choix successifs de valeurs, choix étagés par des opérations ou fonctionnelles continues qui peuvent opérer sur tout un réseau de choix antérieurs pour donner naissance à une floraison de suites de choix (voir Troelstra [12] et [12]).

Un premier principe valide pour les suites de choix est celui de la continuité intensionnelle qu'on exprime de la façon suivante

$$X\alpha \to \exists\Gamma\big(\exists\beta(\alpha = \Gamma\beta) \wedge \forall\beta X(\Gamma\beta)\big)$$

i.e. si une suite de choix possède un prédicat extensionnel ou appartient à une espèce donnée, alors il est toujours possible de trouver une fonctionnelle continue opérant sur une autre suite de choix et qui correspond à cette première suite de choix, parce qu'elle possède le même prédicat extensionnel ou appartient à la même espèce (en vertu des mêmes segments initiaux).

On peut définir aussi une continuité extensionnelle (ou le principe de Brouwer pour les nombres)

$$\forall\alpha\exists xX\,(\alpha, x) \to \exists x\forall x\forall y\forall\beta\,\big(\bar{\alpha}x = \bar{\beta}x \to X(\beta, y)\big),$$

ce qui signifie que si l'on a pour une suite de choix arbitraire α une procédure qui permette de déterminer un nombre naturel x, alors pour toutes les autres suites de choix ayant les mêmes segments initiaux, on peut avoir la même procédure qui permette de déterminer un nombre naturel y, ou, en d'autres termes, l'existence d'une valeur numérique déterminée pour une suite de choix implique qu'il y a une fonctionnelle régulière continue qui détermine une telle valeur.

Une des conséquences importantes de ces principes est le théorème de l'éventail de Brouwer. Pour le discuter utilement, il faut introduire la notion de déploiement. La notion de déploiement est définie par deux lois : une loi de déploiement, qui est représentée par une fonction régulière a obéissant aux stipulations suivante :

1) $a0 \neq 0$

2) $\forall n\forall m\,\big(a\,(n * m) \neq 0 \to an \neq 0\big)$

$$3)\ \forall n\, \exists x\ (an \neq 0 \rightarrow a\ (n^* < x > \neq 0)$$

Une quatrième stipulation de finitude

$$4)\ \forall n\, \exists z \forall x\ \big(a(n^* <x>) \neq 0 \rightarrow x \leq z\big)$$

définit une loi de déploiement finitaire ou éventail (*fan*). Ici * désigne encore l'opération de concaténation et $<x>$ une suite contenant un seul élément. On peut se représenter une loi d'éventail comme un arbre dont le faîte est la suite vide $<0>$.

L'autre loi qui définit un déploiement est une application complémentaire ξ d'une loi de déploiement (ou d'un arbre) qui fait correspondre les objets d'une espèce donnée *S* aux nombres naturels positifs. Un déploiement peut être « habillé » ou « nu », selon que l'application ξ est dans une espèce ou non et une suite est élément d'un déploiement si elle suit immédiatement dans l'arbre une suite qui l'est. Le théorème de l'éventail s'énonce comme suit

$$\forall \alpha \forall x\ \mathrm{X}\ (\mathrm{T}_\alpha \alpha, x, \alpha_0, \ldots) \rightarrow$$
$$\exists y \forall \alpha \forall \beta\ \big(\Gamma_\alpha \alpha y = \Gamma_\beta \beta y \rightarrow \mathrm{X}(\Gamma_\alpha \beta, x, \alpha_0, \ldots)\big).$$

Ce théorème est une sorte de théorème de finitude pour les suites de choix. En mots, « si à chaque élément d'un éventail α est associé un nombre naturel *x*, un nombre naturel y peut être spécifié tel que *x* soit déterminé par les *y* premiers choix qui engendrent α par la loi d'éventail a ». Or le lemme de König classique est la contraposée du théorème de l'éventail pour les espèces détachables, i.e.

$$\forall x \in \mathrm{X}\ (x \in \mathrm{Y} \vee x \notin \mathrm{Y})$$

pour des espèces X et Y. Le lemme de König qui stipule que tout arbre infini à branchement fini comporte une branche infinie (le tronc !) fait appel à la logique classique (tiers exclu) et à des notions non constructives (e.g. axiome du choix dépendant). Il faut donc affaiblir le théorème de l'éventail pour lui conserver son caractère intuitionniste.

Le théorème de l'éventail a été utilisé par Brouwer pour démontrer son important théorème que l'on a formulé plus haut en analyse intuitionniste : « Toute fonction à variables réelles définie sur l'intervalle compact [0, 1] est uniformément continue » (voir Brouwer [3]. Intuitivement, on voit que toute fonction φ(*x*) d'une variable réelle partout définie ne peut l'être que de proche en proche – par les *n* premiers choix de valeurs pour $\varphi(x)$ – de sorte que la différence entre deux fonctions $\varphi(p)$ et $\varphi(q)$ pour deux points p et q soit toujours inférieure à un nombre rationnel arbitrairement petit 2^{-n}, d'où la continuité uniforme.

Remarquons que les principes d'induction sur les ordinaux (les bons ordres) ont la même signification en logique classique et en logique intuitionniste, sauf que l'on suppose en intuitionnisme que les espèces sont décidables, i.e. que pour une suite (ou sous-suite) arbitraire strictement descendante F, on a $x_0 \notin F \vee x_0 \in F$ (voir Troelstra [12]). À la notion ensembliste de bon ordre sur les sous-ensembles de **N** correspond la notion intuitionniste d'arbre bien fondé ou bien enraciné pour lequel il n'y a pas de suite strictement descendante (décroissante) infinie – énoncé qui correspond à son tour à l'axiome de fondation dans la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel. Dans les deux cas, pour passer à la descente infinie au sens de Fermat, en réalité une descente finie, comme nous l'avons vu – il faut utiliser la double négation sur l'ensemble infini dénombrable **N** pour la descente finie

$$\neg(\neg \mathrm{DF}) \leftrightarrow \mathrm{DF}$$

qui exclut le tiers, ici la descente indéfinie sur la suite « effinie » ou illimitée des nombres naturels.

5. ÉPILOGUE PHILOSOPHIQUE. LE VA-ET-VIENT ENTRE LA THÉORIE ET LA PRATIQUE

Brouwer a introduit la notion de sujet créateur dans ses travaux tardifs pour accentuer le caractère subjectiviste de l'expérience mathématique. Certains ont voulu formaliser la théorie du sujet créateur, mais on a dû admettre que la théorie des constructions et des preuves qui leur sont associées était imprédicative. Une analyse phénoménologique de l'expérience mathématique peut se permettre de faire appel au sujet transcendantal dans l'esprit de Kant ou de Husserl et supposer que le destin de l'intuitionnisme a partie liée avec la phénoménologie husserlienne. Brouwer lui-même semble avoir suggéré qu'une analyse démonstrative complète ou une preuve canonique requérait une structure arborescente infinie dans le déploiement universel de toutes les suites de nombres naturels – voir là-dessus le commentaire de Dummett (Dummett [4]). Il est patent que cette idée d'une production mentale qui transcende les moyens finis de la métamathématique au sens de Hilbert va à l'encontre du constructivisme finitiste inauguré par Kronecker et que Hilbert s'est résolu à adopter après un détour par le paradis cantorien ! La justification transcendantale de théorèmes mathématiques (théorème de la barre ou théorème de l'éventail) n'est pas si éloignée en réalité des arguments philosophiques qu'un Cantor platoniste a voulu trouver chez les philosophes et théologiens médiévaux ou encore chez le Spinoza de la substance infinie. La notion hilbertienne de système formel suppose en revanche que l'on doive démontrer des propositions infinitaires par des moyens finis, la preuve se terminant avec la dernière ligne d'une dérivation formelle. C'est tout le sens de l'algorithme kroneckerien de la démonstration en un nombre fini d'étapes. La logique et les mathématiques constructives ne peuvent s'accommoder de principes et de théories qui vont au-delà de l'horizon constructif : cet horizon est récessif, mais indépassable ou intraversable tout autant que l'infini potentiel d'Aristote. La pratique mathématique d'un Leibniz pour qui l'infini mathématique est une fiction utile ou d'un Gauss pour qui l'infini du mathématicien n'est qu'une façon de parler ou encore d'un Poincaré qui pensait que l'infini est une approximation du fini et non l'inverse, toute cette tradition arithmétique se prolonge par-delà l'infinitisme cantorien aussi bien en logique et en mathématiques constructives qu'en informatique théorique. La critique fondationnelle est une théorie critique de la pratique et il importe de démonter, d'autres diraient déconstruire, le discours logique ou mathématique qui prétend rendre compte de la pratique concrète en recourant aux objets idéaux produits par un mathématicien idéal dans un univers qu'il n'a pas construit effectivement.

Le constructivisme intuitionniste n'obéit pas toujours aux canons de la pratique mathématique que Brouwer a voulu instaurer. En admettant l'équivalence formelle de l'induction transfinie (et de l'induction complète) avec la descente infinie, l'intuitionnisme brouwerien et post-brouwerien commet une erreur de principe, puisque le tiers exclu refusé aux ensembles infinis refait surface dans la double négation opérée sur l'ensemble dénombrable infini des nombres naturels pour redescendre l'échelle infinie de l'induction. Brouwer avait pourtant insisté sur le procès en devenir « *ein Prozess im Werden* » pour les suites infiniment processives, mais il n'a pas toujours suivi ses propres préceptes et ses successeurs n'ont pas toujours suivi l'initiateur de l'intuitionnisme. L'équivalence formelle entre induction transfinie et descente infinie est évidemment admise en logique et en mathématiques classiques au prix de principes non constructifs. Pour le montrer, il a suffi de contraster la descente infinie pratiquée en arithmétique ou théorie des nombres avec la descente infinie de la logique classique.

Un premier argument pragmatique, c'est-à-dire issu de la pratique, en faveur de la spécificité de la descente infinie au sens de Fermat, c'est qu'elle opère hors de l'atteinte de la théorie des ensembles et de la sémantique ensembliste de la logique classique, la théorie des nombres classique ayant connu un développement totalement autonome tout au long de son histoire depuis Hammourabi jusqu'à nos jours, si l'on en croit André Weil (Weil [14]). Et en pratique, l'infini constructible n'est pas absent des mathématiques constructives. On n'a qu'à rappeler le théorème d'Euclide sur l'infinité des nombres premiers où la preuve est constructive et où la notion d'infini actuel n'apparaît pas. En fait, la descente infinie que Fermat considère comme sa création peut être interprétée comme un algorithme euclidien généralisé pour la décomposition des nombres (et des polynômes) en leurs diviseurs communs ; la méthode s'applique dans de vastes domaines des mathématiques, de l'arithmétique élémentaire à la théorie algébrique des nombres (Kummer) et à l'arithmétique générale ou théorie des formes de Kronecker – on trouvera des détails sur la formulation de la méthode chez Fermat et des développements sur le programme de Kronecker dans l'ouvrage (Gauthier [7]). La théorie logique, la logique arithmétique ou la logique interne de l'arithmétique qui est à l'oeuvre dans la descente infinie de Fermat est par définition une logique constructive qui ne peut tolérer le tiers exclu et les principes non constructifs comme l'axiome du choix et autres concepts infinitaires propres à l'arithmétique transfinie de Cantor sur laquelle reposent l'arithmétique ensembliste de Dedekind-Peano et la sémantique ensembliste de la logique classique. La théorie logique veut reproduire le plus fidèlement possible la démarche concrète de l'arithméticien pour retraduire la logique en termes arithmétiques, d'où le nom de logique polynomiale modulaire pour la logique arithmétique à portée computationnelle immédiate. Alors que les logiques faisables, prédicatives ou constructives de l'arithmétique de Peano (et de ses sous-systèmes) sont partie prenante de la sémantique ensembliste, la logique arithmétique est une syntaxe pure qui doit générer sa propre interprétation, i.e. sa consistance interne par des moyens constructifs à vocation computationnelle. La posture fondationnelle du constructivisme finitiste ou plutôt « effinitiste » cherche à mieux définir l'horizon constructif de la pratique scientifique ; c'est là une tâche philosophique à laquelle le théoricien de la pratique ne peut se soustraire.

BIBLIOGRAPHIE

1. S. Artemov, Explicit provability and constructive semantics, *Bulletin of Symbolic logic*, 7(1), 2001, p. 1-36.
2. E. Bishop, *Foundations of Constructive Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1967.
3. L.E.J. Brouwer, *Collected Works*, vol. 1, North-Holland, Oxford, Amsterdam, 1975.
4. M. Dummett, *Elements of Intuitionism*, Oxford University Press, Oxford, 2nd edition, 2000.
5. Y. Gauthier, *Fondements des mathématiques. Introduction à une philosophie constructiviste*, P.U.M., Montréal, 1976.
6. Y. Gauthier, *Logique et fondements des mathématiques*, Diderot, Paris, 1997.
7. Y. Gauthier, *Internal logic. Foundations of mathematics from Kronecker to Hilbert*, Kluwer, Dordrecht, 2002.
8. G. Gentzen, *Collected Papers*, E. Szabo, ed. North-Holland, Amsterdam, 1969.
9. A.N. Kolmogorov, O principe *tertium non datur*, *Matematischeskii sbornik*, 32, 1955, p. 646-667.
10. E. Nelson, *Predicative Arithmetic*, Number 32 of Mathematical Notes, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1987.
11. G. Peano, *Opere Scelte*, vol. II, Edizione Cremonese, Roma, 1959.
12. A. S. Troelstra, *Choice Sequences*, Clarendon Press, Oxford, 1976.
13. A. S. Troelstra and D. van Dalen, *Constructivism in Mathematics*, vol. 1, North-Holland, Amsterdam, 1988.
14. A. Weil, *Number Theory. An Approach through History. From Hammourabi to Legendre*, Birkhäuser, Basel, 1984.

CHAPITRE 7

Commentaire de « La formalisation de la descente infinie »

Ce texte est une présentation succincte de la méthode de la descente infinie ou indéfinie de Fermat. Il s'agit ici d'un résumé de mes essais de formalisation de la descente fermatienne depuis le texte original de 1989 « Finite Arithmetic with Infinite Descent », *Dialectica*, vol. 43, no. 4, p.329-337. L'état final de la question est consigné dans mon ouvrage de 2015 *Towards an Arithmetical logic. Arithmetical Foundations of Logic.*

Le motif central est de trouver une formulation adéquate du quantificateur *effini* ⱯxAx pour la suite illimitée des nombres naturels et faire ainsi l'économie de l'induction complète pour un ensemble infini de cardinalité $\aleph_0$. C'est là le noeud de l'arithmétique de Fermat-Kronecker que j'oppose à l'arithmétique ensembliste de Peano (ou Dedekind-Peano). Le système formel F-K a pour contenu une logique polynomiale modulaire pour la descente infinie dans l'arithmétique générale des polynômes qui comprend aussi bien les fondements arithmétiques et algébriques de toute théorie mathématique.

La formalisation de la descente infinie

1. INTRODUCTION

L'arithmétique de Fermat est caractérisée par la méthode de la descente infinie et je soutiens que du point de vue métamathématique, c'est-à-dire du point de vue de la théorie des démonstrations, la descente infinie remplit le rôle de l'induction sans avoir recours à la notion d'ensemble infini. Il est évident que Fermat n'avait pas le point de vue ω dans l'esprit. Fermat affirme qu'il a inventé la méthode de la descente infinie ou indéfinie, mais elle est déjà <*in nuce*> chez Euclide. Prenons, par exemple, la proposition 31 du livre VII des *Éléments* « tout nombre composé peut être divisé par un nombre premier ». La preuve utilise une décomposition ou une réduction qui ne peut continuer indéfiniment puisque toute suite descendante de nombres naturels est finie. Fermat lui-même a mis sa méthode à l'épreuve dans sa preuve de l'impossibilité de l'équation diophantienne $x^4 + y^4 = z^2$; c'est un cas particulier du dernier théorème de Fermat

$$\forall n > 2 \; \forall x \, \forall y \, \forall z \; (x^n + y^n \neq z^n).$$

Le principe de la descente infinie peut être formulé de la façon suivante : si l'existence d'une propriété pour un n donné implique l'existence de cette même propriété pour un nombre arbitrairement plus petit, alors cette propriété est attribuable à des nombres de plus en plus petits *ad infinitum*, ce qui est impossible puisque toute suite descendante de nombres naturels est finie. Pour formaliser ce principe, j'introduis ici le quantificateur « effini ». En symboles, nous avons la quantification « illimitée » pour tous les x à l'effini…

$$\text{王} x \; (A \, x)$$

ce qui signifie que la suite continue indéfiniment ou plutôt « effiniment ».

Le principe de descente n'a pas besoin d'un quantificateur universel classique, seulement un quantificateur effini pour la descente finie ou indéfinie, « effini » signifie toujours potentiellement infini, les suites indéfinies ou les suites infiniment processives de Brouwer. On pourrait assigner un nombre naturel illimité à ces suites, à la manière de Nelson dans sa *Predicative Arithmetic*, tandis qu'on pourrait assigner des nombres naturels (entiers positifs) aux segments initiaux finis (ensembles) de ces suites.

Puisque la descente infinie est impossible – toute suite descendante d'entiers positifs doit s'arrêter à 0, la borne pré-positionnelle de la suite des nombres naturels – on peut ajouter la conclusion suivante à notre schéma de descente

$$\text{∃̶}x \quad Ax \wedge \exists y\,(y < x)\,Ay] \rightarrow \exists y \forall z\,(z < y) Az \quad \rightarrow \text{∃̶}x \neg Ax.$$

ce qui signifie que la propriété (l'ensemble des propriétés) attribuée par la descente infinie est fausse pour tous les nombres naturels « effiniment ».

2. L'INTERPRÉTATION POLYNOMIALE

Il existe diverses façons de traduire un système formel dans les nombres naturels, de la substitution simple des variables numériques chez Ackermann à la traduction des opérations logiques en opérations arithmétiques comme dans le calcul opérationnel chez Goodstein. Notre traduction polynomiale est dictée par l'utilisation que nous faisons des résultats de Kronecker dans son texte de 1882 *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen* (Traits fondamentaux d'une théorie arithmétique de grandeurs algébriques).

Nous allons avoir besoin de certains faits touchant aux polynômes en une indéterminée dans la preuve de consistance. Nous passons rapidement sur les notions préliminaires (l'anneau gradué de deux ou plusieurs polynômes a le même produit de convolution, notre principal outil).

Les polynômes de la forme

$$f = f_0 x^n + f_1 x^{n-1} + \ldots + f_{n-1} x + f_n$$

où les f_i sont les coefficients avec l'indéterminée x constituent le sous-anneau $K[x]$ de l'anneau $K\quad[x]$ des séries de puissances formelles. Le degré d'un polynôme est le degré du dernier coefficient non nul ($k=n$), alors que le coefficient principal d'un polynôme f de degré k est la constante f_k et f est appelé monique si son coefficient principal est 1. Les polynômes sont donc des séries de puissances qui n'ont qu'un nombre fini de coefficients non nuls. Le produit de Cauchy ou d'involution de deux polynômes joue un rôle important dans notre traduction ; nous l'écrivons

$$f \cdot g = \quad \sum_m f_m x^m \quad \sum_n g_n x^n \quad = \sum_m \sum_n f_m g_n x^{m+n}.$$

La somme $f + g$ des polynômes f et g est obtenue en additionnant simplement les coefficients correspondants. Les polynômes homogènes ont tous leurs termes non nuls du même degré et ils peuvent être mis dans la forme suivante

$$f = f_0 x^n + f_1 x^{n-1} + \ldots + f_{n-1} x + f_n.$$

Nous nous intéressons aux polynômes irréductibles (premiers dans $K[x]$). Tout polynôme linéaire est irréductible. $K[x]$ a la propriété de factorisation et de ce fait est crucial pour ce qui suit.

Nous allons faire un emploi essentiel de la notion kroneckerienne de contenu des formes. Une forme M est un terme dans une autre forme M' quand les coefficients de la première sont « convolutés » (combinés dans un produit de Cauchy) dans les coefficients du second. Cette idée d'un contenu <*Enthalten-Sein*> des formes se résume dans l'énoncé « le contenu du produit est le produit des contenus (de chaque forme) » qu'on peut extraire du texte de Kronecker [1]. Ainsi, pour qu'une forme soit contenue ou incluse dans une autre forme il suffit qu'elle soit combinée avec elle linéairement (avoir ses puissances convolutées avec les puissances de la seconde forme).

On peut adopter alors le principe général de la substitution-élimination par Kronecker. Nous énonçons le principe de substitution de la façon suivante :

1) Deux formes homogènes (polynômes) F et F' sont équivalentes si elles ont les mêmes coefficients.

2) Des formes peuvent se substituer aux indéterminées (variables) pourvu que la substitution (linéaire) se fasse avec des coefficients entiers.

Nous avons comme conséquence immédiate la proposition 1 (proposition X chez Kronecker) :

> « Les formes linéaires homogènes qui sont équivalentes peuvent se transformer l'une dans l'autre par la substitution de coefficients entiers ».

Nous avons aussi la proposition 2 (proposition X° chez Kronecker) :

> « Deux polynômes F et F' sont équivalents, s'ils peuvent se transformer l'un dans l'autre ».

Ces propositions sont en réalité des lemmes pour le théorème de la factorisation unique des formes que Kronecker considérait comme l'un de ses résultats les plus importants. La procédure de substitution est simultanément une procédure d'élimination, puisque les indéterminées <*Unbestimmte*> sont remplacées par des coefficients entiers. Ainsi, une réserve indéfinie (ou effinie) de variables est mise à la disposition d'un système formel et réduite ensuite par la méthode de substitution-élimination à une suite descendante finie de nombres naturels comme nous allons le voir ci-après.

Le procès de substitution a lieu à l'intérieur de l'arithmétique, dans le corps de Galois *F**, le corps minimal ou corps de base des polynômes qui est le lieu propre de la traduction et les indéterminées – Kronecker emprunte à Gauss ses <*indeterminatae*> – sont les outils appropriés pour la transformation des formules en nombres naturels. L'idée centrale est que les indéterminées dans le sens de Kronecker peuvent êtres adjointes et expulsées librement et bien que Kronecker n'ait pas toujours supposé que ses formes étaient homogènes, nous nous restreignons aux polynômes homogènes.

Définition : La hauteur d'un polynôme est le maximum de ses longueurs (nombres de composantes ou termes) – la hauteur d'un polynôme est indiquée par un indice inférieur.

Nous introduisons la fonction d'évaluation en huit clauses :

Clause 1) Une formule atomique peut se traduire polynomialement par

$$\varphi \quad (A)\,[n] = a_0\,x \quad \text{(pour un } A \text{ arbitraire)}$$

(où la partie a_0 est appelée la « déterminée » et la partie x « l'indéterminée »). Ici, le coefficient a_0 correspond à un nombre naturel donné

(« l'évaluateur ») et 0 indique qu'il s'agit du premier membre de la suite, x étant son indéterminée associée. Le polynôme $(a_0 x)$ est donc la combinaison de deux polynômes (1,0,0,0,…) et (0,1,0,0,…). Nous identifions les polynômes par leurs premiers coefficients. Deux formules équivalentes ont les mêmes évaluateurs – comme en théorie des polynômes deux formes équivalentes ont le même plus grand diviseur commun ; il en va de même pour les formules identiques, *e.g.* $\varphi \quad (A \wedge A)\,[n]$ ou $\varphi \quad (A \vee A)\,[n]$ qui ont un seul évaluateur n puisqu'elles sont réductibles à $\varphi \quad (A)$ à la manière d'une fonction polynomiale unique qui peut être déterminée par des polynômes différents, ici A^2 et $2A$. En plus, la fonction d'identité

$$1: A \rightarrow A,$$

est une fonction constante

$$c: A \rightarrow A\ c$$

pour des formules de la forme

$$\varphi \quad (A \vee A)\,[n].$$

Les formules moléculaires sont constituées de monômes et leur évaluation doit s'opérer sur les composantes atomiques (les coefficients), *i.e.* la compositionnalité polynomiale au moyen de la fonction d'évaluation

$$\varphi \quad (A) = 1 \qquad \text{pour tous les } A$$

et

$$\varphi \quad (\neg A) = 0 \qquad \text{pour la négation de } A.$$

Cette fonction est unique et est définie aussi bien pour l'addition que pour la multiplication de telle sorte que $\neg\,(A \wedge A)$ équivaut à

$$\varphi \quad \neg\,(A \wedge A) \quad [n] = (1 - a_0x)$$

puisque $(1 - a_0x) + (1 - a_0x) = 0$ pour $A = 1$.

Clause 2) La négation d'une formule atomique est traduite par

$$\varphi \quad (\neg A)\,[n] = (1 - a_0x).$$

Clause 3) La conjonction de A et B est traduite par

$$\varphi \quad (A \wedge B)\,[n \times m] = \ (a_0x) \times (b_0x)\ .$$

pour le produit des monômes (a_0x) et (b_0x).

Clause 4) La disjonction A ou B est traduite par

$$\varphi \quad (A \vee B)\ [n+m] = \ (a_0x) + (b_0x)\ .$$

Clause 5) L'implication locale est rendue par $A \rightarrow B$

$$\varphi \quad (A \rightarrow B)\ [m^n] = (\bar{a}_0x) + (b_0x)^n$$

pour $\bar{a}_0x = 1 - a_0x$ on a la version modulaire $a_0x \equiv b_0x \pmod{a_0x + 1}$.

Remarques : Comment l'implication est-elle interprétée polynomialement ? Un produit développé de polynômes a la forme

$$a \times b = \ \sum_i a_i x^i \quad \sum_j b_j x^j \ = \sum_i \sum_j a_i\, b_j\, x^{i+j}.$$

Pour a^b nous pourrions simplement écrire $(a+b)^n$ pour les coefficients binomiaux et mettre

$$(a_0x) + (b_0x)^n = a_0^n x + na^{n-1}xbx + \ n \ \ n - {}^1\!/\!2! \quad a_2^{n-2}x^2 b_2 x^2 + b_0^n x.$$

en plus court

$$(a_0x + b_0x)^n_{i<n} = \sum_{i+j=n} (i+j)\ a^i\, b^j\, x^n.$$

Le motif de cette traduction, c'est que nous voulons rendre la notion d'inclusion de a dans b par l'entrelacement ou la combinaison des coefficients dans un produit « croisé », la somme des coefficients étant 2^n qui est aussi la somme des combinaisons de n objets différents pris r à la fois

$$\sum_{r=0}^{n} C_n^r.$$

La combinaison linéaire des coefficients est assurément de première importance du point de vue de Kronecker et un de ses résultats fondamentaux s'énonce : « Toute fonction intégrale d'une variable peut être représentée comme un produit de facteurs linéaires ». Kronecker se réfère au concept de congruence chez Gauss et montre qu'un système modulaire avec des éléments infinis (indéterminés) est réductible à des éléments finis. C'est là sans doute l'origine du théorème de la base de Hilbert sur le nombre fini de formes dans tout système de formes avec

$$F = A_1F_1 + A_2F_2 + \ \ldots \ + A_mF_m$$

pour des formes définies $F_1, F_2, \ldots, F_m$ du système et des formes arbitraires $A, A_2, \ldots, A_m$ avec des variables (indéterminées) appartenant à un corps donné ou domaine de rationalité (<*Rationalitätsbereich*>). Le fait que l'exponentiation n'est pas commutative est indiqué par l'inclusion $a \subset b$. La nature combinatoire de l'implication est explicitée dans l'expansion polynomiale et est renforcée par les traits symplectiques (entrelacés) de l'inclusion locale du contenu. On peut aussi définir l'implication en analogie avec le complément relatif $(2^n - a_0 x) + b_0 x$ où 2^n est l'univers arithmétique en expansion polynomiale jusqu'à n.

Clause 6) $\varphi \quad (\exists x\, Ax)\, [n+m+1\ldots] = \sum_{0\ldots} (a_0 x + b_0 x + c_0 x \ldots)_{i<n}$

où $\sum$ est une somme itérée d'instances numériques avec a_0 comme premier membre de la suite.

Clause 7) $\varphi \quad (\forall x\, Ax)\, [n \times m \times 1] = \prod_0 (a_0 x + b_0 x + c_0 x \ldots)_{i<n}$.

Clause 8) $\varphi \quad (\mp x\, Ax)\, [n \times m \times 1] = \prod_{0\ldots} (a_0 x + b_0 x + c_0 x \ldots)_n$.

Remarques : La notion de quantificateur effini doit être précisée. Alors que le quantificateur universel ne s'applique qu'aux ensembles finis, le quantificateur effini est réservé aux suites infiniment processives ou suites effinies. Ce ne sont pas des ensembles et elles n'ont pas de borne postpositionnelle ; nous assignons un n à de telles suites et 2^n aux suites de suites

$$0,1,2,\ldots, n,\ldots 2^n$$

en supposant que n signifie une borne arbitraire. Il faut se rappeler que Boole a aussi un univers arithmétique dans sa *Mathematical Analysis of Logic* (1847) qu'il dénote par 1 et la négation est notée $1 - a$. Le fait que le corps $K[x]$ des polynômes possède la propriété de factorisation unique révélée par la descente infinie est lié à la preuve de l'infinité des nombres premiers obtenue aussi par descente infinie.

Nous avons alors une formulation combinatoire

$$\prod_{0\ldots}^{n} (a_0 x\, b_0 x\, c_0 x \ldots n_n x^n)$$

pour le quantificateur effini, puisque $n! = \Pi_{c \leq n}$, les combinaisons de n. J'appelle ce schéma, l'échelle absolue ou standard. Toute autre échelle est une échelle associée (d'indéterminées) et est réductible par substitution à l'échelle absolue. Par exemple, une borne supérieure comme $2^{2^n} - 1$ n'est pas démontrée par induction complète jusqu'à 2^{2^n}, mais par régression à l'échelle absolue 2^{n-1}.

Une remarque philosophique : Il n'y a pas de ω. Toute échelle ordinale transnaturelle ou transarithmétique (transfinie dans la terminologie cantorienne), *e.g.* ε_0 est une échelle associée et est par définition réductible. Il est clair, d'un point de vue kroneckerien, que l'arithmétique transfinie de Cantor est une associée superflue (de compensation indéterminée !). L'univers arithmétique N est naturellement borné par 2^n.

3. CONCLUSION

La preuve de la consistance interne de l'arithmétique FK (pour Fermat-Kronecker) emprunte le chemin suivant : la traduction radicale de la logique dans l'arithmétique polynomiale, le plongement de l'arithmétique dans les polynômes – avec les indéterminées jouant le rôle de variables – où le degré d'un polynôme remplace le type d'une formule ou d'un énoncé donné dans l'univers arithmétique et enfin la descente infinie ordonne les polynômes selon l'ordre décroissant de leurs puissances jusqu'à ce qu'on atteigne les polynômes linéaires de degré 1 (irréductibles) ou les polynômes constants (de degré zéro) ou le polynôme zéro lui-même (qui n'a pas de degré, mais est noté ∞). Donc $1 \neq 0$ ou $0 \neq \infty$. D'où la non-contradiction par le fait que $\varphi\ (A) = 1$ et $\varphi\ (\neg A) = 0$, ce qui donne

$$\neg (A \wedge \neg A)$$

et donc

$$\neg (1 = 0).$$

Dans la preuve, la diagonale de Cauchy (le produit de convolution) ne nous entraîne pas hors du domaine de rationalité des polynômes et la nature combinatoire de la logique est préservée dans la clôture des extensions algébriques. L'élimination de la logique dans cette réduction arithmétique n'est pas sans rappeler l'élimination des quantificateurs en théorie des modèles, mais elle remonte à la source, la théorie de l'élimination de Kronecker. H. Weyl dans son classique *Algebraic Theory of Numbers* insiste sur le caractère algorithmique de la théorie des diviseurs de Kronecker et sur sa supériorité par rapport à la théorie (non constructive) des idéaux chez Dedekind. La factorisation unique pour les polynômes s'obtient par la condition (constructive) de la chaîne descendante et non à l'aide d'hypothèses sur l'existence des objets abstraits. L'élimination de la logique va plutôt dans le sens du programme métamathématique de Hilbert pour le problème de consistance. La syntaxe gouverne la sémantique dans ce contexte. Le programme ne pouvait être réalisé dans le cas de l'arithmétique ensembliste de Peano, comme Gödel l'a montré, mais le programme n'est pas pour autant annulé. La descente infinie ou indéfinie – qui est en réalité finie – livre la consistance pour la quantification indéfinie (ou effinie) dans la suite illimitée des nombres naturels. L'arithmétique récursive primitive se soumet à une polynomialisation directe sans avoir le désavantage de la récursivité générale – l'opérateur μ est absorbé par la descente sur l'ordre descendant des exposants polynomiaux. Le théorème de Matijasevic n'a pas de prise ici, non seulement parce que la traduction polynomiale échappe à l'énumérabilité récursive d'un ensemble infini, mais aussi parce que la preuve de consistance est fondée uniquement sur le degré fini des polynômes et non sur la solubilité des polynômes à coefficients entiers (ou équations diophantiennes) dans les entiers.

En fin de compte, la logique arithmétique ou polynomiale se passe aussi bien des types, ensembles et classes puisqu'elle se limite à l'arithmétique générale des polynômes ou entiers généralisés. Après tout, la forme normale de Cantor n'est qu'un polynôme ordinal

$$\zeta = \gamma_0\beta^{\alpha n} + \gamma_1\beta^{\alpha_{n-1}} + \ldots + \gamma_{n-1}\beta^{\alpha} + \gamma_n,$$

une série finie de puissance infinies. Mais ici, on doit recourir à l'induction transfinie pour accéder à une preuve de consistance « externe » de l'arithmétique dans le style de Gentzen, Ackermann, Kalmár, Gödel et autres. Les travaux antérieurs à Gentzen sur le problème de la consistance, ceux de von Neumann et Ackermann, n'ont pu se dégager de la gangue ensembliste et si les résultats de Gentzen, Ackermann et Kalmár ont emprunté une forme de descente – Kalmár parle d'une descente finie sur les ordinaux transfinis, un peu comme Takeuti plus tard –, ils l'ont toujours identifiée à l'induction complète (infinie), restreinte ou pas. Par exemple, I. Khlodovskii publie en 1959 « Une nouvelle preuve de la non-contradiction de l'arithmétique » (Cf. I. Khlodovskii, « Novoe dokazatelstvo neprotivoretsivosti arithmetiki » *Usp. Mat. Nauk*, vol. 14, no. 6 (1959), pp. 105-140) qui ne fait pas appel à l'induction transfinie, mais à l'induction complète, comme l'avait fait auparavant Novikov et Lorenzen pour la théorie des types. Mais l'induction complète correspond à l'induction infinie ou règle ω pour l'arithmétique, c'est-à-dire au premier ordinal de la hiérarchie transfinie. Il n'est pas inutile de rappeler que c'est d'abord Hilbert qui a eu l'idée d'associer nombres naturels et ordinaux transfinis (de la deuxième classe de nombres de Cantor) et qui croyait pouvoir démontrer l'hypothèse du continu grâce à cette correspondance entre fonctions sur les entiers et les ordinaux transfinis. Gödel s'en inspirera à son tour dans sa démonstration de la consistance relative de l'hypothèse du continu pour la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel en avouant qu'il avait adopté une attitude transcendantale pour obtenir son résultat. Il est assez ironique de constater que l'idée de Hilbert a servi aux solutions partielles (*i.e.* consistance relative) et transcendantes des deux premiers problèmes de sa célèbre liste, problèmes pour lesquels il espérait pourtant une solution finitiste en accord avec son programme métamathématique.

Ce que j'ai essayé de montrer, c'est que cette « descente » sur les ordinaux transfinis était en réalité une fuite en avant de l'induction complète et que seule la descente sur la suite « effinie » des polynômes assurait la consistance de l'arithmétique et la véritable réduction de l'infini (ou de l'indéfini) au fini. C'est le sens de la réduction finitaire que Hilbert a voulu accomplir dans son programme, mais il a emprunté une autre voie, celle de l'arithmétique ensembliste transfinie, qui a mené aux résultats d'incomplétude qui sont en quelque sorte intrinsèques à l'arithmétique infinitaire tout en étant externes à l'arithmétique finie.

CHAPITRE 8

Commentaire de « De Kronecker à Gödel via Hilbert. Les fondements arithmétiques et une crise sans fondement »

L'article est issu d'un colloque tenu en octobre 2011 et organisé par François Lepage avec l'aide de Karine Fradet sous le titre *La crise des fondements. Quelle crise?* Ce texte est paru dans *Les Cahiers d'Ithaque*, Département de philosophie, Université de Montréal, 2013, p. 85-102.

J'ai saisi l'occasion de résumer mes travaux historiques sur les fondements des mathématiques que j'avais menés jusque-là sur Kronecker, Hilbert et Gödel. Il s'agissait d'exposer mes vues personnelles sur ce qu'il est convenu d'appeler « la crise des fondements » des mathématiques dans la période 1885 à 1930, crise qui a été provoquée par les travaux de Frege en logique formelle, ceux de Cantor en mathématiques ensemblistes et la *paradoxologie* des Russell, Berry, Richard et autres touchant la logique formelle et les fondements des mathématiques. Russell et sa théorie des types, Hilbert et sa métamathématique (théorie des preuves et méthode axiomatique), Zermelo et la théorie axiomatique des ensembles ou encore Brouwer et ses mathématiques intuitionnistes avec Heyting pour la logique et l'arithmétique intuitionniste, ou encore Gentzen et sa preuve de consistance de l'arithmétique ensembliste (Peano) avec induction transfinie, ont voulu colmater la brèche. Gödel en a remis une couche dans son interprétation *Dialectica* sur la consistance de l'arithmétique intuitionniste, cette fois sans induction transfinie dans une perspective finitiste en introduisant une notion de fonctionnelle ou fonction d'ordre supérieur sur les types finis. Les logiciens J. Avigad et S. Feferman[1] et U. Kohlenbach[2] soutiennent que Hilbert a anticipé cette notion de fonctionnelle dans son texte sur l'infini « *Über das Unendliche* » cité dans mon article. Il est bien évident que Gödel s'inspire directement de Hilbert, mais ce que Avigad, Feferman, Kohlenbach, et autres logiciens comme Kreisel (peut-être Gödel lui-même) ignorent, c'est que Hilbert s'inspire manifestement de Kronecker, en particulier du texte de Kronecker de 1883 *Zur Theorie der Formen höherer Stufen* (« Sur la théorie des formes d'ordre supérieur ») qui reproduit le schéma fonctionnel de la substitution et de la récursion pour les polynômes homogènes de degré supérieur.

Au vu de l'importance de l'interprétation *Dialectica* dans l'histoire de la logique, il était primordial de retracer cette filiation de Kronecker à Gödel via Hilbert. C'est une autre ironie de l'histoire de la logique que la question de la consistance de l'arithmétique dans le programme de Hilbert, décriée comme obsolète par Kreisel, ressurgisse dans le programme de «*proof mining*» (ou extraction de preuves) promulgué par Kreisel et repris de haute main par Kohlenbach, repose en grande partie sur l'interprétation *Dialectica* de Gödel dans le contexte d'un finitisme élargi. C'est aussi dans ce cadre que Gödel, dont le résultat d'incomplétude avait écorché le programme de Hilbert, n'a jamais prétendu avoir réfuté le programme de Hilbert dans les remarques à propos de son résultat sur les preuves de consistance (deuxième théorème d'incomplétude).

On pourrait dire à la fin : Hilbert *vindicatus* et Kronecker *redivivus* ! D'autant plus que le programme de Kronecker, comme André Weil l'a appelé le premier, survit aujourd'hui non seulement dans l'oeuvre capitale de Weil[3], mais dans les vastes programmes de Grothendieck et de Langlands en géométrie algébrique et arithmétique contemporaine qui semblent en pleine évolution critique…

NOTES

1. Voir J. Avigad et S.Feferman « Gödel's Functional (*Dialectica*) Interpretation », dans *Handbook of Proof theory* (ed. by S.R. Buss, Elsevier 1998), chapter V.

2. Voir U. Kohlenbach *Applied Proof Theory. Proof Interpretations and their Use in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2008.

3. Comme je l'explique dans mon texte de « Kronecker in Contemporary Mathematics. General Arithmetic as a Foundational Programme », *Reports on Mathematical Logic*, vol. 48 (2013), p. 37-65, Weil a été le premier à mettre l'accent sur l'importance de ce qu'il a appelé le programme de Kronecker et là-dessus d'autres l'ont suivi comme Grothendieck, Langlands, Drinfel'd, Shimura *et alii.* Kronecker avait un programme fondationnel, l'arithmétique générale ou universelle « *allgemeine Arithmetik* », l'arithmétisation de l'algèbre qui comprendrait aussi bien les fondements arithmétiques de l'analyse. Dans ce sens, il désirait dans son rêve de jeunesse le plus cher (*mein liebster Jugendtraum*) de fonder une théorie de ce que j'ai appelé l'ellipotomie, c'est-à-dire la division des fonctions elliptiques – devenues courbes elliptiques – sur le modèle de la théorie de la cyclotomie ou division du cercle en racines entières de l'unité que son maître Kummer avait élaborée. La méthode privilégiée de Kronecker est la multiplication complexe ou la multiplication sur les nombres complexes et son résultat principal est un théorème formulé par son élève Weber : le théorème de Kronecker-Weber complété par Hilbert stipule que « Toute extension finie du corps Q des nombres rationnels est un sous-corps d'une extension cyclotomique ». On voit là la continuité avec la théorie de la cyclotomie de Kummer qui concerne l'ensemble des racines n$^{\text{èmes}}$ de l'unité dans un corps de nombres rationnels. C'est là une question d'arithmétique polynomiale et Hilbert en a fait le 12$^{\text{ème}}$ problème de sa célèbre liste en posant la question de sa généralisation aux extensions abéliennes (groupe commutatif) de n'importe quel corps de nombres. C'est ce problème de théorie des nombres algébriques qui est au cœur de la géométrie algébrique et arithmétique contemporaine. Pour plus de détails, voir mon ouvrage *Internal Logic. Foundations of Mathematics*, (Kluwer, Dordrecht, 2002), chap. 2, « From Hilbert to Kronecker ».

De Kronecker à Gödel via Hilbert. Les fondements arithmétiques et une crise sans fondement

1. INTRODUCTION

Dans ce qu'il est convenu d'appeler la crise des fondements des mathématiques du début du XX^{e} siècle, la logique formelle (Frege) et la théorie des ensembles (Cantor) avaient partie liée. Kronecker et son finitisme arithmétique y échappaient par définition. Hilbert y a échappé en se réfugiant chez Kronecker. Je veux montrer dans ce qui suit que les fondements arithmétiques de la théorie des formes ou polynômes homogènes de Kronecker ont fourni les armes nécessaires à Hilbert et ses successeurs pour ne pas être assujettis aux paradoxes logiques ou ensemblistes. L'idée de fonctionnelle polynomiale que l'on trouve chez Kronecker et que l'on retrouve chez Hilbert jusqu'à Gödel permet en effet de construire l'univers arithmétique sans le secours des notions ensemblistes et sans le recours à des constructions logiques que l'on voudra éliminer, une fois qu'on les a introduites pour faciliter l'accès au domaine purement mathématique, i.e. arithmétique. Je veux donner ici une brève idée de cette problématique que j'ai amplement développée ailleurs (voir Gauthier [1] à [7]).

2. KRONECKER ET LA THÉORIE DES FORMES D'ORDRE SUPÉRIEUR

Dans un texte bref de 1883 « *Zur Theorie der Formen höherer Stufe* » ([12]), Kronecker veut compléter la théorie des formes ou polynômes homogènes qu'il a élaborée dans son œuvre majeure de 1882 ([11]) « *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen* » ou « Les éléments fondamentaux d'une théorie arithmétique des grandeurs algébriques ». Dans ce texte, Kronecker a défini la construction ou la structure générale du contenu polynomial et sa décomposition (*Zerlegung*) en termes de la théorie de la divisibilité : la théorie comprend en effet les formes ou polynômes homogènes et les systèmes modulaires « *Modulsysteme* » ou systèmes de diviseurs. Je propose ici ma propre reconstruction du schème kronekerien en utilisant le produit de convolution (produit de Cauchy) pour les polynômes

$$f \cdot g = \sum_{m} f_m x^m \quad \sum_{n} g_n x^n = \sum_{m} \sum_{n} f_m g_n x^{m+n}$$

avec addition des coefficients m et n. Kronecker ([1882] : 343) dit qu'une forme M est contenue dans une autre forme M' si les coefficients de l'une sont contenues dans les coefficients de l'autre. Il formule alors des propositions générales sur l'équivalence des formes :

> Les formes homogènes linéaires qui sont équivalentes peuvent être transformées entre elles par substitution avec des coefficients entiers.
>
> (Proposition X dans Kronecker [1882] : 345)

et

> Deux formes sont absolument équivalentes lorsqu'elles se contiennent l'une l'autre.
>
> (Proposition X^0 dans Kronecker [1882] : 351). Kronecker énonce alors son résultat principal <*Hauptresultat*> :

> Toute forme algébrique entière au sens de l'équivalence absolue de la Proposition X^0 est représentable comme produit de formes irréductibles (premières) de façon unique.
>
> (Proposition $XIII^0$ dans Kronecker [1882] : 352).

et Kronecker d'ajouter que ce résultat montre que l'association des formes algébriques entières (à coefficients entiers) à l'aide de la méthode des indéterminées conserve les déterminations conceptuelles des lois élémentaires de l'arithmétique dans le passage du domaine rationnel ou du domaine des fonctions rationnelles entières au domaine des fonctions algébriques. Mais Kronecker n'est pas entièrement satisfait et revient l'année suivante avec sa théorie des formes d'ordre supérieur et introduit le produit (Kronecker[1883] : 422)

$$\sum_{h=0}^{m} M_h U_h \cdot \sum_{i=1}^{m+1} M_{m+2} U_{m+1}$$

(où $M = M_0, M_1, M_2, \ldots, M_{n+1}$ sont des quantités intégrales de domaines de rationalité successifs R et les U's sont des indéterminées) ; on a ainsi une forme de puissance r *contenant* le produit de formes

$$\prod_{h}^{r} \sum_{k} M_k' V_{hk}.$$

Kronecker souligne que cette formulation est plus générale que sa théorie de 1882. « Être contenu » ici signifie seulement que les polynômes dans les domaines de rationalité sont inclus ou contenus dans un ordre supérieur de leurs coefficients entiers. Un système modulaire va alors décomposer cette construction en polynômes irréductibles, de sorte que les notions d'inclusion et d'équivalence (inclusion réciproque) valent aussi bien pour les formes que pour les diviseurs, i.e. la décomposition en facteurs est une technique de descente tout à fait similaire à l'algorithme de division pour les entiers ou à l'algorithme euclidien pour les polynômes.

Dans cette décomposition canonique des polynômes, la descente infinie à la Fermat permet d'arriver aux polynômes irréductibles de la même manière que la preuve d'Euclide sur la divisibilité des nombres composés par les nombres premiers. La version kroneckerienne de la décomposition canonique des polynômes repose sur les formules

$$\prod_{h=1}^{r} M_k U_{hk}$$

et

$$\prod_{i=j+k} C_i = \sum_{j+k=i} a_j b_k$$

avec $j = (0, \ldots, m)$ et $k = (0, \ldots, n)$; nous pouvons lire cette dernière formule du point de vue de la divisibilité avec $a^{p-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$

$$\prod_{i=1}^{m+n} 1 + c_i x_i = \sum_{i=0}^{m+n} c_i x^{m+n-1} = \sum_{m+n=1} a_m b_n \ .$$

La généralisation de Kronecker utilise le produit de convolution pour les polynômes

$$\sum_h M_h U_h \cdot \sum_i M_{m+i} U^{i-1} = \sum_k M'_k U^k$$

où les M‘s sont des formes entières et les U‘s des indéterminées comme dans le produit introduit plus haut :

$$\prod_h \sum_k M_k' V_{hk}$$

et le « contenu » du produit peut alors être exprimé par

$$\sum_k M_k' U^k = M_k M_{m+1}{}^{k} + M_k M_{m+1}{}^{k-1} + M_k M_{m+1}$$

dans l’ordre décroissant des puissances de la somme polynômiale. Cette combinaison linéaire par le produit de convolution et la descente (finie) des puissances montre simplement que les formes rationnelles entières génèrent des formes algébriques entières, c’est-à-dire des entiers algébriques. Ce que nous trouvons dans le texte de 1883, c’est la simple généralisation aux ordres (*Stufe*) supérieurs de la théorie des formes de 1882 qui comprend à la fois la théorie des systèmes modulaires et la théorie des polynômes. Le principe d’équivalence des formes énoncé en 1882 est valide en toute généralité et la notion de contenu ou d’inclusion « *Enthalten-sein* » s’y déploie dans le construction « *Bildung* » des formes entières qui en quelque sorte remplissent totalement l’univers arithmétique (Kronecker[1883] : 423). À mon sens, cette construction des formes d’ordre supérieur que j’appelle fonctionnelles polynomiales préside à l’idée de fonctionnelle chez Hilbert.

3. HILBERT ET L’INTRODUCTION DE LA NOTION DE FONCTIONNELLE

C’est dans son texte de 1926 ([9]) « *Über das Unendliche* » que Hilbert introduit la notion de fonctionnelle dans sa tentative de démonstration de l’hypothèse du continu de Cantor :

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

ou dans sa forme générale

$$\forall\sigma\,(\aleph_\sigma < 2^{\aleph_\sigma} = \aleph_{\sigma+1})$$

Il s’agit pour Hilbert de construire une hiérarchie de fonctions de fonctions, de fonctions de fonctions de fonctions…, c’est-à-dire de fonctionnelles pour atteindre la deuxième classe de nombres de Cantor qu’il désigne par N et qui est définie par la limite

$$\lim_{n \to \omega} \omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}}{}^{n} = \varepsilon_0.$$

L'ensemble des entiers Z étant défini par

$$\lim n = \omega$$

il s'agit de faire correspondre toute fonction dans Z à un nombre de la deuxième classe de Cantor N. Les moyens élémentaires pour construire ces fonctions, nous dit Hilbert, sont la substitution des variables (*Einsetzung*) et la récurrence (*Rekursion*) qui consiste à dériver la valeur d'une fonction pour $n+1$ de sa valeur pour n – ces moyens correspondent chez Kronecker à la substitution des indéterminées (considérées comme variables) et à la descente sur les puissances construites par le produit de convolution. Hilbert continue en disant que pour les fonctionnelles il faut introduire des paramètres d'ordre supérieur, ce sont les types de variables de hauteur (*Höhe*) croissante, mais il insiste sur le fait que c'est par itération finie en accord avec le point de vue finitiste (*finite Einstellung*) que l'on construit les fonctionnelles sur les entiers qui devront correspondre à un nombre transfini de la deuxième classe, la deuxième classe étant elle-même définie par une itération transfinie de la suite des $\omega < \varepsilon_0$. Cette tentative d'associer bijectivement les fonctionnelles dans Z avec les ordinaux de la deuxième classe de nombres de Cantor pour démontrer l'hypothèse du continu a échoué, mais les successeurs de Hilbert, Gentzen et Ackermann ont voulu utiliser l'induction transfinie jusqu'à ε_0 pour démontrer la consistance de l'arithmétique de Peano. Hilbert a donc voulu, selon mon hypothèse, prolonger jusque dans le transfini la construction des fonctionnelles polynomiales ou formes d'ordre supérieur de Kronecker tout en garantissant le point de vue finitiste d'inspiration kroneckerienne. Son programme d'arithmétisation de la logique va dans le même sens et se prolonge jusqu'à Gödel dans son extension du point de vue finitiste (l'interprétation *Dialectica*) qui reprendra l'idée de fonctionnelle de Hilbert remontant, comme j'ai voulu le montrer, au finitisme arithmétique de Kronecker.

4. LE PROGRAMME D'ARITHMÉTISATION DE HILBERT

L'idée de Hilbert en introduisant le symbole epsilon ε (que nous distinguons du symbole ε_0) était d'assurer le passage de l'arithmétique aux éléments idéaux de la théorie des ensembles et de l'analyse, c'est-à-dire d'assurer la consistance des mathématiques infinitaires à l'aide de l'arithmétique finitaire, la théorie Z de l'arithmétique classique (récursive primitive). Hilbert a conçu la fonction de choix transfinie pour combler le fossé entre l'arithmétique finie et l'arithmétique transfinie de Cantor (voir [10]). Mais une fois que ce niveau supérieur de l'existence mathématique est atteint, il faut redescendre à la base finie : c'est la méthode de descente <*Methode der Zurückführung*> qui consiste en une construction <*Aufbau*> et une décomposition <*Abbau*> en termes arithmétiques. Le problème de la consistance de l'arithmétique est donc une question d'arithmétique finie qu'on doit sauvegarder par une procédure d'élimination du symbole ε et des formules critiques qui y sont attachées. À la question souvent posée : « Pourquoi introduire le symbole ε si c'est pour l'éliminer tout de suite après ? », la réponse est simplement : « Pour construire un royaume idéal et revenir ensuite aux fondements arithmétiques pour garantir l'édifice entier des mathématiques ». La logique (avec la méthode axiomatique) n'est qu'un outil dans la mesure où elle s'occupe des inférences arithmétiques élémentaires et de leur vérité par l'extension consistante de ses méthodes, mais elle permet en même temps les inférences transarithmétiques.

4.1 Le symbole ε et son élimination

Le premier axiome pour le symbole ε est

$$A(a) \to A \quad \varepsilon_x A(x)$$

ou $\varepsilon(A)$ est une fonction logique de choix transfinie [9]. Le quantificateur existentiel est défini par

$$\exists x\, Ax \equiv A \quad \varepsilon_x A(x)$$

et le quantificateur universel par

$$\forall x\, Ax \quad A \quad \varepsilon_x \neg A(x)$$

signifiant que la quantification universelle peut être assertée si on ne peut trouver de contre-exemple après un essai fini, *i.e.* une itération finie de la fonction de choix transfinie.

Avec l'axiome aristotélicien

$$\forall x\, Ax \to A(a)$$

et le principe du tiers exclu

$$\neg\forall x\, Ax \rightarrow A(x)$$

ces axiomes forment le cadre axiomatique pour le symbole ε et son caractère minimal devrait ouvrir le passage de l'arithmétique à l'analyse et à la théorie des ensembles en utilisant les moyens <*Hilfsmittel*> ou le détour <*Umweg*> de la logique.

L'introduction du symbole ε requiert deux théorèmes sur les formules critiques et leur élimination : le premier théorème ε élimine les formules critiques contenant un terme t

$$A(t) \rightarrow A \;\; \varepsilon_r A(r)$$

par une méthode de résolutions symboliques

$$(R) = \begin{array}{l} A(t_1) \rightarrow A \;\; \varepsilon_r A(r) \\ \\ A(t_n) \rightarrow A \;\; \varepsilon_r A(r) \end{array}$$

qui reproduit la décomposition des polynômes, puisque termes et expressions sont ordonnés selon leur degré et leur rang ; le degré est le nombre (fini) maximal de termes dans une suite de termes ε et le rang d'une expression ε est le nombre (fini) maximal d'expressions dans une suite d'expressions ε. Pour les polynômes on obtient une réduction à une forme disjonctive de termes sans symbole ε, *i.e.* une expression linéaire. Le deuxième théorème ε applique le même procédé aux formules existentielles et à l'axiome d'identité. C'est le schéma d'induction qui crée un problème et requiert une nouvelle formule critique

$$A(t) \rightarrow A \;\; \varepsilon_r A(r) \neq t \;\; .$$

La substitution s'effectue ici au moyen de noms de nombres ou symboles numériques <*Ziffer*> pour les termes ε et la méthode devra introduire une formulation du principe d'induction à l'aide du symbole ε. Les formules

$$A(a) \rightarrow \varepsilon_x A(x) \neq a'$$

et

$$a \neq 0 \rightarrow \delta(a)' \neq a$$

pour l'existence des successeurs et de leur récursion donnent naissance à un nouveau principe d'induction qui est formulé de la façon suivante :

> « Pour tout prédicat numérique *P* qui s'applique à un nombre au moins, il y a un nombre correspondant à *P*, mais pour son prédécesseur, s'il y en a un, *P* ne s'applique pas » ([10], II, 87).

Ce principe est une conséquence directe du principe de plus petit nombre avec la fonction récursive générale μ

$$A(a) \to \mu_x A(x)$$

mais la procédure générale rappelle la décomposition polynomiale en facteurs irréductibles, *i.e.* l'algorithme euclidien pour le plus grand diviseur commun et sa généralisation par descente infinie pour les polynômes de degré n ou par la condition de la chaîne pour les anneaux (noéthériens) de polynômes.

Le principe de substitution prend la forme de substitutions partielles ou globales et les substitutions effectives de termes vont consister à trouver le polynôme de résolution en réduisant les substitutions d'instances de termes à des types fondamentaux de termes, c'est-à-dire des termes qui ne font pas partie d'autres termes. Le procédé reproduit la théorie générale de l'élimination chez Kronecker et la preuve de consistance ramènera aux formules réduites « irréductibles », comme le montre, par exemple, la preuve de consistance de Ackermann pour l'arithmétique – reproduite dans la seconde édition de Hilbert et Bernays [10], II, Supplément V, 535-555. La preuve de Ackermann repose essentiellement sur le nombre de réduction des substitutions globales <*Gesamtersetzungen*> pour les numéraux et les fonctions en recourant à la machinerie des fonctions récursives : on aboutit ainsi à une « suite normale » dont l'expression

$$n_0 \cdot 2^h + n_1 \cdot 2^{h-1} + \ldots + n_{h-1} \cdot 2 + n_h$$

pour les nombres n substitués aux termes. Le nombre de réduction a la valeur 1 ou 0 selon que la substitution globale se réduit à 0 ou à $j \neq 0$. Le nombre total de substitutions globales est 2^n lorsque le nombre de termes ε (de rang 1) dans la suite des formules est n, comme c'est le cas pour le nombre de coefficients dans un binôme, par exemple. Pour les rangs supérieurs, les équations récursives primitives suffisent

$$\psi(1, n) = 2^n$$
$$\psi(m+1, n) = 2^{n \cdot \varphi(m,n)} \cdot \psi(m, n).$$

Le deuxième théorème ε a encore affaire aux formules critiques de la seconde espèce, *i.e.* la résolution symbolique des formules existentielles en éliminant le quantificateur existentiel des formules comme

$$\exists r_1 \ldots \exists r_r \forall n_1 \ldots \forall n_s A(r_1, \ldots, n_s)$$

pour obtenir une disjonction

$$\begin{gathered} A \quad t_1^{(1)}, \ldots, t_r^{(1)}, f_1(t_1^{(1)}, \ldots, t_r^{(1)}), \ldots, f_s(t_1^{(1)}, \ldots, t_r^{(1)}) \quad \vee \ldots \\ \vee A \quad t_1^{(m)}, \ldots, t_r^{(m)}, f_1(t_1^{(m)}, \ldots, t_r^{(m)}), \ldots, f_s(t_1^{(m)}, \ldots, t_r^{(m)}) \end{gathered}$$

où les termes $t_j^{(i)}$ ne contiennent par le symbole ε et les f_i sont des symboles de fonctions à r-arguments

$$f_1(c_1, \ldots, c_r), \ldots, f_s(c_1, \ldots, c_r).$$

Si un axiome d'égalité est ajouté, on obtient un pur calcul des prédicats qui ouvre le chemin à une preuve de consistance dans le style de Herbrand.

4.2 Le théorème de Herbrand

La théorie de l'élimination annonce le théorème de Herbrand sur la consistance du calcul des prédicats. Voici en bref la formulation de Herbrand. Soit A une formule en forme prénexe, par exemple

$$A \equiv \exists c \, \forall y \, \exists z \, \forall t \, R(x, y, z, t)$$

avec R sans quantificateur. On introduit deux nouvelles lettres de fonctions, f unaire et g binaire avec les termes $U_1 \ldots U_n \ldots, W_1 \ldots W_n \ldots$, alors A est démontrable dans le calcul des prédicats sous la forme

$$A \equiv B \quad U_1, f(U_1), W_1, g(U_1, W_1) \quad \vee \ldots \vee B \quad U_n, f(U_n), W_n, g(U_n, W_n) \ .$$

Cette disjonction, comme celle qu'on a vue plus haut, est dérivable dans un calcul propositionnel et peut servir de critère de réfutabilité dans une interprétation négative (Voir Hilbert et Bernays [10], II, 170ss.).

La négation de A est

$$\neg A \equiv \forall x \, \exists y \, \forall z \, \exists t \, \neg B \, (x, y, z, t)$$

ou

$$\neg A \equiv \neg B \quad x, f(x), z, g(x, y)$$

et si Herbrand a vu la consistance dans la réfutabilité dans un « champ infini » ou indéfini, Kreisel a pensé l'interprétation sans contre-exemple comme une interprétation fonctionnelle sur les types supérieurs ; les fonctionnelles récursives sont de la forme

$$Bx_1 \dots x_n \quad F_1(f_1, \dots, f_n), \dots, F_m(F_1, \dots, F_n)$$

avec B ouverte. Pour une formule vraie A, nous avons

$$B \quad F_1(f, g), f \quad F(f, g) \quad , G \quad F(f, g), G(F, g)$$

où les F et les G sont évidemment nos nouvelles fonctionnelles récursives sur les types.

La dernière formule A est vraie s'il n'y a pas de contre-exemple de la forme

$$\neg B \quad x, f(x), z, g(x, y)$$

avec f et g comme arguments des fonctionnelles récursives F et G de type supérieur ; F et G sont continues et peuvent donc être associées à des polynômes de degré arbitraire : nous pouvons définir la composition de F et G

$$F \cdot G = \quad \sum_i F_i x^i \quad \sum_j G_j x^j \quad \sum_i \sum_j (F_i G_j x^{i+j} \quad .$$

Puisque nous ne pouvons quantifier sur toutes les fonctionnelles – par diagonalisation il y a une fonctionnelle récursive qui est distincte de toutes les fonctionnelles récursives – nous devons nous restreindre aux polynômes de degré fini et utiliser la descente sur les degrés et les hauteurs de polynômes pour retrouver une version finitiste.

Remarquons que les fonctions récursives primitives peuvent se traduire aisément en fonctions polynomiales. La chose est évidente pour les fonctions constantes initiales ; la composition et la récursion sont traitées comme un produit de convolution $G \times H$ pour G et H de telle sorte que

$$F(x)_{\bar{n}} = G_n \quad H_1(a_n), \dots, H_p(a_n)$$

avec $H \cdot G = \sum_i \sum_j (G_i H_j x^{i+j}$.

L'opérateur μ comme l'équivalent au principe du plus petit nombre est remplacé par la descente (finie) infinie sur les puissances décroissantes d'un polynôme de degré fini

$$F(x)_{\bar{n}} = f_0 x^n + \ldots + f_{n-1} x + f_n.$$

Selon l'idée de Hilbert d'une suite terminale de prédécesseurs pour un n donné, la descente fermatienne autorise un processus de réduction fini à la façon d'un ordre linéaire décroissant de puissances pour un polynôme donné.

4.3 L'élimination des quantificateurs

Une autre ligne d'attaque dans le programme métamathématique de Hilbert a été conduite par Tarski et a mené à la théorie des modèles. L'élimination des quantificateurs a permis à Tarski d'obtenir une solution positive au problème de la décision pour l'algèbre et la géométrie élémentaires [13], dont l'aboutissement est une forme normale disjonctive (disjonction de conjonctions de formules atomiques) proche parente du théorème de Herbrand et du théorème de Hilbert-Ackermann pour les théories ouvertes, c'est-à-dire les théories dont les axiomes non logiques sont des formules sans quantificateurs. Ici se trouve sans doute un terrain de rencontre pour la théorie des démonstrations et la théorie des modèles – cette dernière a depuis évolué de façon indépendante sous la poussée du théorème de compacité. Mais pour arriver à son résultat syntaxique, Tarski a suivi une route similaire à la théorie de l'élimination de Hilbert (ou de Hilbert-Kronecker). Le point de départ est un système de polynômes (voir [13], 31)

$$\alpha \equiv \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \ldots + \alpha_m \xi^n$$

$$\beta \equiv \beta_0 + \beta_1 \xi + \ldots + \beta_n \xi^n$$

$$\gamma \equiv \gamma_{1,0} + \gamma_{1,1} \xi + \ldots + \gamma_{1,n_1} \xi^{n_1}$$

$$\gamma_r \equiv \gamma_{r,0} + \gamma_{r,1} \xi + \ldots + \gamma_{r,n_r} \xi^{n_r}$$

pour lequel est définie une fonction T pour les formules Φ de la forme

$$E_k \xi \quad [\alpha = 0]$$

où $E_k \xi$ signifie « il y a exactement k valeurs de ξ » telles que $T(\Phi)$ est une formule sans quantificateurs équivalente. La procédure d'élimination repose ici sur le théorème de Sturm sur le nombre de racines réelles d'un polynôme entre deux valeurs quelconques $f_0(x)$ et $f_1(x)$ de la variable et se réduit à l'algorithme d'Euclide pour la détermination du plus grand diviseur commun de $f_0(x)$ et $f_1(x)$ dans le décompte des variations de signe pour le polynôme en question (qui est une équation ou une inégalité). Bien que Tarski mentionne Kronecker et nonobstant les remarques de van den Dries quant à la source kroneckerienne de la théorie de l'élimination [14], Tarski ne s'inspire pas directement de la théorie des formes (polynômes homogènes) de Kronecker. L'arithmétique générale des quantités algébriques chez Kronecker est une théorie du contenu des polynômes et Tarski ne va utiliser une notion de contenu que dans sa théorie de l'implication et de la conséquence logique. Dans ce contexte, le théorème de Sturm n'apparaît que comme un cas spécial de la théorie des diviseurs de Kronecker. Si Tarski conclut ([13], 53) que la méthode de la décision équivaut à une preuve de consistance et de complétude (pour les corps réels clos, par exemple), j'ai en vue plutôt l'auto-consistance de l'arithmétique. Mais auparavant, je résume l'idée chez Gödel d'une preuve de consistance interne comme une extension du point de vue finitiste.

4.4 La construction de Gödel

Gödel [8] a fait appel aux fonctionnelles sur tous les types finis en tant qu'objets abstraits distincts des nombres naturels (concrets) et c'est à Hilbert qu'il attribue la notion même de fonctionnelle dans une rare référence au texte hilbertien « Sur l'infini ». Remarquons cependant que Gödel réfère implicitement à la construction de Hilbert dans son texte de 1931 sur la complétude et la consistance (cf. « *Über Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit* », *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums* 3, (1932) : 13) où il suppose une suite transfinie de systèmes formels de types supérieurs, mais il est étonnant que dans sa preuve de consistance de l'arithmétique intuitionniste, i.e. l'interprétation *Dialectica*, Gödel se limite aux types finis jusqu'à ω. L'interprétation *Dialectica* qui est une extension du point de vue finitiste aux yeux de Gödel a fait l'objet de travaux par Spector, Howard et Kreisel dans l'esprit intuitionniste de l'induction barrée et de la récursion barrée. Quoique Gödel ait été animé par des motifs intuitionnistes, sa preuve de consistance pour l'arithmétique de Heyting peut être traduite pour l'arithmétique de Peano en transvidant son contenu tout en voulant éliminer la logique, comme chez Hilbert. Je propose une autre approche du problème de la consistance pour l'arithmétique, celle de Fermat (ou de Fermat-Kronecker) avec la descente infinie de Kronecker qui remplace l'induction de Peano et avec les indéterminées de Kronecker en lieu et place des variables fonctionnelles. L'« arithmétique générale » des polynômes (ou des formes, dans la terminologie kroneckerienne) est construite sur les suites « effinies » ou infiniment processives, dans la terminologie de Brouwer cette fois. Les suites finies sont des ensembles et le produit de convolution ou produit de Cauchy est conçu comme une application (fonction) de suites sur les suites dans *N*, alors que le degré d'un polynôme équivaut au type d'une formule, le motif étant celui d'une interprétation des formules en tant que polynômes. Gödel stipule, dans une phrase qui rappelle Gentzen, que la notion d'accessibilité <*Erreichbarkeit*> est un concept abstrait qui requiert une espèce de réflexion sur les constructions finies. Une telle notion est la notion d'une fonctionnelle computable de type fini sur les entiers que Gödel substitue aux notions abstraites d'assertion et de preuve en mathématiques intuitionnistes. Les formules comme

$$F' = \forall x\, \exists y\, A\,[x, y, z]$$

et

$$G' = \forall w\, \exists v\, B\,[v, w, u]$$

serviront à produire une interprétation consistante de l'arithmétique de Heyting : par exemple, nous avons

$$(F \supset G)' = \forall y, w\, \exists VZ \quad A \quad y, Z\,(y, w), x \quad \supset B \quad V\,(y), w, u$$

et

$$(\neg F)' = \forall y\, \exists \bar{Z} \quad \neg A \quad y, \bar{Z}\,(y), x$$

ou x, y, v, w sont des suites finies de variables de type arbitraire, u est une suite de variables numériques et Y, V, Z, w et $\bar{Z}$ sont des variables du second ordre – A et B sont des formules sans quantificateurs. Ces formules généralisées forment l'interprétation fonctionnelle et les types finis sont définis par les trois clauses :

1. 0 est un type fini (le type des entiers)
2. si s et t sont des types finis, alors $s \times t$ (leur produit cartésien) est un type fini
3. si s et t sont des types finis, alors $s \to t$ est aussi un type fini.

Remarque : la troisième clause signifie que nous avons une application des fonctionnelles de type *s* aux fonctionnelles de type *t*.

Cette dernière transformation soulève des questions d'interprétation et la littérature là-dessus est abondante, mais je veux souligner seulement que cette application est pour moi un produit de convolution pour polynômes. Par l'isomorphisme de Curry-Howard, on peut identifier types et formules, en particulier, un produit de types est identifié à une conjonction de formules. J'étends cet isomorphisme en identifiant l'implication à une représentation par puissances. Les formules se rendent par

$$\exists x Ax \supset \exists y By = \prod \bar{a}_0 x \cdot \prod b_0 x^{\ n}$$

et

$$\forall x Ax \supset \forall y By = \prod_0^n \prod \bar{a}_0 x \cdot \prod b_0 x^{\ n}$$

où $\bar{a}_0$ est $1 - a$ avec les coefficients a et b et les indéterminées x. Mais ici nous avons un isomorphisme entre formules et polynômes qui semble plus naturel si on songe au fait qu'une théorie des types intuitionniste ou constructive (à la Martin-Löf) fondé sur l'isomorphisme admet des objets arbitraires (ou ensembles) dans un langage typifié dont la logique vient d'ailleurs et n'est pas motivée de façon interne. On peut penser aussi bien que l'induction sur tous les types finis a un caractère imprédicatif et ne répond pas aux exigences du finistisme, même « élargi » que propose Gödel dans son interprétation *Dialectica.*

5. CONCLUSION

J'ai voulu montrer qu'il y avait un fil continu du finitisme arithmétique de Kronecker qui va de Hilbert et ses successeurs jusqu'à l'extension du point de vue finitiste qu'a proposée Gödel dans sa preuve de consistance de l'arithmétique intuitionniste avec son interprétation fonctionnelle. J'estime que le programme de la théorie concrète (ou appliquée) des preuves pratiquée entre autres par U. Kohlenbach est dans la même veine puisqu'elle recourt essentiellement aux ressources du théorème de Herbrand et de l'interprétation fonctionnelle de Gödel pour extraire le noyau constructif ou arithmétique des preuves en analyse classique (voir [7]). Kronecker a conçu le projet d'arithmétisation de l'algèbre abstraite – après le projet d'arithmétisation de l'analyse chez Cauchy, Weierstrass et Dedekind – qui a donné le projet d'arithmétisation de la logique de Hilbert à Gödel et qui se poursuit aujourd'hui en informatique théorique. J'ose penser que faire remonter ce fil conducteur de la notion de fonctionnelle polynomiale jusqu'à Kronecker, le premier tisseur de l'arithmétique générale dans les fondements des mathématiques, ne pourra que nous rasséréner dans l'analyse critique de fondements qui ne connaissent pas de crise.

BIBLIOGRAPHIE

1. Gauthier, Y., *De la logique interne*, Paris, Vrin, 1991.
2. Gauthier, Y., « Hilbert and the Internal Logic of Mathematics », *Synthese*, 101 (1994), 1-14.
3. Gauthier, Y., *De la logique interne. Modèles et applications*, Paris/Montréal, Diderot/Modulo, 1997.
4. Gauthier, Y., « The Internal Consistency of Arithmetic with Infinite Descent », *Modern Logic,* vol. 8 (2000), nos 1/2, p. 47-87.
5. Gauthier, Y., *Internal Logic. Foundations of Mathematics from Kronecker to Hilbert*, Dordrecht-Boston-London, Kluwer, « Synthese Library », 2002.
6. Gauthier, Y., *Logique arithmétique. L'arithmétisation de la logique*, collection « Logique de la science », Québec, Presses de l'Université Laval, 2010.
7. Gauthier, Y., « Hilbert Programme and Applied Proof Theory », *Logique et Analyse* 213 (2011), 49-68.
8. Gödel, K., « Über eine noch nicht benütze Erweiterung des finiten Standpunktes », *Dialectica*, 12, (1958), 230-287. Voir aussi Gödel, K., *Collected Works*, vol. II, Oxford University Press, Oxford, 1990, p. 271 et ss.
9. Hilbert, D., « Über das Unendliche », *Math. Ann.*, 95, (1926), 161-190, trad. par André Weil sous le titre « Sur l'infini » dans *Acta Mathematica*, vol 48 (1926), p. 91-122.
10. Hilbert, D. et Bernays, P., *Grundlagen der Mathematik I et II*, 2 Aufl., Berlin : Springer-Verlag, 1968 et 1970.
11. Kronecker, L., « Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen », *Werke*, vol. III, ed. by K. Hensel, 5 vols., Chelsea, New York, 1968, p. 245-387.
12. Kronecker, L., « Zur Theorie der Formen höherer Stufe », *Werke*, vol. II, ed. by K. Hensel, 5 vols., Chelsea, New York, 19658, p. 419-424.

13. Tarski, A., *A decision method for elementary algebra and geometry*, 2e éd. revue, Berkeley et Los Angeles : University of California Press, 1951.
14. Van den Dries, L., « Alfred Tarski's Elimination Theory for Real Closed Fields », *JSL*, vol. 53 (1988), 7-19.

CHAPITRE 9

Commentaire de « Bachelard et Brunschvicg. La logique interne du discours scientifique »

Ce texte est issu d'un colloque « De Brunschvicg à Bachelard » à l'École Normale Supérieure en 2009[1] et a été publié dans la *Revue de synthèse*. Tome 134, série no. 3, 2013, p. 343-353.

J'y insistais sur l'héritage philosophique de Léon Brunschvicg et sur l'influence qu'il a exercée sur la philosophie des mathématiques française et plus généralement sur la philosophie scientifique du XXe siècle en France, comme l'a écrit Bachelard. L'idéalisme immanent selon son expression ou le rationalisme constructif de Brunschvicg a inspiré plusieurs générations de chercheurs et a rayonné jusqu'au Québec, comme je m'en explique dans le texte. Pour moi, j'ai voulu réécrire à 20 ans *Les Étapes de la philosophie mathématique* de 1912 de Brunschvicg, mais mon directeur à la maîtrise de l'époque, le professeur Michel Ambacher, m'en a dissuadé jugeant le projet trop ambitieux pour un aspirant à la maitrise en philosophie. Le manuscrit déjà amorcé a péri dans l'incendie du petit séminaire de St-Hyacinthe où j'enseignais la philosophie en 1962. En tout cas, l'idée d'une logique interne du discours scientifique et en particulier la logique interne des théories mathématiques que j'ai élaborée depuis apparaissait déjà en filigrane dans l'œuvre de Brunschvicg avec un accent marqué pour l'arithmétisme, option philosophique ou fondationnelle qu'il partageait avec Poincaré.

NOTE

1. Je n'ai pu être présent au colloque, mais les responsables m'ont invité à publier mon texte dans la *Revue de Synthèse.*

Bachelard et Brunschvicg. La logique interne du discours scientifique

1. INTRODUCTION

Je tire mon sous-titre d'un passage de l'œuvre majeure de Léon Brunschvicg *Les étapes de la philosophie mathématique* où il évoque « la logique interne » du développement de la pensée scientifique[1] ([5], p. 428). C'est ce thème que je veux développer brièvement dans ce qui suit en tentant de montrer comment il a pu servir de motif aux travaux de Gaston Bachelard en épistémologie et histoire des sciences, en ce qui touche particulièrement les réticences de Bachelard vis-à-vis la logique formelle et l'axiomatisation des savoirs mathématiques et scientifiques.

2. LOGIQUE ET MATHÉMATIQUES

Brunschvicg fait le constat suivant dans *Les Étapes de la philosophie mathématique* de 1912 :

> En définitive, quand se produisent les déductions logistiques, la science positive avec ses seules ressources a déjà livré bataille pour la conquête de la vérité, et l fortune des armes s'est prononcée. La logique symbolique intervient comme l'art poétique après les œuvres spontanées du génie et ne peut que consacrer la victoire ou enregistrer la défaite. Dès lors, c'est sur le terrain de la science positive que doit désormais se placer la philosophie mathématique positive. Elle renonce à l'idéal chimérique de fonder la mathématique en prolongeant au-delà des limites qu'imposent les conditions mêmes de la vérification méthodique, l'appareil des définitions, postulats et démonstrations ; elle se fait immanente à la science avec le dessein de prendre conscience de ce qui s'y est incorporéd'intelligence et de vérité ([5], p. 427).

L'année suivante il publie dans la *Revue de métaphysique et de morale* un long article sur « Henri Poincaré philosophe » [6], dont il était philosophiquement très proche, où il s'étend essentiellement sur le même thème, celui du devenir autonome de la pensée scientifique qui doit rester étranger aux reconstructions logiques ou même philosophiques : la philosophie n'a pas à évaluer le savoir scientifique, elle doit seulement le « réfléchir » au sens littéral du terme et en tirer des leçons sur les puissances et les potentialités de l'esprit humain. Cet humanisme transcendantal, si j'ose dire, s'accompagne de la méfiance à l'égard de toute tentative d'évaluer d'un point de vue critique le savoir et surtout de lui imposer des contraintes externes qui viendraient de quelque façon freiner son élan créateur ou son évolution créatrice, pour reprendre dans un autre sens un thème bergsonien.

De Poincaré, il a non seulement tiré des leçons de science, mais aussi de critique philosophique. Il a certainement fait sien l'adage de Poincaré « La logique n'est pas stérile, elle enfante des monstres » et les réticences du mathématicien non seulement face au logicisme de Russell, mais aussi à la théorie cantorienne des ensembles transfinis qui apparentent Poincaré à l'intuitionnisme de Brouwer, se traduisent chez Brunschvicg par un recours constant à la notion d'intuition comme moteur de la dynamique de l'esprit : c'est là le sens même de l'idéalisme constructif ou immanent de Brunschvicg qu'un Bachelard voudra prolonger en un rationalisme appliqué ou un surrationalisme, selon l'expression empruntée à Husserl.

S'il en a contre le logicisme ou plutôt contre la logique formelle qu'il appelle aussi logistique, c'est que Brunschvicg défend un arithmétisme qu'il fait remonter à Pythagore et aux mathématiques grecques et qu'il suit jusqu'à Descartes et plus loin à l'arithmétisation de l'analyse chez Cauchy et Weierstrass, y incluant Kronecker, quoique chez ce dernier c'est l'arithmétisation de l'algèbre avec l'arithmétique générale des formes ou polynômes homogènes qui est au cœur de l'entreprise – remarquons au passage que Poincaré connaissait bien l'œuvre de Kronecker et reconnaissait son importance, tout en déplorant le peu de philosophie du mathématicien berlinois. C'est sans doute de Poincaré que Brunschvicg tient ses informations sur Kronecker qu'il ne cite guère dans les *Étapes de la philosophie mathématique,* si ce n'est pour rappeler la conception kroneckerienne du nombre entier, mais il cite aussi le disciple français de Kronecker, J. Molk qui a publié un important article sur la théorie kroneckerienne de l'élimination. Poincaré dans *Science et Méthode* de 1908 avait bien compris le programme de Kronecker :

> Ainsi se constituera une sorte d'analyse indéterminée où les inconnues ne seront plus des nombres entiers, mais des polynômes. C'est alors cette fois l'algèbre qui prendra modèle sur l'arithmétique, en se guidant sur l'analogie du nombre entier, soit avec le polynôme entier à coefficients quelconques, soit avec le polynôme entier à coefficients entiers ([15], p. 21).

Il est évidemment question ici de ce que Kronecker appelle l'arithmétique générale « *allgemeine Arithmetik* » ou théorie des formes (polynômes homogènes) qui a constitué l'essentiel de l'entreprise kroneckerienne et s'il ne cite pas expressément Kronecker dans ce contexte, il avait déjà évoqué le nom de Kronecker dans son ouvrage de 1902 *La science et l'hypothèse* [14] où il commente à plusieurs reprises l'œuvre de Kronecker à propos du constructivisme arithmétique. C'est donc la philosophie arithmétique de Kronecker que retiendra Brunschvicg en plus du rejet de la syllogistique et de la logistique fort présent chez Poincaré qu'il transmettra à son élève Bachelard lorsque celui-ci écrit dans sa thèse de doctorat *Essai sur la connaissance approchée* de 1928 :

> Quoi qu'il en soit, on doit trouver des degrés dans la construction mathématique Un donné est posé avec tout un cortège de conditions. Mais, par voie d'opposition, un donné inconnu se présente aussitôt qui déborde ces conditions. Il en résulte vraiment une réification progressive. Ainsi nous verrons que le rationnel en soi, ou l'irrationnel en soi n'ont pas de sens et qu'il ne peut s'agir, par exemple, que d'une rationalité par rapport à des moyens de connaissance nettement spécifiés. Ce que l'on appelle communément le rationnel n'est que le rationnel par rapport au « Corps » des nombres entiers engagés uniquement dans les opérations arithmétiques. Étant donné l'importance de ce Corps, on dit par abréviation : irrationnel tout court pour désigner de qui échappe à ce corps. Pour Kronecker, un donné mathématique devient immédiatement un « domaine de rationalité ». La nature des objets donnés s'efface devant les règles qui les gouvernent. Au fond, le donné n'a pas besoin d'être donné dans ses objets, mais seulement dans sa loi. Cette loi entraine une véritable réification indépendante de la réalité des objets qu'elle réunit. En mathématiques, le genre reçoit, sous ce point de vue, une réalité qui n'appartient pas aux espèces. Toute loi mathématique engendre donc un Corps, c'est à dire un donné qui permet, en suivant des règles spécifiées, des constructions nouvelles, d'où une réification nouvelle correspondant à des donnés successifs. [...] Ce réalisme construit déposera donc toute

> une série de donnés successifs. Les éléments prendront dans ces domaines différents des existences vraiment différentes, et ce sera par abus d'ontologie que nous oublierons les conditions qui ressortissent uniquement à ces domaines pour en faire des propriétés appartenant réellement aux entités. Si l'être mathématique existait en soi, son étude pourrait être faite par une intuition approfondie. Rien ne fait mieux ressortir la relativité de l'existence des êtres mathématiques à leur domaine que le besoin de varier les définitions d'un même défini.
>
> ([1], pp. 187-188).

Cette longue citation est sans doute le passage le plus important de la philosophie mathématique de Bachelard[2]. On ne relèvera pas les incongruités du lexique mathématique de Bachelard, comme l'insistance sur « domaine de rationalité » ou « *Rationalitätsbereich* » qui est en fait la même chose que le corps ou « *Körper* » de Dedekind que Kronecker trouvait trop matérialiste ! On ne reprochera pas non plus à Bachelard les idiosyncrasies de son style philosophique entre genres, espèces et réifications. On voudra retenir surtout l'inspiration du rationalisme ou de l'idéalisme constructif brunschvicgien qui met l'accent sur les constructions de l'esprit mathématique et le réalisme constructif que Bachelard évoque signifie le réel effectif des constructions mathématiques bien fondées.

Peut-être faut-il souligner dans cette perspective la pérennité de la tradition arithmétique en France de Fermat et sa descente infinie, Lagrange, Legendre, Hermite et Poincaré (qui l'appelait récurrence) jusqu'à André Weil qui voyait Kronecker comme le pionnier de la géométrie algébrique ou de la géométrie arithmétique comme on dit maintenant, sans doute la branche la plus active des mathématiques contemporaines avec les programmes respectifs de Grothendieck et de Langlands qui ont tous deux des racines dans le programme de Kronecker ou dans son rêve de jeunesse « *Jugendtraum* », comme le soutient Langlands.

Sur le plan proprement philosophique, l'inspiration idéaliste ou rationaliste de Brunschvicg en philosophie des mathématiques s'est étendue au-delà de Bachelard chez Lautman, Cavaillès jusqu'à Desanti qui signe la préface de l'édition de 1972 des *Étapes.* Pour lui, l'arithmétisme ou le pythagorisme s'opposait à ce qu'il appelait logistique (comme Poincaré) – il emploie même le terme < logisticisme > pour logicisme –, mais c'était un dogme rigide qui n'épousait pas la dialectique interne de la création mathématique, une terminologie qui évoque de nouveau fois la longue lignée des héritiers de

Brunschvicg, Lautman, Cavaillès ou Desanti. C'est donc un arithmétisme souple qui veut suivre de l'intérieur les mouvements de la pensée mathématique pour en épouser les contours et en restituer le contenu intellectuel – Brunschvicg dirait aussi spirituel – le plus fidèlement possible. Bachelard aussi bien a utilisé le terme de dialectique sans la connotation accolée habituellement à la pensée hégélienne : il s'agit ici d'une dialectique des concepts plutôt qu'une dialectique de la conscience, selon l'épistémologie de Cavaillès. L'idéalisme immanent de Brunschvicg ne rejetait pas pour autant le privilège de la conscience : pour lui, le développement de la pensée occidentale correspondait au devenir de la conscience (voir [7]) et on pourrait tracer certaines avenues parallèles avec l'itinéraire de la conscience dans la *Phénoménologie de l'esprit* ; il n'y pas de marche inéluctable vers l'apothéose finale du savoir absolu chez Brunschvicg, mais le progrès de la conscience selon son expression signifiait une dialectique de la « raison souple » qui devait assurer une rationalisation croissante de l'expérience.

3. SCIENCE ET MÉTAPHYSIQUE

C'est bien dans cette direction que l'épistémologie bachelardienne s'acheminera. Pour Brunschvicg, c'est le savoir scientifique qui constitue la véritable voie de la raison en écartant les dogmes de la métaphysique. Pour Bachelard, la métaphysique doit se « réifier » et passer d'un réalisme des substances à une ontologie constructive des choses ou des objets qu'il annonce dans sa thèse de doctorat de 1928 *Essai sur la connaissance approchée*

> Cette ontologie constructive n'est jamais à son terme puisqu'elle correspond plutôt à une action qu'à une trouvaille. L'objet est-il un instant assimilé et en quelque sorte rationalisé, effacé en tant qu'obstacle, réduit par l'analyse à sa véritable nature de notion ? Le même processus constructif le mettra en rapport avec un irrationnel nouveau. La généralisation en mathématiques tend à absorber les domaines qui bordent le domaine primitif. À notre point de vue, ce n'est pas le monde qui vivrait d'oppositions et de réconciliations successives, mais l'esprit lui-même dans sa tâche épistémologique ou créatrice. À tous les niveaux de la connaissance, l'opposition ferait correspondre un objet, la réincorporation de cet objet dans le compris se ferait par des méthodes élargies qui tomberaient à leur tour en défaut, du fait d'une nouvelle opposition. Et ainsi de suite. Nous aurons de nombreuses occasions de reconnaître cette marche saccadée de la connaissance. Mais dès maintenant elle doit

> nous expliquer le caractère progressif de l'existence métaphorique que nous avons attribuée à l'être mathématique. Si, à côté d'une logique déductive, on établissait une logique constructive qui procédât par opposition, on pourrait rendre compte, en termes de logique élargie, de la tendance ontologique qui entraine la connaissance dans tous ses domaines. Cette ontologie progressive ne serait en effet que le signe d'une opposition provisoire.
>
> ([1]pp. 185-186).

Une ontologie constructive va de pair avec une logique constructive et un « langage créé au fur et à mesure des découvertes de la sciences », comme il le déclare dans *L'activité rationaliste de la physique contemporaine* ([2], p. 7). Brunschvicg s'était employé dans son ouvrage *L'expérience humaine et la causalité physique* [8] à octroyer un statut scientifique à la notion de causalité en l'extrayant de ses couches métaphysiques et anthropomorphiques et dans son ouvrage Bachelard ne fera que reprendre cette idée maîtresse en montrant que les concepts de la physique contemporaine ont un contenu objectif lié à une logique interne propre. Mais il faut bien reconnaître que ce que Bachelard entendait par logique constructive en 1940 recouvre essentiellement des logiques non aristotéliciennes (chap. V de *La philosophie du non* [3]) aussi diverses que la logique trivalente de Lukasiewicz ou la logique probabilitaire de Reichenbach. Il y a ici très peu de la logique mathématique depuis Hilbert à Gödel ou de l'intuitionnisme de Brouwer et Heyting au profit des travaux de Korzybski, Reiser ou Paulette Février, mais on ne fera pas le procès de l'épistémologie historique de Bachelard, qui tout comme celle de Brunschvicg, n'est pas un entreprise de philosophie critique de la science, mais plutôt une analyse de la logique interne de son évolution, comme le proclame Brunschvicg dans *Les étapes de la philosophie mathématique* et logique interne signifie aussi bien dialectique interne dans l'esprit de Brunschvicg et Bachelard.

Bachelard s'est expliqué davantage sur sa notion de dialectique que ne l'a fait Brunschvicg qui dans sa thèse de 1897 *La modalité du jugement* [9]évoquait la dialectique de l'intériorité et de l'extériorité ou de la raison et de l'expérience – et plus tard la dialectique de l'expérience et de la vérification –. Un descendant de Brunschvicg, Jean Cavaillès, fera remonter la dialectique au sens de Brunschvicg à Spinoza dans son classique *Sur la logique et la théorie de la science* :

> Il faut soit l'absolu d'intelligibilité qui légitime la superposition spinoziste de l'idée, soit la référence à une conscience génératrice dont c'est la propriété de se saisir immédiatement dans ses actes authentiques.
>
> ([10], p. 143)

Rappelons que Cavaillès a cependant privilégié une dialectique du concept plutôt qu'une dialectique de la conscience, ce qui l'a éloigné de Husserl – comme il dit, il voulait se définir en fonction de Husserl, un peu contre lui – pour le rapprocher de l'inspiration de Bachelard. Un Desanti consommera peut-être la rupture avec Husserl et la phénoménologie transcendantale en proposant une description immanente des idéalités mathématiques où le concept se détache progressivement de la conscience égologique pour poursuivre sa course dans les médiations d'un développement autonome. Bachelard ne se sentirait pas seul dans ce paysage, lui qui a voulu préciser sa conception de la dialectique dans une *Philosophie du non* :

> La négation doit rester en contact avec la formation première. Elle doit permettre une *généralisation dialectique*. La généralisation par le non doit inclure ce qu'elle nie. En fait, tout l'essor de la pensée scientifique depuis un siècle provient de telles généralisations dialectiques avec enveloppement de ce qu'on nie.
>
> ([3]p. 137)

Si la dialectique au sens de Brunschvicg avait une connotation kantienne avec son accent sur l'opposition des concepts comme dans la dialectique transcendantale de la *Critique de la raison pure*, les formules de Bachelard ont une tonalité hégélienne. Bien que Hegel soit peu cité par Brunschvicg ou Bachelard, d'autres épistémologues et historiens des sciences comme Koyré ou Lakatos se sont inspirés librement de Hegel dans leurs analyses dialectiques. Ici le langage même de Bachelard invite à un retour sur la dialectique hégélienne de la *Aufhebung* que j'ai rendue par le terme de sursomption comme antonyme de la subsomption kantienne. La subsomption kantienne signifiait essentiellement la mise sous tutelle du particulier sous le général, alors que la sursomption signifie la généralisation du particulier ou du singulier. La médiation dialectique s'opère chez Hegel par la double négation (*doppelte Negation*) qui va de la première assertion, Bachelard dit formation, à une nouvelle assertion qui n'est pas, en vertu de la sursomption qui nie et conserve à la fois, un retour à la première formation mais l'avènement ou le surgissement d'une nouvelle formation. On peut formaliser ce mouvement dialectique dans la formule

$$\neg\neg\, a \rightarrow b > a$$

plutôt que la double négation booléenne

$$\neg\neg\, a \leftrightarrow a$$

qui retourne à la formation première sans progrès dialectique, pourrait-on dire. Il s'agit ici en réalité du procès du devenir – Brouwer le mathématicien intuitionniste disait un procès en devenir «*ein Prozess im Werden*» –. À mon avis, c'est dans cette perspective qu'il faut interpréter les indications de Bachelard sur la dialectique interne du progrès de la conscience scientifique, si l'on nous permet cette fusion des concepts brunschvicgiens et bachelardiens. Il n'est pas interdit de penser dans ce contexte un renversement de la dialectique hégélienne de l'idéalisme absolu en dialectique immanente du matérialisme historique comme l'avait déjà imaginé Marx et que l'on pourrait traduire en dialectique interne du savoir scientifique comme l'ont conçu Brunschvicg et Bachelard[3].

4. CONCLUSION

Bachelard a une formule lapidaire au début de *La formation de l'esprit scientifique* <Rien n'est donné. Tout est construit> [4]. Ce constructivisme s'accorde avec la thèse du <mythe du donné>, selon l'expression de Wilfrid Sellars, qui a fait fortune en épistémologie et en philosophie des sciences contemporaines dans la version de la prégnance théorique <*theory-ladenness*> des données expérimentales. Une autre formule de Bachelard <les instruments scientifiques sont des théories matérialisées> pourrait aussi servir de mot d'ordre pour une philosophie de la technologie (ce qu'il appelait *phénoméno-technique*).

L'épistémologie historique de Bachelard des obstacles et des ruptures n'est pas non plus irréconciliable avec le programme kuhnien d'une histoire discontinue du savoir scientifique, mais le projet d'un rationalisme critique avec le rejet des thèses métaphysiques est à mettre au compte d'un héritage brunschvicgien. En effet, l'idéalisme constructif ou immanent de Brunschvicg a pour objectif principal l'analyse du devenir de la rationalité dans le développement de la pensée scientifique. C'est là le motif recteur d'une logique interne du discours scientifique qui a animé Brunschvicg et la longue lignée de ses successeurs, Bachelard le premier.

NOTES.

1. L'ouvrage de Brunschvicg *Les étapes de la philosophie mathématique* a été publié il y a un siècle en 1912. Un demi-siècle plus tard en 1962, je déposais un mémoire de maîtrise sur *Le devenir de la conscience chez Brunschvicg* au département de philosophie de l'Université de Montréal sous la direction de Michel Ambacher, élève de René Poirier et un héritier de la lignée Brunschvicg. Voilà pour la justification historique de mon intervention d'aujourd'hui.

2. Je dois cette référence de Bachelard à propos de Kronecker à Jean Leroux, excellent connaisseur de l'œuvre de Bachelard. Sur Kronecker, je renvoie à mes travaux, en particulier *Internal Logic. Foundations of Mathematics From Kronecker to Hilbert* [11] et *Logique arithmétique. L'arithmétisation de la logique* [12].

3. Pour Hegel, on pourra consulter mon ouvrage *Hegel. Introduction à une lecture critique* [13] où je rebaptise la logique dialectique en syllogistique dynamique pour montrer qu'elle peut constituer une logique dynamique du progrès du savoir, ce qui n'est pas étranger à l 'idée bachelardienne d'une <dialectique souple> des concepts et des théories scientifiques.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. Bachelard, G. *Essai sur la connaissance approchée*, Paris, Vrin, 1940.
2. Bachelard, G. *L'activité rationaliste de la physique contemporaine*, Paris, PUF, 1951
3. Bachelard, G. *La philosophie du non. Essai d'une philosophie du nouvel esprit scientifique*, Paris, PUF, 1940.
4. Bachelard, G. *La formation de l'esprit scientifique*, Paris, Vrin, 1971.
5. Brunschvicg, L. *Les étapes de la philosophie mathématique*, nouveau tirage augmenté d'une préface de J.T. Desanti, Paris, Blanchard, 1972.
6. Brunschvicg, L. L'œuvre d'Henri Poincaré : le philosophe *Revue de métaphysique et de morale*, no. 5, 1913, pp. 585-613.
7. Brunschvicg, L. *Le progrès de la conscience dans la philosophie occidentale*, Paris, Alcan, 1927.
8. Brunschvicg, L. *L'expérience humaine et la causalité physique*, Paris, Alcan, 1922.
9. Brunschvicg, L. *La modalité du jugement*, Paris, Alcan, 1897.
10. Cavaillès, J. *Sur la logique et la théorie de la science*, Paris, PUF, 1947.
11. Gauthier, Y. *Internal Logic. Foundations of Mathematics from Kronecker to Hilbert*, Kluwer, Dordrecht/ Boston/New York, 2002.
12. Gauthier, Y. *Logique arithmétique. L'arithmétisation de la logique*, Québec, PUL, 2010.

13. Gauthier, Y. *Hegel. Introduction à une lecture critique*, Québec, PUL, 2010.
14. Poincaré, H. *La science et l'hypothèse*, Paris, Flammarion, 1902.
15. Poincaré, H. *Science et méthode*, Paris, Flammarion, 1908.

CHAPITRE 10

Commentaire de « Logique du contenu philosophique chez Kant, Hegel et Husserl »

Ce texte est tiré du chapitre 6 de mon ouvrage *Logique du contenu. Sur la logique interne* (Paris, L'Harmattan, 2004). Il consiste dans l'analyse des notions d'infini et d'indéterminé chez Kant et et Hegel en plus de l'évaluation du contenu logique et mathématique des travaux de Husserl dans la gestation de ses *Recherches Logiques*. Pour Kant, on sait qu'il y a une transformation profonde de sa conception de l'infini, de son ouvrage de 1755 *Histoire générale de la nature et théorie du ciel* à la *Critique de la raison pure*. La nature (l'univers physique) n'a plus l'attribut de création divine de l'infinité spatiale, mais a plutôt une extension indéfinie ou indéterminée « *unbestimmte Weite* ».

Chez Hegel, l'infini vrai est qualitatif, c'est celui du rapport dynamique des quantités entre elles, et s'oppose à la mauvaise infinité itérative du calcul des quantités infinitésimales. Cette idée de mathématiques qualitatives (dialectiques ?) n'est pas si éloignée des mathématiques conceptuelles contemporaines comme la théorie des catégories selon le témoignage d'un mathématicien pionnier dans ce domaine, William Lawvere.

Enfin, le contenu proprement logique et mathématique se révèle assez mince chez le mathématicien devenu phénoménologue Husserl, qui a sans doute retenu de son étude du calcul des variations en mathématiques classiques sa propre théorie des variations eidétiques (avec réduction eidétique sur l'idée d'essence invariable) dans sa phénoménologie descriptive. Pour le reste, les influences diverses que Husserl a subies de Kronecker et Weierstrass à Cantor et Hilbert ne parviennent pas à définir une image nette d'une logique formelle distincte d'une logique transcendantale, thème qu'il a emprunté à Kant dans un programme phénoménologique étranger à Kant qu'il a peut-être rejoint à la fin dans l'idéalisme transcendantal de l'*Opus postumum*.

Logique du contenu philosophique chez Kant, Hegel et Husserl

A. INFINI ET INDÉTERMINÉ CHEZ KANT ET HEGEL

1. INTRODUCTION

La réception hégélienne de la *Critique de la raison pure* est multiforme, mais l'un des moments les plus forts de la réaction de Hegel à la lecture de Kant est certainement sa critique de la notion d'infini telle qu'elle est formulée dans la solution kantienne de la première antinomie de la raison pure. La question de l'infinité spatio-temporelle est centrale pour Kant depuis la doctrine de la théorie du ciel «*Theorie des Himmels*» de 1755 jusqu'à la révolution copernicienne qu'il opère dans la *Critique.* Dans un élan spinoziste, Kant voyait l'infinité et l'éternité du monde comme une suite logique de la création divine : «De la création dans l'étendue totale de son infinité spatiale autant que temporelle» ([19], chap. VII). La *Crp* retournera singulièrement ce point de vue à la manière de Copernic qui s'était risqué, d'une manière non-expérimentale <*widersinnische*> et pourtant vraie, nous dit Kant, à chercher les lois des mouvements observés non dans les corps célestes, mais dans celui qui les observe, puisque rien dans la connaissance a priori ne peut être attribué aux objets que ce que le sujet pensant trouve en lui-même (B XXIII) [20]. Or, et c'est la leçon de la première antinomie, le sujet pensant ne peut trouver en lui-même l'infini actuel, seulement l'infini potentiel, indéfini, indéterminé. Descartes, qui a aussi pensé l'indéfini extensif, n'avait pas trouvé l'infini actuel dans le sujet pensant, seulement son idée qui le faisait remonter à Dieu, auteur infini de l'idée d'infini.

2. LA RÉGRESSION À L'INDÉFINI

L'antithèse d'un monde infini n'est pas plus défendable que la thèse d'un monde fini, c'est ce que révèle l'analyse de la première antinomie (B 454 et ss.). La définition de l'infini qu'y donne Kant correspond à celle d'Aristote dans sa *Physique :* l'infini est intraversable « *adiexitêtos* » (203 b), il ne peut être qu'en puissance <*dunamei*> et non en acte <*énergeia*>. Euclide ne dira pas autre chose quand il démontrera dans ses *Éléments* l'infinité des nombres premiers : « Les nombres premiers sont plus nombreux que toute quantité définie (ou finie) de nombres premiers » (Proposition 20 du Livre IX). Le concept mathématique de l'infini pour Kant est celui d'une grandeur inexhaustible et s'il ne cite ni Aristote, ni Euclide, il opte résolument pour la régression à l'indéfini « *regressus in indefinitum* » (B 546) dans sa dissolution de la première idée cosmologique. Le monde n'est ni fini, ni infini, car nous n'avons jamais d'infini déterminé <*bestimmtes Unendliches*>, pas plus qu'un fini déterminé dans la régression indéfinie de la série des conditions et des conditionnés. Cette régression dans l'indéfini n'est pas non plus une régression à l'infini qui supposerait que l'infini est donné comme la somme d'une série infinie, mais elle s'évanouit en quelque sorte dans une extension indéterminée « *unbestimmte Weite* » (B 551). En d'autres termes, le monde, fini ou infini, n'est pas donné dans l'intuition, mais dans un concept qui n'est qu'une idée transcendantale, c'est-à-dire le complément inventé de l'expérience, la projection transempirique d'un donné qui n'est en réalité que la construction d'une idée-limite n'ayant qu'une portée épistémologique et jamais ontologique. Hegel, dès *La logique d'Iéna* voudra à son tour renverser cette perspective et faire de l'idée d'infinité vraie <*die wahre Unendlichkeit*> le motif recteur de son idéalisme absolu.

3. L'INFINI VÉRITABLE ET LA MAUVAISE INFINITÉ

On sait que Hegel a très tôt caractérisé le mauvais infini <*die schlechte Unendlichkeit*> qui n'est qu'une négation de déterminités <*Bestimmtheiten*> sans jamais saisir le sens de la détermination <*Bestimmung*>, procès dynamique de la négation de la négation, double négation qui est une affirmation, la relation simple où la déterminité se sursume $a - A =$ ([11], p. 30) et non plus la série qui se déporte dans un autre sans fin. L'infinité est alors processive, elle est activité, la sursomption des contraires dans le mouvement dialectique du rapport à soi ou de la relation interne du concept avec ses déterminations. Cette doctrine de la logique d'Iéna est reprise intégralement dans *La Science de la logique* et Hegel en fera même le point d'ancrage de l'infini itératif des mathématiques classiques. Je ne reviendrai pas sur cette critique, dont j'ai montré jadis qu'elle était fondée sur des connaissances solides des mathématiques contemporaines, mais je veux plutôt l'appliquer à la critique chez Hegel de la solution kantienne à la première antinomie.

Hegel caractérise ici l'infini comme progrès à l'infini et progrès infini quantitatif; c'est sous cette forme qu'apparaît le mauvais infini ([9], p. 231 et ss.). Hegel va consacrer une longue remarque à l'antinomie kantienne un peu plus loin ([9], pp. 231-236). La solution kantienne de l'antinomie n'en est pas une, nous dit Hegel, parce qu'elle présuppose des concepts qui sont partie prenante dans le problème et dans la solution. Par exemple, le concept d'éternité n'a le sens que d'un mauvais infini temporel et sa limite ne serait qu'un point temporel inscrit dans la série chronologique. De même l'infini spatial, dans la conception kantienne, présuppose un espace dans lequel il viendrait s'engouffrer et ici encore l'argument est circulaire selon Hegel. Si la solution transcendantale de l'antinomie réside dans l'idéalité du temps et de l'espace comme formes a priori de la sensibilité, il n'en reste pas moins, toujours selon Hegel, qu'elle est insuffisante, puisqu'elle ne rend pas compte de la dialectique interne de l'esprit seul apte à sursumer les antagonismes qu'il porte en son sein même.

Hegel revient à Kant et à la première antinomie dans une très longue remarque sur « La déterminité conceptuelle de l'infini mathématique » ([9], p. 239 et ss.). En fait, cette remarque est suivie de deux autres et totalisent à elles trois une centaine de pages sur la philosophie de l'infini mathématique ([9], pp. 239-322). Je m'en tiendrai pour l'essentiel à la critique de l'infini régressif, critique qui porte d'abord sur la conception kantienne de l'infini mathématique.

4. L'INFINI MATHÉMATIQUE

C'est justement sur cette question de l'infini mathématique que l'on peut mesurer la pertinence des idées de Kant et de Hegel à propos de l'infini. Je l'ai dit plus haut, l'infini véritable pour Hegel est le procès de la négation de la négation. Il faut comprendre la première négation dans son sens spinoziste <*Omnis determinatio est negatio*> et la deuxième négation <*negatio duplex*> comme la sursomption affirmative de la déterminité ou d'une détermination donnée. C'est là-dessus précisément que Hegel reprend Kant ([9], pp. 242-243). L'erreur de Kant a été de concevoir seulement l'infini quantitatif. Quant à l'infini qualitatif, il n'est pas pour Hegel dans la série ou dans la somme des grandeurs, mais dans leur rapport. Peut-être Leibniz avait-il vu juste quand il disait que ce ne sont pas les séries infinies qui comptent, puisque l'infini en mathématiques n'est qu'une « fiction utile », mais le rapport entre ces infinis qui, lui, est fini, comme dans le calcul différentiel auquel Hegel consacre une autre longue remarque ([9], p. 278 et ss.). Il suffit d'une demi-heure peut-être pour comprendre les enjeux théoriques du calcul différentiel si l'on saisit bien le sens de l'expansion binomiale $dx^n = nx^{n-1}\, dx$. C'est le rapport qui est qualitatif et pour Hegel, c'est là que se trouve le véritable infini. Il y aurait beaucoup à dire sur cette conception qualitative de l'infini mathématique, mais je me contenterai de dire qu'elle a trouvé écho chez un important mathématicien de l'époque, Hermann Grassmann qui a emprunté non seulement les idées, mais le style de Hegel dans sa doctrine de l'extension <*Ausdehnungslehre*>. Aujourd'hui un mathématicien original en théorie des catégories comme William Lawvere soutient des vues dialectiques apparentées en fondements des mathématiques. Mais ce n'est pas là mon propos.

Le reproche précis que Hegel adresse à Kant concerne la variabilité d'un quantum ou d'un ensemble et la conséquence à laquelle Kant ne peut échapper est de quantifier l'infini en infini plus petit et en infini plus grand. On ne verra pas dans ce passage une critique par anticipation de la théorie cantorienne des ordinaux transfinis, mais plutôt chez Hegel le rejet de l'autonomie du quantitatif. Que la quantité doive se sursumer en qualité et que ce soit seulement dans le concept de mesure que quantité et qualité sont réunifiées ne nous étonnera pas si l'on pense que la synthèse est opérée par la dynamique interne du concept dans la dialectique concrète du mesureur et du mesuré. Hegel n'a pas pensé cette dialectique dans les termes d'un constructivisme mathématique, mais dans le style spéculatif d'une métaphysique idéaliste qui fait du concept lui-même le créateur infini de la mesure. Ce que Hegel n'a pas vu et qui n'avait pas échappé à Kant, c'est que la mesure n'est pas une manifestation de l'être, mais le fait d'un constructeur fini pour qui l'infini n'est pas un donné, mais une tâche <*Aufgabe*>.

5. CONCLUSION

L'indéterminé pour Hegel, c'est l'immédiateté indéterminée du début de *La Science de la logique* <*die unbestimmte Unmittelbarkeit*>, d'où vont surgir l'être et le néant, sorte de *tohu wa bohu* de l'indifférenciation originelle, antérieure à toute détermination. Ce vide primordial va générer le processus des définitions de l'Absolu ou des déterminations du Concept dans l'exposition de Dieu comme il est dans son essence éternelle avant la création de la nature et d'un esprit fini ([9], p. 31). C'est là le contenu de la logique ou onto-logique et on ne voudra pas priver Hegel de cette surenchère métaphysique. On peut se demander cependant lequel des concepts d'indéterminé, celui de Hegel ou celui de Kant, est le plus adéquat quand il s'agit d'évaluer la pertinence épistémologique d'une conception de l'infini.

D'un point de vue constructiviste, que l'on associe aussi à l'anti-réalisme contemporain mais qui a d'abord une connotation logique et mathématique dans le sens où je l'entends (voir [6]), du point de vue constructiviste donc, la solution kantienne au problème de l'infini qui devient une extension indéterminée <*unbestimmte Weite*> correspond à la notion d'infini potentiel que l'on retrouve dans la tradition mathématique. Gauss, un contemporain de Kant, dira «*Das Unendliche ist nur eine*, *"Façon de parler"*», pour parler de l'infini actuel. L'infini quantitatif progressif, c'est ce que Hegel récuse sous le vocable de mauvais infini et l'infini qu'il promeut s'identifie au procès dynamique du concept. Détaché de sa gangue ou de sa gaine métaphysique, la logique hégélienne, qui est en réalité une dynamisation de la syllogistique aristotélicienne, pourrait devenir un instrument logique utile, comparable aux logiques non monotones, logiques par défaut ou logiques paraconsistantes, dans le traitement formel du raisonnement en philosophie, en langage ordinaire ou en intelligence artificielle. En particulier, il faudrait étudier le statut de la double négation hégélienne et voir comment elle se rapproche de la double négation au sens de l'intuitionnisme mathématique d'un Brouwer qui refusait de l'admettre quand il était question d'ensembles ou plutôt de suites infinies ou infiniment processives. L'idée d'une dynamique de la négation ou du travail du négatif <*die Arbeit des Negativen*> qui n'est autre que la patience du concept dans une terminologie hégélienne pourrait trouver une légitimité nouvelle dans une direction que n'avait certainement pas prévue Hegel, l'intelligence artificielle, une expression qui a toutes les apparences d'un anti-hégélianisme primaire.

Il n'est pas question par ailleurs de faire revivre une philosophie de la nature dans l'esprit de la dialectique hégélienne, comme le voudrait courageusement un Alain Lacroix par exemple (voir [23]). Pour moi, cette avenue est définitivement fermée, quoique certaines intuitions de Hegel puissent encore être mises à profit, mais malgré ses limites, la reconstruction transcendantale (à la Kant) de la mécanique quantique entreprise depuis quelque temps en France m'apparaît plus féconde, si ce n'est plus novatrice. Il ne faut pas perdre de vue à la fin que, si Kant a renoncé dans sa conversion critique à la naïveté philosophique de la *Théorie du ciel*, il est revenu à des conceptions plus métaphysiques dans les *Premiers principes métaphysiques de la science de la nature* de 1786 et surtout dans les esquisses du passage de la métaphysique à la physique de l'*Opus Postumum* où l'illusion transcendantale d'un monde en soi se transforme en l'idéalisme transcendantal du monde en moi. Cette transition en prépare une autre où l'Absolu en soi devient pour soi pour aboutir dans l'en-soi pour-soi <*An-sich für-sich*> de l'idéalisme absolu de Hegel. La dérive métaphysique ne doit cependant pas obnubiler les bénéfices que le savoir actuel, qu'il soit scientifique ou philosophique, peut tirer des analyses conceptuelles d'un Kant ou d'un Hegel.

B. LOGIQUE ET MATHÉMATIQUES DANS LA GENÈSE DES *RECHERCHES LOGIQUES* DE HUSSERL

1. INTRODUCTION

La question des fondements de la logique a été une préoccupation constante chez le Husserl des premiers écrits, surtout des *Logische Untersuchungen* jusqu'à *Formale und transzendentale Logik* et même jusqu'à la *Krisis*. La logique comme science théorique et pratique ou discipline <*Kunstlehre*> constitue une thématique centrale dans l'entreprise phénoménologique, mais je ne veux pas ici en explorer toutes les ramifications, *e.g.* le rejet du psychologisme ou la fondation transcendantale de la logique. Je veux m'attacher plutôt à la théorie des multiplicités qui, dès le départ, a constitué pour Husserl le motif d'une théorie générale des systèmes déductifs sur le modèle de la théorie mathématique de la <*Mannigfaltigkeitslehre*> ou théorie des multiplicités.

C'est seulement dans le dernier chapitre (chap. XI) des *Prolegomena* [13] qu'est abordée la question ou l'idée de la logique pure, la suite des *Recherches Logiques* étant consacrée exclusivement aux analyses proprement phénoménologiques et épistémologiques ou sémiologiques alors que les *Prolégomènes à la logique pure* s'occupent essentiellement de la critique du psychologisme. On peut se demander ce qui a motivé Husserl dans la problématique d'une logique pure. La réponse simple est qu'il veut distinguer nettement la logique pure, en tant que domaine autonome, de la logique psychologique <*psychologische Logik*>. La logique pure pour Husserl comprend la mathématique pure ou la <*mathesis universalis*> qu'il identifiera aussi à la théorie des multiplicités. Bien qu'il ait discuté dans ses travaux antérieurs aux *Recherches logiques* des questions générales de logique, de l'algèbre de la logique de Schröder à la logique transcendentale du néo-kantien Natorp, ou encore de la distinction entre une logique formelle et une logique des contenus idéaux <*Inhaltslogik*>, ou logique interne des concepts, Husserl semble plus préoccupé par la définition de la logique que par la construction effective d'une logique générale ou d'un système logique. Il n'a pas les préoccupations logico-philosophiques d'un Frege ou les intérêts logico-mathématiques d'un Hilbert, mais la question fondationnelle se résume pour lui aux conditions de possibilité de la théorie ou du théorétique en général, c'est-à-dire de la théorie de toutes les théories possibles. C'est un problème que j'ai déjà abordé jadis [8] et que je reprends à nouveaux frais.

2. MULTIPLICITÉS

Husserl attribue à Riemann et Grassmann la paternité de la notion de multiplicité ([16], 252). Il ajoute les noms de Lie, Hamilton et Cantor, mais c'est la théorie des variétés ou espaces n-dimensionnels de Riemann et la théorie de l'extension <*Ausdehnungslehre*> de Grassmann qui sont à l'origine du concept et c'est aussi dans ce sens que Husserl voudra contribuer à la théorie proprement mathématique des multiplicités en introduisant dans [17] les notions géométriques de multiplicités pléthoïdes, orthoïdes et cycliques. Je me contenterai de dire que les multiplicités pléthoïdes sont des multiplicités où la notion d'ordre n'est pas définie, alors que les multiplicités orthoïdes sont des multiplicités où un ordre linéaire est défini et les multiplicités cycliques, quant à elles, possèdent un ordre cyclique. Mais ce ne sont pas ces essais fragmentaires qui peuvent nous intéresser dans les premiers travaux théoriques, mais plutôt le contexte de ces recherches philosophico-mathématiques où apparaît pour la première fois le thème de la théorie des multiplicités. Passons sous silence la thèse de doctorat sur le calcul des variations, en fait sur la seconde variation

$$\delta^2 I = d^2 / d\varepsilon^2 \int_a^b f \quad x, y + \varepsilon\phi, y' + \varepsilon\phi' \quad dx \quad \varepsilon = 0$$

des valeurs (maximum et minimum) d'une intégrale définie. Ce travail n'a qu'une valeur scolaire et sa seule pertinence philosophique est peut-être repérable dans la théorie des variations eidétiques que Husserl développera plus tard. De même, *Die Philosophie der Arithmetik* [12] ne nous est guère utile en ce qui touche la théorie des multiplicités. Le deuxième tome de *Philosophie der Arithmetik* eût sans doute été plus utile, s'il avait été complété.

Husserl qualifie lui-même sa *Philosophie der Arithmetik* de <*naïv*>. Même s'il tente une caractérisation de la multiplicité ([12], 493 et ss.), il ne parvient à aucun résultat concret, si ce n'est celui d'un calcul d'opérations qui caractérise aussi pour lui l'arithmétique générale. La-dessus il reprend l'expression de Kronecker <*Buchstabenrechnung*>, calcul de l'alphabet, sans le citer et il semble préoccupé dans sa conférence de Göttingen de 1901 ([12], 430 et ss.) par les idées de Hilbert sans vraiment s'en rapprocher. Au total, la *Philosophie der Arithmetik* de 1891 n'est qu'une esquisse maladroite d'une philosophie du calcul, mais les ébauches que nous avons sur « *Versuche zur Philosophie des Kalküls* » dans [17] nous serviront plutôt de point de départ. C'est dans ces textes que Husserl cite le plus souvent Kronecker en relation avec l'arithmétique générale, c'est-à-dire la théorie arithmétique des extensions algébriques du concept de nombre entier ou encore la théorie des formes ou des polynômes homogènes. On sait qu'il a suivi le cours de Kronecker (et ceux de Weierstrass) à Berlin dans les années 1878-1881, mais il ne citera des oeuvres écrites de Kronecker que le texte « *Ueber den Zahlbegriff* » (1887) et jamais le texte capital « *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen* » de 1882 [22]. Dans ses notes sténographiques, il écrit « *Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Gleichungen* von Ludwig (sic) Kronecker » (d'après Lothar Eley [12] XXII).

Bien qu'il aborde la problématique de l'arithmétique générale dans sa *Philosophie der Arithmetik* ([12], chap. XIII), c'est dans un manuscrit sur les théories vraies « *Die Wahren Theorien* » ([17], 40-41) datant de 1889-1890 qu'il dit que Kronecker a unifié la théorie des nombres et l'algèbre dans une arithmétique générale qui constitue une réussite incontestable. Cette <*arithmetica unversalis*> comme l'appelle Husserl est la même chose que la <*mathesis universalis*> qu'il voudra identifier à une logique pure ou théorie des systèmes déductifs, *i.e.* la théorie des multiplicités. Mon hypothèse est que c'est là une des sources de la conception husserlienne de la théorie des multiplicités, l'autre source étant la théorie géométrique de Riemann, la théorie des variétés n-dimensionnelles <*n-fach Mannigfaltigkeiten*>, qui, à vrai dire, ne joue pas un rôle aussi déterminant dans le projet husserlien ; il s'agit en fait du problème de l'extension des lois d'un domaine à un autre, ce que H. Hankel a appelé dans sa *Theorie der komplexen Zahlensysteme* (1867) le principe de la permanence des lois formelles, <*Prinzip der Permanenz der formalen Gesetze*>. Ce principe était au coeur des préoccupations de Husserl, comme il l'avoue dans *Formale und transzendentale Logik* ([16], 101). Kronecker parlera plutôt de conservation des déterminations conceptuelles <*Begriffsbestimmungen*> et je veux exposer brièvement la problématique kroneckerienne. J'emprunte ici à mon ouvrage [8].

La théorie des formes, la <*Formenlehre*> de Grassmann à Hankel, est le nom qui désigne l'objet mathématique en général ; l'appellation a une signification plus précise en théorie des nombres de Lagrange et Legendre à Gauss et Kronecker : il s'agit de polynômes homogènes et on peut parler de formes quadratiques comme

$$ax^2 + bxy + cy^2$$

qui sont homogènes, *i.e.* dont les variables x et y ont le même degré (exposant) et qui ont des coefficients entiers, a, b, c jouant le rôle de constantes. C'est la théorie générale des formes ou des polynômes et de leur divisibilité qui est l'objet du texte majeur sur les fondements d'une théorie arithmétique des grandeurs algébriques, mais c'est l'introduction d'une notion généralisée d'indéterminée <*Unbestimmte*> qui sera la caractéristique principale de cette arithmétique générale <*allgemeine Arithmetik*> des fonctions entières à coefficients entiers, comme il est dit à la fin de [22]. L'expression polynomiale

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

avec les coefficients entiers a et les indéterminées x a le sens d'un support fini (en vertu du degré n) d'une série de puissances infinie et formelle, *i.e.* sans considération de convergence de la série. Les indéterminées ici ont une fonction plus générale qu'une variable fonctionnelle, puisqu'on peut leur substituer des valeurs indéfinies (infinies ou transcendantes comme chez Steinitz). Le dessein constructiviste de Kronecker aura consisté à montrer jusqu'où on peut aller en arithmétique. Le même projet se retrouve chez Frege dans son *Begriffsschrift* quand il demande « *Wie weit man in der Arithmetik durch Schlüsse allein gelangen könnte* », mais on sait que la voie logique l'obligera à s'arrêter court, *i.e.* avant d'accéder à l'arithmétique générale. Le programme de Kronecker, qu'il a réalisé en grande partie, contient le corps des fonctions rationnelles à coefficients entiers avec ses extensions algébriques ; une théorie générale de l'*élimination* va opérer la décomposition polynomiale des fonctions entières en facteurs irréductibles et la théorie algorithmique des diviseurs (ou divisibilité des multiplicités polynomiales) fournit une telle décomposition pour l'anneau des entiers et le corps des formes algébriques dans les systèmes modulaires, *i.e.* de diviseurs algébriques : la représentation linéaire (de degré 1) des grandeurs algébriques est réalisée par un nombre fini d'éléments. Hilbert reconnaîtra que son théorème de la base finie pour un système de formes arbitraires est inspiré du théorème de Kronecker qui énonce que dans tout corps de fonctions algébriques il y a toujours un nombre fini de fonctions entières tel que toute autre fonction entière de ce corps peut être représentée par une fonction linéaire de ce nombre. La théorie kroneckerienne des indéterminées s'appuie sur la théorie des équations (et de l'élimination des inconnues) de Gauss et Galois et introduit les indéterminés par association <*Associeren*> qu'on peut à leur tour éliminer à l'aide de transformations linéaires qui substituent aux indéterminées des fonctions rationnelles à coefficients entiers (équations algébriques). C'est là l'origine de la théorie de l'élimination que l'on retrouve chez Hilbert et dans toute la tradition algébrique jusque dans la théorie de l'élimination des quantificateurs (existentiels) chez Tarski et en théorie des modèles contemporaine. C'est une preuve d'existence arithmétique des grandeurs algébriques qui est au fondement de l'entreprise, selon l'expression de Kronecker [22, p.296]. Le concept d'association des indéterminées permet l'extension du domaine de l'arithmétique <*Gebietserweiterung der Arithmetik*> qui conserve les déterminations conceptuelles de l'arithmétique <*Begriffsbestimmungen*>, ce que nous appellerions aujourd'hui les extensions de l'anneau naturel des polynômes, ce qui inclut le corps des nombres algébriques et le corps des nombres complexes par clôture algébrique des extensions polynomiales.

La théorie des multiplicités que Husserl évoque brièvement dans les *Prolégomènes* ([13], 253), est la théorie générale des systèmes de nombres qui comprend pour Husserl la théorie commune des nombres complexes, la théorie des nombres réels, l'arithmétique ordinale et cardinale, l'algèbre vectorielle, etc. En réalité, c'est l'arithmétique générale <*allgemeine Arithmetik*> que Husserl a dans l'esprit et la paternité en est surtout imputable à Kronecker, comme nous le supposons. Bien entendu, d'autres mathématiciens peuvent être cités dans l'entreprise de l'arithmétique générale, Grassmann et Hankel, mais aussi Cauchy, Weierstrass, Dedekind et Cantor entre autres. Mais c'est Kronecker aux yeux de Husserl qui a porté à son sommet ce qu'il appelle l'algorithme arithmétique, comme il le confesse dans le texte de <*Die Wahren Theorien*>.

Il n'est sans doute pas inutile de rappeler que le véritable sens de « multiplicité » se trouve justement dans le terme polynôme. La polynomie ou polynomialité qui veut dire division multiple a été engendrée par la <*multiplicitas*>, la multiplicité qui a donné <*manifold*> en anglais et en allemand <*Mannigfaltigkeit*>, multiplicité ou variété qui a engendré à son tour les espaces de Riemann, la théorie de l'extension de Grassmann et les ensembles que Cantor a d'abord appelés multiplicités. Husserl voudra faire de sa <*Mannigfaltigkeitslehre*> la théorie de toutes les théories déductives ou la théorie de la forme de toute théorie possible, ou encore science de la théorie en général que nous pourrions appeler « théorétique ». Husserl voudra accorder la priorité au mathématicien dans la constitution de la théorie des multiplicités alors qu'il réservera au philosophe le rôle d'épistémologue ou d'épistémologicien, c'est-à-dire de logicien du savoir qui n'a qu'un intérêt purement théorique au-delà de l'intérêt technique du spécialiste. C'est là une division des tâches que Husserl n'a pas toujours respectée, lui qui de mathématicien est devenu philsosophe et qui a transformé les outils spécifiques du calcul des variations en une méthode phénoménologique des variations eidétiques, théorie qui a oublié son origine mathématique chez Husserl en devenant transcendantale.

3. LA THÉORIE DES MULTIPLICITÉS OU < MATHESIS UNIVERSALIS > DES LOGISCHE UNTERSUCHUNGEN À LA KRISIS

Trente-cinq ans après les *Logische Untersuchungen*, c'est toujours la même formulation de la théorie des multiplicités que Husserl répète.

L'idée chez Leibniz d'une *mathesis universalis* s'incarne aujourd'hui, nous dit Husserl, dans une logique formelle des multiplicités consistantes, un univers de modèles possibles du quelque chose en général <*etwas überhaupt*> ([15], 45). Parmi toutes les multiplicités, Husserl privilégie les multiplicités définies <*definit Mannigfaltigkeiten*> dont la définition est donnée par un système axiomatique complet qui constitue une totalité fermée de déductions avec laquelle on peut construire l'idée formelle d'un monde en général. Ici ([15], 44-45) Husserl évoque de façon explicite la théorie des nombres et des grandeurs algébriques sans citer Kronecker, mais ou pourrait, je crois, sans infléchir trop la pensée de Husserl, voir dans cette problématique une théorie des modèles plutôt qu'une théorie des systèmes formels ou métamathématique au sens de Hilbert. En effet, la théorie des corps algébraiquement clos, la théorie des corps réels clos ou la théorie des corps finis sont des théories axiomatisables et décidables. On sait que Tarski a été un pionnier dans l'étude de ces théories algébriques, mais il s'est inspiré de Skolem et de Kronecker, en particulier dans la théorie de l'élimination des quantificateurs qui est issue en droite ligne de la théorie de l'élimination des indéterminées de Kronecker dans sa théorie arithmétique des grandeurs algébriques, comme le reconnaît volontiers le théoricien des modèles van den Dries [24]. Ainsi, si on ne prend pas au pied de la lettre la pensée de Husserl, on pourrait voir dans sa théorie des multiplicités une théorie des structures et des modèles qui aurait sa justification dans la pratique logicienne. Évidemment, on n'y trouvera aucune indication concrète à propos des travaux de Tarski ou de Gödel, et pas de renvois à Kronecker, comme je l'ai dit plus haut.

Une autre voie que j'ai déjà explorée [4] consiste à rapprocher complétude et catégoricité. L'arithmétique de Peano au second ordre est catégorique et représenterait donc, dans les mots de Husserl ([17], par.31), une explication unitaire d'un domaine infini d'objets, ou encore la complétude syntaxique au sens où il n'est pas possible d'enrichir le système axiomatique sans contradiction, *e.g.* la théorie des nombres réels (ou coupures) de Dedekind. La complétude sémantique avec son substrat ensembliste ne saurait être autorisée, comme on le sait depuis Gödel, pour l'arithmétique de Peano et ses extensions.

Je prends l'exemple du corps complet des réels R, ici la version de Dedekind en termes de coupures : l'ensemble des réels est coupé en deux sous-ensembles

$$A \text{ et } B : R = \quad a \in A, b \in B \quad .$$

Les cinq axiomes suivants définissent la complétude syntaxique de la théorie des coupures :

1) $A \neq B \wedge B \neq A$

2) $\forall a \in R\ (a \in A \vee a \in B)$

3) $\forall a \in R\ \neg(a \in A \wedge a \in B)$

4) $\forall a\ \forall b\ (a \in A \wedge b \in B \rightarrow a < b)$

5) $\forall a\ \forall b\ \exists!\ c \in R\ (a \leq c \leq b)$

C'est ou bien le plus grand élément (sup) de A ou le plus petit élément de B (inf). R est alors l'ensemble de toutes les coupures et un axiome 6 de clôture stipule simplement qu'on ne peut enrichir les cinq premiers axiomes sans contradiction. C'est le sens de l'*axiome* hilbertien de complétude pour l'arithmétique des réels qui lui sert de modèle au sens technique dans les *Grundlagen der Geometrie* de 1899 et cet axiome n'a rien à voir avec le *théorème* de complétude sémantique que Gödel démontrera pour la logique des prédicats du premier ordre en 1930. Cette classe axiomatisable ou définissable, comme on dit maintenant, correspond donc bien au concept de multiplicité définie <*definit Mannigfaltigkeit*> qu'on trouve dans les *Ideen* ([14], 167) : un nombre fini (d'axiomes) détermine complètement et univoquement la totalité des formes possibles d'un domaine de concepts et d'énoncés dans un style purement analytique de sorte qu'aucune question principielle ne reste ouverte. C'est la notion de clôture ou de fermeture qui caractérise essentiellement la multiplicité définie pour laquelle rien n'est plus indéterminé <*es bleibt nichts mehr unbestimmt*> (ibid.).

Mais Husserl continue en disant que dans une multiplicité définie, les concepts de vrai et de conséquence logique sont équivalents comme le sont les concepts de faux et de contradictoire <*Widerfolge*> ; il est cependant clair que dans le texte des *Ideen*, Husserl emploie les termes de vrai et de faux dans un sens informel et non dans le sens hilbertien de satisfaisable <*erfüllbar*> ou valide <*allgemeingültig*>.

Dans une note fort importante, Husserl ajoute qu'il a été préoccupé par ces problèmes depuis les années 90 où il tentait de justifier fondationnellement les nombres imaginaires, *i.e.* la partie imaginaire Im $(z) = y$ d'un nombre complexe $z = x + iy$ dont il a déjà dit dans les *Recherches logiques* ([13], 253) qu'il constituait une généralisation formelle du concept de nombre ; en d'autres mots, il s'agit d'une arithmétique générale <*allgemeine Arithmetik*> des grandeurs algébriques au sens de Kronecker et Husserl veut justifier le statut de l'expression $i = \sqrt{-1}$. Husserl conclut sa note en remarquant l'étroite parenté de son concept de définité <*Definitheit*> avec l'axiome de complétude <*Vollstandigkeitsaxiom*> que Hilbert a utilisé dans l'arithmétique des réels. Dans le même sens, on dit qu'un espace métrique est complet si et seulement si toute suite de Cauchy y converge, comme dans le cas de l'espace de Hilbert.

La complétude d'un système déductif signifie chez Husserl comme chez le premier Hilbert (celui d'avant les *Grundlagen der Mathematik*) sa clôture ou son inextensibilité axiomatique. Je l'ai dit plus haut, les théories décidables comme la théorie des corps algébraiquement clos ou la théorie des corps réellement clos, sont de bons exemples de multiplicités définies, puisque ce sont des théories élémentaires *i.e.* du premier ordre qui sont complètes. Mais on ne peut penser que Husserl a anticipé la théorie des modèles sur ce point.

Les commentateurs, chez les Français, Jean Cavaillès [2] et à sa suite Suzanne Bachelard [1], ou encore Ingeborg Strohmeyer dans son introduction à [17] ou Lothar Eley dans son introduction à [12], n'ont pas rendu justice au programme de Husserl en le confrontant avec celui de Hilbert ; tous deux auraient tombé sous le coup du (premier) théorème d'incomplétude de Gödel pour l'arithmétique de Peano. Je ne veux pas tenter de dissiper les ambiguïtés des commentateurs, ni justifier Husserl, mais il me semble que les précisions que j'ai apportées jusqu'ici suffisent à mieux circonscrire la problématique husserlienne. Je veux conclure sur une note positive.

4. CONCLUSION. LA THÉORIE DE LA SCIENCE <*WISSENSCHAFTSLEHRE*> DE HUSSERL

Le programme de Husserl, c'est bien sûr avant tout l'idée d'une phénoménologie transcendantale qui comporte une théorie de la science dont une partie importante, aux yeux de Husserl, est la théorie des multiplicités. Celle-ci apparaît dès les années 1890 et demeure dans sa forme originale jusqu'à la fin de la carrière philosophique de Husserl, jusqu'à la *Krisis*. Tour à tour mathématique universelle <*mathesis universalis*> ([13], 251), logique pure qui comprend la mathématique pure en tant que science théorétique [18], il est certain que Husserl a voulu y voir une théorie générale qui englobe formellement tous les systèmes déductifs possibles. L'idée la plus générale d'une théorie des multiplicités est d'être une science qui définit les types essentiels des théories ou des domaines d'objets possibles et étudie leurs relations internes. Les théories existantes ne sont que des spécialisations ou singularisations des formes de théories ; cette théorie des formes de théorie conçue sur le modèle de la <*Formenlehre*> ou théorie des polynômes est clairement d'origine mathématique mais a une destination transcendantale dans la mesure où elle n'échappe pas à la réduction phénoménologique – la logique et les mathématiques sont soumises à la mise entre parenthèses, <*Einklammerung*> ou <*Ausschaltung*> comme le prescrit la doctrine des *Ideen* ([14] par.59), puisque les formes pures des mathématiques et de la logique ne peuvent servir d'instrument à la description matérielle des faits intentionnels de la conscience transcendantale. Il y a donc une limite supérieure à la théorie générale des multiplicités, c'est l'εποχη de la phénoménologie descriptive <*deskriptive Phaenomenologie*>, qui ne doit décrire que les phénomènes de l'intuition pure. La thèse est reprise dans *Formale und transzendantale Logik*. Si la théorie des multiplicités représente le dernier étage de la logique pure, elle doit cependant s'arrêter avant la sphère du transcendantal, comme l'idée d'ontologie formelle doit être détachée de l'idée de théorie de la science. La logique transcendantale doit définir les conditions de possibilité de la logique formelle dans la constitution de l'égologie transcendantale, fondement ultime de la phénoménologie husserlienne qui plonge dans la <*Lebenswelt*> ou monde de la vie antéprédicative.

Ainsi, la théorie de la science – de la science nomologique ou déductive – dont la pierre de touche est la théorie des multiplicités s'achève-t-elle dans la reprise transcendantale et la question peut être posée à de nouveaux frais. « Une théorie de toutes les théories possibles est-elle possible ? », une question que j'ai posée jadis [4]. La possibilité de ce que j'ai appelé à l'époque « métathéorétique » est-elle une possibilité du savoir ? Il ne s'agit pas évidemment de la TdT, théorie du tout, ou ToE, «*theory of everything*», théorie unitaire des champs, mais théorie unitaire des domaines du savoir, des théorétiques en général. Ce programme ambitieux ne s'est pas réalisé, il s'est réfracté en une phénoménologie transcendantale qui n'a pas eu d'impact sur les sciences théoriques, de la logique aux mathématiques et à la physique. La théorie des multiplicités aura été un thème récurrent dans l'oeuvre de Husserl, mais des *Logische Untersuchungen* à la *Krisis* il est demeuré invariable, c'est-à-dire qu'il n'a pas été nourri, enrichi, approfondi par de nouvelles élaborations au fil des travaux de Husserl.

J'ai simplement voulu montrer l'ancrage mathématique du projet husserlien et comment il s'éloigne de la métamathématique (systèmes formels et modèles) de Hilbert à Tarski en s'en rapprochant par le motif fondamental de l'arithmétique générale dont on trouve l'expression achevée chez Kronecker.

BIBLIOGRAPHIE

1. Bachelard, S., *La logique de Husserl*, PUF, Paris, 1957.
2. Cavaillès J., *Sur la logique et la théorie de la science*, PUF, Paris, 1947.
3. Gauthier, Y., « Logique hégélienne et formalisation », *Dialogue*, vol. VI, no.2, 1967, p. 151-165.
4. Gauthier, Y. « La théorie de toutes les théories possibles est-elle possible ? » », *Dialogue*, vol.XIV (1975), no.1, p.81-87.
5. Gauthier, Y., « Hegel's logic from a logical point of view », *Hegel and the Sciences*, ed. by Robert S. Cohen and Max W. Wartofsky, Boston Studies in the Philosophy of Science, vol. 64, Reidel, Dordrecht, 1984, p. 303-310.
6. Gauthier, Y., *De la logique interne. Modèles et applications*, Paris/Montréal, Diderot/Modulo, 1997.
7. Hegel, G.W.F., *Phänomenologie des Geistes,* hrsg. v. J. Hoffmeister, Philosophische Bibliothek, vol.114, Felix Meiner, Hamburg, 1952.
8. Hegel, G.W.F., *Enzyklopädie der philosophischen Wissenschaften im Grundrisse (1830),* neu hrsg. v. F. Nicolin und O. Pöggeler, Philosophische Bibliothek, vol. 33, Felix Meiner, Hamburg, 1959.
9. Hegel, G.W.F. *Wissenschaft der Logik,* Erster Teil, Philosophische Bibliothek, Band 56, Felix Meiner, Hamburg, 1963.
10. Hegel, G.W.F. *Wissenschaft der Logik*, erster Band, erstes Buch. *Das Sein.* Faksimiledruck nach der Erstausgabe von 1812. Vandenhock & Ruprecht, Göttingen, 1966.
11. Hegel, G.W.F., *Jenenser Logik, Metaphysik und Naturphilosophie*, Philosophische Biblothek, Band 58, Felix Meiner, Hamburg, 1967.
12. Husserl, E., *Philosophie der Arithmetik*, hrsg. v. L. Eley, Martinus Nijhoff, den Haag, 1970.
13. Husserl, E., *Logische Untersuchungen*, Erster Band. *Prolegomena zur reinen Logik*, hrsg. v. E. Holenstein, Martinus Nijhoff, den Haag, 1975.

14. Husserl, E., *Ideen zu einer reinen Phänomenologie und phänomenologischen Philosophie*, Ersten Buch, hrsg. von Biemel, Martinus Nijhoff, den Haag, 1950.
15. Husserl, E., *Die Krisis der europaïschen Wissenschaften und die transzendentale Phänomenologie*, hrsg. von Biemel. Husserliana Band VI, 2 Aufl. Martinus Nijhoff, den Haag, 1962.
16. Husserl, E., *Formale und transzendentale Logik*, hrsg. v. P. Janssen, Martinus Nijhoff, den Haag, 1974.
17. Husserl, E., *Studien sur Arithmetik und Geometrie, Texte aus dem Nachlass* (1886-1901), hrsg.v. I. Strohmeyer, Martinus Nijhoff, den Haag, 1983.
18. Husserl, E., *Einleitung in dïe Logik und Erkenntnistheorie. Vorlesungen*, 1906/1907, hrsg.v. V. Melle, Martinus Nijhoff, den Haag, 1983.
19. Kant, I., *Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels,* Gesammelte Schriften, G. Reimer, Berlin, 1910, p. 215-368.
20. Kant, I., *Kritik der reinen Vernunft,* Philosophische Bibliothek, Band 37a, Felix Meiner, Hamburg, 1956.
21. Kronecker, L., «Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen», *Werke*, vol. III, ed. by K. Hensel, 5 vols., Chelsea, New York, 1968, p. 245-387.
22. Kronecker, L., «Ueber den Zahlbegriff», *Werke* vol. II : 252-274.
23. Lacroix, A., *Hegel. La philosophie de la nature*, P.U.F., Paris, 1997.
24. Van den Dries, L., «Alfred Tarski's Elimination Theory for Real Closed Fields», *JSL*, vol. 53 (1988), 7-19.

CHAPITRE 11

Commentaire de « Hegel. Passages et chemins de traverse »

Je termine cette première partie du recueil avec un pot-pourri Hegel. Le dernier état de mes travaux sur Hegel et sa logique « dialectique » que j'ai rebaptisée « syllogistique dynamique » se trouve dans l'article « De Kant à Hegel. De la logique transcendantale à la syllogistique dynamique ». Il s'agit du compte rendu d'une conférence que j'ai donnée lors du congrès international « *Hegels Antwort auf Kant* » à Vienne en 2014 et publiée dans le *Hegel-Jahrbuch*, vol. 2016, Issue 1, p. 415-421.

J'ai enrichi mon propos en intégrant des passages de mes travaux antérieurs sur Hegel dans mon ouvrage *Hegel. Introduction à une lecture critique* (Québec, PUL, 2010) et dans des textes parus dans les revues *Philosophiques* et *Dialogue*.

Ce condensé récapitule mon étude de Hegel commencée avec ma thèse de doctorat auprès de Hans-Georg Gadamer à Heidelberg en 1966 et publiée sous le titre *L'essence du langage chez Hegel et Hölderlin* et close avec ma conférence de Vienne de 2014.

NOTES

Voici une liste de mes principaux travaux sur Hegel.

1. Gauthier, Y., *L'Arc et le Cercle. L'essence du langage chez Hegel et Hölderlin*, Desclée de Brouwer et Les Éditions Bellarmin, Bruxelles-Paris / Montréal, 1969.

2. Gauthier, Y., « Logique hégélienne et formalisation », *Dialogue*, vol VI, no. 2, 1967, p.151-165.

3. Gauthier, Y., «Hegel's logic from a logical point of view», *Hegel and the Sciences*, ed. by Robert Cohen and Max W. Wartofsky, *Boston Studies in the Philosophy of Science*, vol. 64, Reidel, Dordrecht, 1984, p. 303-310.

4. Gauthier, Y., «Moment cinétique et syllogistique dynamique chez Hegel», *Philosophiques*, vol. 32, no. 2 (2005), p. 357-368.

5. Gauthier, Y. *Hegel. Introduction à une lecture critique,* Presses de l'Université Laval, Québec, 2010.

Hegel. Passages et chemins de traverse

1. DE KANT À HEGEL : DE LA LOGIQUE TRANSCENDANTALE À LA SYLLOGISTIQUE DYNAMIQUE

Pour Kant, la logique transcendantale avait pour fonction de décrire la structure systématique des concepts *a priori*. Le paysage conceptuel dessiné par Kant était donc une représentation tabulaire des catégories conceptuelles de nature transempirique qui consistait à définir le régime analytique de l'entendement et le caractère transcendant de la logique dialectique de la raison. La logique hégélienne est le renversement immanent de cette dialectique dont le moteur est l'automouvement du concept ‚*die Selbstbewegung des Begriffs*'. Le motif recteur de la logique hégélienne réside dans la logique interne de la pensée pure plutôt que dans les déterminations formelles des catégories conceptuelles *a priori* ; en d'autres mots, il s'agit pour Hegel de mettre au jour le procès dialectique du concept à travers ses déterminations successives *Bestimmungen*', moments ou *momenta* au sens actif de quantités de mouvement que Hegel a emprunté à la mécanique newtonienne pour donner vie à sa dialectique. Le moteur inférentiel de cette autodétermination du concept est la négation déterminée ‚*die bestimmte Negation*' que j'appelle la négation locale. En effet, suivant l'axiome spinoziste ‚*Omnis determinatio est negatio*', Hegel en fait le principe qui gouverne tout le développement de sa logique : ‚*Die Bestmmtheit ist die Negation als affirmativ gesetz*' ([2], 100).

La détermination est une négation locale dans la mesure où elle pose une négation qui sera à son tour niée comme détermination affirmative et c'est ici qu'entre en scène la double négation ‚*die doppelte Negation*' ou ‚*negatio duplex*' que je considère comme l'opérateur principal de la logique dialectique de Hegel. J'entends par opérateur logique le mécanisme de la double négation conçu chez

Hegel comme le mouvement même du concept dans sa montée vers l'Idée absolu. Ce mouvement est immanent, il absorbe toute extériorité.

Le processus de la négativité est le moment essentiel de la dialectique et l'inférence à laquelle il donne lieu assure le passage des contraires par la dialectique positive de la sursomption1 qui fait intervenir un tiers, l'autre de l'autre, un autre positif, identique, universel. Le processus de la négativité est le moment essentiel de la dialectique et l'inférence à laquelle il donne lieu assure le passage des contraires par la dialectique positive de la sursomption qui fait intervenir un tiers, l'autre de l'autre, un autre positif, identique, universel. Ce résultat de la négation de la négation est un troisième terme, mais en tant que négatif ou détermination négative, il se présente aussi comme quatrième terme dans la mesure où le procès de la sursomption dialectique entre dans une nouvelle détermination, ce que l'on peut formuler de la façon suivante :

$$\neg\neg \mathrm{a} \rightarrow \mathrm{b} > \mathrm{a} \text{ ou } \neg\neg\, \mathrm{a} = \mathrm{b} > \mathrm{a}.$$

La suite caténaire peut se poursuivre :

$$\neg\neg\, b \rightarrow c > b, \neg\neg\, c > d\ldots$$

La double négation ici n'est pas booléenne, i. e. $\neg\neg\, a = a$ et ne redonne pas l'assertion initiale, mais un nouvel énoncé qui fait l'objet d'un syllogisme d'ordre supérieur dans l'élévation du concept à travers la multiplicité de ses déterminations successives. Triplicité ou quadruplicité, peu importe, ce n'est là que le côté superficiel, extérieur ou formel de la dialectique comme syllogistique dynamique. En effet, la syllogistique aristotélicienne a aussi ce caractère de triplicité, mais c'est une forme tout extérieure qui ne détermine pas la nature du contenu (par exemple pour les enthymèmes) pas plus que la dialectique trine de l'architectonique kantienne des catégories qui reste un formalisme. Hegel dit de l'Idée absolue :

> Le troisième terme est l'immédiat, mais par sursomption de la médiation, le simple par le sursumer de la différence, le positif par le sursumer du négatif. Le concept qui se réalise par l'être autre et par le sursumer de cette réalité, a coïncidé avec soi et a établi sa réalité absolue, son rapport simple à soi. Ce résultat est par conséquent la vérité. ([6], II, 384).

La méthode qui est déploiement du contenu s'amplifie en système, nous dit Hegel ([6] II, 385), parce que la progression du concept vers son achèvement est en même temps régression vers son commencement, le conséquent se retournant en antécédent dans une forme symétrique qui traduit le cycle des permutations du concept ou le cercle total de ses transformations.

Hegel conclut la *Science de la logique* dans une formule qui résume le système dans son entier.

> En vertu de la nature exhibée de la méthode la science se présente comme un cercle entrelacé dans soi, dans le commencement duquel le fondement simple, la médiation entrelace en retour le terme : par là ce cercle est un « cercle de cercles ». ([6], II, 390–391).

L'enchaînement des déterminations du concept est donc cette structure cyclique qui a un avant et un après ; mais l'avant et l'après se fusionnent dans le cercle où l'origine et la fin, l'*archè* et le *télos* plutôt que la limite *péras* ici coïncident. L'ensemble des cercles concentriques des déterminations de l'idée est clos ou fermé par l'Idée absolue comme concept pur se concevant lui-même, auto-conception suprême ([6], II, 393). C'est cette même hyperbole que l'on retrouve dans la définition de l'Esprit absolu à la fin de l'*Encyclopédie des sciences philosophiques*.

2. LA SYLLOGISTIQUE D'ARISTOTE À HEGEL

Un syllogisme est un ensemble de trois énoncés de forme prédicative, avec sujet, copule et prédicat, qui comporte deux prémisses, majeure et mineure, et une conclusion ; trois termes, majeur, mineur et moyen, apparaissent dans diverses positions à l'intérieur d'un syllogisme. Aristote a défini simplement le syllogisme dans ses *Premiers Analytiques* comme un énoncé dans lequel certaines choses étant posées, une chose différente s'ensuit nécessairement. Les *figures* d'un syllogisme catégorique – dont la conclusion est nécessaire – désignent la place du moyen terme et les *modes* répartissent les énoncés selon leur forme : ainsi un syllogisme de la première figure – où le moyen terme ou terme moyen apparaît comme sujet de la prémisse majeure et prédicat de la prémisse mineure, le grand terme occupant la place de prédicat dans la conclusion et le petit terme (mineur) celle du sujet de la conclusion – aura quatre modes, AAA (BARBARA), EAE (CELARENT), AII (DARII), et EIO (FERIO) selon la distribution des énoncés universels affirmatifs A, universels négatifs E, particuliers affirmatifs I et particuliers négatifs O. Les locutions latines ne servent que d'aides mnémotechniques : BARBARA aura trois énoncée universels affirmatifs, CELARENT un énoncé universel affirmatif encadré par deux énoncés universels négatifs, DARII un énoncé universel affirmatif suivi de deux énoncés particuliers affirmatifs et FERIO un énoncé universel négatif suivi d'un énoncé particulier affirmatif et d'un énoncé particulier négatif. Exemples :

FERIO

Aucun Québécois n'est idiot

Certains Montréalais sont des Québécois

Certains Montréalais ne sont pas idiots

DARII

Tous les Québécois sont intelligents

Certains Canadiens sont des Québécois

Certains Canadiens sont intelligents

CELARENT

Aucun Québécois n'est menteur

Tous les Montréalais sont des Québécois

Aucun Montréalais n'est menteur.

Un syllogisme en BARBARA aura donc la forme AAA, e.g.

BARBARA

Tous les humains sont mortels

Tous les Québécois sont des humains

Tous les Québécois sont mortels

que nous traduisons dans le langage symbolique de la logique formelle par

$$\forall x\,(Hx \rightarrow Mx)$$

$$\underline{\forall x\,(Qx \rightarrow Hx)}$$

$$\forall x\,(Qx \rightarrow Mx).$$

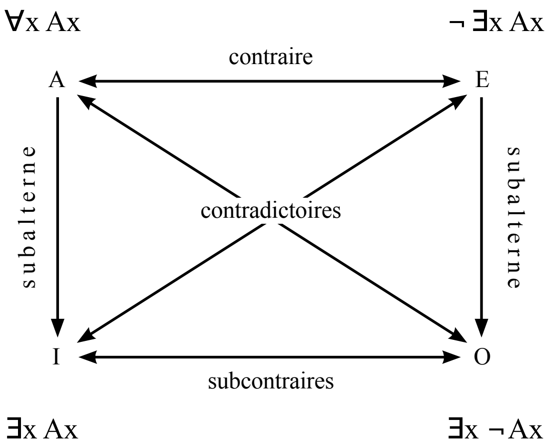
Aristote aurait écrit simplement

Tout S est P

Tout R est S

Tout R est P.

Les relations logiques entre énoncés sont schématisées dans le carré des oppositions aussi appelé carré d'Apulée que nous décrivons dans la terminologie moderne avec quantificateurs universel ($\forall x$) <pour tous> et existentiel ($\exists x$) <pour au moins un> – remarquons que pour Aristote, le quantificateur universel avait un import existentiel, c'est-à-dire que le <pour tous> suppose qu'il existe des êtres ou des objets sur lesquels porte la quantification.



où nous avons

$$\forall x\, Ax \equiv \neg\, \exists x\, \neg Ax$$

$$\forall x\, \neg Ax \equiv \neg\, \exists x\, Ax$$

$$\exists x\, Ax \equiv \neg\, \forall \mathrm{x}\, \neg Ax$$

$$\exists x\, \neg Ax \equiv \neg\, \forall x\, Ax$$

et

$$\mathrm{A}: \leftrightarrow x\, (Ax \rightarrow Bx) \equiv \neg\, \exists x\, (Ax \wedge \neg Bx)$$

$$\mathrm{E}: \leftrightarrow x\, (Ax \rightarrow \neg Bx) \equiv \neg\, \exists x\, (Ax \wedge Bx)$$

$$\mathrm{I}: \exists x\, (Ax \wedge Bx) \equiv \neg\, \forall x\, (Ax \rightarrow \neg Bx)$$

$$\mathrm{O}: \exists x\, (Ax \wedge \neg Bx) \equiv \neg \leftrightarrow \mathrm{x}\, (Ax \rightarrow Bx).$$

Rappelons que pour Hegel dès le point de départ « le syllogisme est le principe de l'idéalisme » ; pour lui, le carré des oppositions est bien nommé puisque dans la dialectique il s'agira de résoudre les contraires, les opposée incompatibles, les pôles antagonistes ou les extrêmes <*die Extreme*> que sont le terme majeur et le terme mineur en les sursumant à l'aide du moyen terme ou terme médian <*die Mitte*> qui est le moyen <*das Mittel*> de la médiation <*Vermittlung*>, véritable milieu <*die Mitte*> dynamique de la dialectique de la négativité. Il n'y a pas à proprement parler de contradiction formelle chez Hegel, seulement une logique de la contrariété et de sa résolution dans une syllogistique dynamique propulsée par le moteur d'inférence de la sursomption alimentée par la double négation. La tension <*Widerstreit*> entre les contraires (et subcontraires) se résorbe dans la réconciliation <*Versöhnung*> du même et de l'autre ou de l'un et du multiple dans une synthèse finale. La triplicité hégélienne ne se réduit pas à la triade thèse – antithèse – synthèse qui n'est que la structure externe du système ; la logique interne de la dialectique hégélienne est bien davantage dans le triplet du syllogisme dynamique avec la composition trine du sujet, de la copule <devenir> et du prédicat. Enfin la trinité du grand terme, du petit terme et du moyen terme dans la tripartition de la majeure, de la mineure et de la conclusion <*Schluss*> clôt le cercle de la déduction dialectique au sens de Hegel.

3. MOMENT CINÉTIQUE ET SYLLOGISTIQUE DYNAMIQUE[1]

Pour le logicien et le philosophe des sciences contemporain, la logique et la philosophie de la nature de Hegel offrent peu d'intérêt sur le plan formel. Si la philosophie de la nature de Hegel n'est plus qu'une curiosité historique aux yeux du philosophe des sciences, la logique de Hegel peut être réhabilitée non pas comme logique dialectique au sens que la tradition marxiste a voulu donner à ce mot, mais comme ce que j'appellerai la syllogistique dynamique ou logique dynamique au sens où on l'entend maintenant en informatique théorique et en théorie de l'intelligence artificielle. <Intelligence artificielle> peut sembler détonner dans un contexte hégélien. Mais Hegel lui-même n'a pas manqué de noter que la philosophie a besoin d'une langue artificielle <*Kunstsprache*> pour rendre les déterminations réflexives <*reflektierte Bestimmungen*> comme il dit dans la *Science de la logique* (*WL*, I, 94-95). Et Hegel d'ajouter que le latin, à défaut de la langue maternelle, fournit souvent la terminologie nécessaire à la conceptualisation philosophique.

J'en veux pour exemple le terme de <*Moment*>, un des termes les plus courants dans le texte de Hegel. Ce n'est pas le sens temporel du terme qui prédomine chez Hegel, mais le sens physique ou

« dynamique » du latin <*momentum*> qui signifie, comme chacun sait, quantité de mouvement en physique classique et en mécanique newtonienne.

Il est significatif à cet égard que Hegel emploie presque toujours le neutre <*das Moment*> pour signifier l'aspect dynamique du moment ou *momentum* et il n'y pratiquement pas d'occurrences du terme dans le texte hégélien où ce sens serait absent. Hegel connaissait évidemment le sens physique du <*momentum*> ou moment cinétique chez Newton aussi bien que le Kant de la *Critique de la raison pure* qui le définit dans la deuxième analogie de l'expérience comme l'opération continue et uniforme de la causalité :

> *eine kontinuierliche Handlung der Kausalität, welche, sofern sie gleichformig ist, ein Moment heisst.* (voir [37], B. 254) – l'action continue de la causalité s'appelle moment dans la mesure où elle est uniforme.

Kant dit alors que le changement n'est pas constitué de moments, mais qu'il est causé par l'effet de ces moments. Ce sens n'est pas étranger à Hegel qui avait bien lu Newton avant de le critiquer pour son mécanisme, mais il transforme le sens physique initial pour lui donner une autre dimension sémantique, celle de moments dans l'automouvement de l'esprit. C'est ici précisément que l'on pourrait dire que Hegel transmue la physique newtonienne en une métaphysique cinétique de l'esprit dans son idéalisme objectif – la métaphysique devient la métaphore de la physique.

Peu de commentateurs ont noté que l'allemand « *Moment* » chez Hegel a le sens de <*momentum*> que Hegel a tiré de sa lecture de Newton. Je rappelle que Newton définit les moments de quantités (physiques) :

> *Momenta quantitatum sunt ipsarum principia generantia vel alteranti fluxo continuo* » ([44] vol. VI, 192) – les moments des quantités sont les principes de génération ou d'altération de ces mêmes quantités dans un flux continu.

La seconde loi de Newton définit le moment newtonien comme le produit de la masse et de la vitesse,

$$p = mv$$

et la célèbre formule de Newton pour la force donne

$$F = ma$$

où a est l'accélération.

Or Hegel, qui multiplie les emplois de <*Moment*> comme dans les expressions <*Momente des Prozesses*>, <*Momente des Werdens*> ou <*Momente des Begriffs*>, y réfère toujours en termes d'un principe générateur ou modificateur d'un mouvement ou d'un flux continu dans la terminologie de Newton – notons ici que c'est chez Newton que <*momentum*> acquiert son sens plénier de principe du mouvement, plutôt que quantité de mouvement comme l'avaient conçu ses prédécesseurs, en particulier Descartes à qui l'on doit la première formulation du concept. Cet usage est encore plus net dans l'exemple du levier <*Hebel*> que Hegel utilise comme véritable paradigme ou modèle dynamique de la sursomption. Dans la *Science de la logique*, il nous dit :

> *Etwas ist nur insofern aufgehoben als es in die Einheit mit seinen Entgegengesetzten getreten ist ; in diesen nähern Bestimmung als ein Reflektiertes kann es passend Moment genannt werden* ([*WL*, I, 94) – Quelque chose n'est sursumée que dans la mesure où elle est unie à son contraire ; en tant que réfléchie dans cette détermination plus précise, elle peut être appelée de façon appropriée moment.

La sursomption est opérée comme *momentum* dans l'unité des contraires, c'est-à-dire comme ce mouvement même de la réconciliation des forces opposées. Hegel donne tout de suite après ce passage l'exemple du levier où moment cinétique ou angulaire ou encore moment d'un couple de forces sont les moteurs d'une dialectique à la fois concrète et abstraite. Le moment angulaire a la formule

$$L = rp$$

pour r le rayon et p la quantité de mouvement.

Mais c'est dans la *Mécanique* de la philosophie de la nature de Iéna qu'on trouve les passages les plus explicites sur la sursomption des moments dans le modèle du levier :

> *Im Hebel sind alle Momente der Bewegung als einer aufgehobenen und sie als solche realisiert* ([21], 252) – dans le levier sont réalisés tous les moments du mouvement comme sursumés dans la sursomption même du mouvement.

On connaît l'effort spéculatif de Hegel pour élever le processus mécanique du levier à la dignité de l'automouvement du concept <*die Selbstbewegung des Begriffs*>, mais il nous suffit de dire que le levier a été pour Hegel le modèle canonique de la sursomption dialectique du mouvement dans l'unité de ses moments. C'est à une véritable dynamique de l'esprit plutôt qu'à une cinétique des corps en mouvement que Hegel a voulu consacrer l'essentiel de sa logique. C'est ce que je veux essayer de montrer maintenant en mettant l'accent sur ce que j'appelle la syllogistique dynamique.

Doit-on réévaluer la logique dialectique à la lumière des développements récents en logique philosophique après les résultats négatifs de [13] et [14] du point de vue formel de la logique mathématique ? Certains auteurs, comme Newton da Costa, voient dans la logique dialectique une logique paraconsistante capable d'accueillir en son sein la contradiction tout en demeurant consistante, mais je pense qu'il est plus approprié de traiter la logique de Hegel comme une logique dynamique du syllogisme. Je définis dans la suite un système particulier de logique non monotone compatible avec une théorie du raisonnement dynamique apte à rendre compte de la conception hégélienne de l'automouvement du concept <*Selbsbewegung des Begriffs*>.

4. LA LOGIQUE DYNAMIQUE

En un mot, la logique dynamique est une logique des propositions (ou énoncés) et des actions ; cette logique est d'abord apparue en programmation logique et informatique théorique où une machine représente des objets linguistiques et les manipule. Assurément, on doit élargir considérablement ce cadre pour y faire entrer la logique hégélienne en tant que théorie de l'action ou du travail du concept <*die Arbeit des Begriffs*>, comme le dit Hegel à la fin de la *Préface* de la *Phénoménologie de l'esprit.* Si l'on admet cet élargissement, j'utiliserai le terme de « logique dynamique » pour désigner une logique qui tente de formaliser la dynamique de l'action ou de l'activité conceptuelle.

La logique dynamique est essentiellement une logique de la représentation de la croissance du savoir. À ce chapitre, il y a plusieurs entrées dans le paysage logique contemporain, mais la cible principale est de formuler un système logique capable de formaliser l'idée de développement. On est encore loin de la notion d'<*Aufhebung*> que j'ai traduite par « sursomption » comme antonyme de la subsomption kantienne. La logique dynamique est parente de la logique non monotone dans le sens que la loi de monotonicité, *i.e.* la croissance linéaire des théorèmes à partir de l'ensemble des axiomes, ne tient plus puisque dans le premier cas le trop-plein de contenu informationnel déborde les capacités du moteur d'inférence et dans le deuxième l'absence d'information stoppe ou déforme le mécanisme inférentiel dans le raisonnement par défaut.

La caractéristique principale d'une logique dynamique dialectique est la transitivité de la médiation <*Vermittlung*>, l'inférence propre à la syllogistique hégélienne. Je rappelle qu'une relation transitive R signifie simplement en termes classiques

$$xRy \text{ et } yRz \rightarrow xRz.$$

C'est une relation d'équivalence si elle est en plus réflexive xRx et symétrique $yRx \;\forall\; xRy$. Dans une logique monotone, l'inférence est bien entendu transitive, mais le caractère dynamique de la médiation au sens hégélien est perdu. La <*Vermittlung*> confère au moyen terme <*Mittel*> un rôle bien différent de celui qui lui est attribué dans le syllogisme aristotélicien « statique », comme dans Barbara par exemple :

$$\begin{array}{c} \text{A est B} \\ \underline{\text{C est A}} \\ \text{C est B} \end{array}$$

où le moyen terme demeure un lien statique ou inerte dans les prémisses afin de réunir le petit terme et le grand terme dans la conclusion.

5. LES SYLLOGISMES DYNAMIQUES

Prenons trois exemples de syllogismes hégéliens tels qu'ils se trouvent à la fin de l'*Encyclopédie* [26] (par. 575-577). Dans le premier syllogisme nous avons les trois termes, Logique <*das Logische*>, Nature et Esprit ; le moyen terme est Nature

Nature devient Esprit	N → E
Logique devient Nature	L → N
Logique devient Esprit	L → E

Il y a un passage ou une transition <*ein Uebergehen*> de la Nature à l'Esprit, alors que dans le deuxième syllogisme, Esprit devient le moyen terme

Esprit devient Logique	E → L
Nature devient Esprit	N → E
Nature devient Logique	N → L

et finalement dans le troisième syllogisme, Logique ou Concept ou Idée <*die Idee*> est le moyen terme

Logique devient Esprit	$L \rightarrow E$
Nature devient Logique	$N \rightarrow L$
Nature devient Esprit	$N \rightarrow E$

Logique, Nature et Esprit s'échangent le rôle de moyen terme pour mettre en évidence le développement et l'évolution de l'activité du savoir <*die Tätigkeit des Erkennens*>. Tout cela s'accorde avec la seconde thèse de la *Dissertation de 1801* : « Le syllogisme est le principe de l'idéalisme » et on pourrait avancer que la dialectique hégélienne est essentiellement une syllogistique dynamique. Il faut remarquer que dans les syllogismes que nous avons vus plus haut la transitivité n'est pas une relation d'équivalence, mais le procès du devenir ou un procès en devenir <*ein Prozess im Werden*>, comme le mathématicien intuitionniste L.E.J. Brouwer le disait à propos du continu mathématique. La nature dynamique de ce procès l'éloigne du caractère statique de la syllogistique aristotélicienne comme dans la règle d'inférence du *Modus Ponens*

$$\frac{\begin{array}{c}P \rightarrow Q\\ P\end{array}}{Q}$$

ou du *Modus Tollens*

$$\frac{\begin{array}{c}P \rightarrow Q\\ \neg Q\end{array}}{\neg P}$$

Le départ de la conception traditionnelle est radical dans la pensée spéculative. Hegel écrit dans la première édition de la *Wissenschaft der Logik* :

> «*Ist aber der Inhalt spekulativ, so ist auch das Nichtidentische des Subjects und des Prädikats wesentliches Moment, und der Uebergang oder das Verschwinden des ersten in das andere ihre Beziehung... Das wahre Resultat, das sich hier ergeben hat, ist das Werden, welches nicht bloss die einseitige oder abstracte Einheit des Seins und Nichts ist*» ([19], p. 31) – mais si le contenu est spéculatif, l'est aussi le moment essentiel de la non identité du sujet et du prédicat et le passage ou le disparaître du premier dans le second leur rapport même… Le vrai

> résultat qui s'est produit ici est le devenir qui n'est pas seulement l'unité unilatérale et abstraite de l'être et du néant.

Le fait que le devenir n'est pas l'unité abstraite de l'être et du néant signifie qu'il y a ici un mouvement de sursomption de leur différence et en même temps de la relation d'équivalence qui constitue leur identité <*identische Beziehung*>. La copule qui relie le sujet et le prédicat dans la logique traditionnelle est cette relation d'équivalence qui ne va pas au-delà d'une identité sans vie. Mais comme Hegel le montre à la fin de la *Wissenschaft der Logik* [20] : le syllogisme de la méthode dialectique a une structure circulaire qui culmine dans le cercle des cercles <*ein Kreis von Kreisen*> décrivant le procès de la médiation dans la chaîne des déterminations du Concept lui-même. Ce qui fait défaut dans le syllogisme traditionnel selon Hegel, c'est le procès dialectique de la négativité : la médiation médiatise l'immédiat dans un mouvement qui recrée le développement du Concept à travers la sursomption des étapes successives dans l'accession au savoir absolu. On peut résumer ce chapelet d'idées en disant que le vrai syllogisme de la dialectique hégélienne se révèle dans la transition dynamique de la sursomption d'une détermination à l'autre et non dans la relation statique de transitivité entre deux termes équivalents. La *Phénoménologie de l'esprit* exhibe déjà cette structure dynamique concrète.

6. *LA PHÉNOMÉNOLOGIE DE L'ESPRIT* ET LA SYLLOGISTIQUE DYNAMIQUE

La syllogistique dynamique est omniprésente dans la *Phénoménologie de l'esprit* et je veux en marquer les points forts ; je commence par la fin, avec le savoir absolu :

> *Er (der Gegenstand) ist, als Ganzes, der Schluss oder die Bewegung des Allgemeinen durch die Bestimmung zur Einzelheit, wie die umgekehrte, von der Einzelheit durch sie als aufgehobene oder die Bestimmung zum Allgemeinen. Nach diesen drei Bestimmungen also muss das Bewusstsein ihn als sich selbst wissen* ([22], 550) – il (l'objet) est en tant que tout la conclusion ou le mouvement du général ou la détermination vers la particularité, comme l'inverse, de la particularité en tant que sursumée ou la détermination vers le général. C'est selon ces trois déterminations que la conscience doit se connaître comme conscience de soi.

Ce passage résume toute la *Phénoménologie* dans sa structure logique. Le syllogisme est ici conçu comme le mouvement de l'universel vers le singulier à l'aide de la détermination et aussi bien comme le mouvement inverse du singulier à l'universel à l'aide de la sursomption ou de la médiation. Le facteur déterminant est le moyen terme en tant que médiateur tandis que l'universel et le singulier agissent comme les termes extrêmes, c'est-à-dire comme le petit terme et le grand terme. Hegel perçoit le grand terme et le petit terme comme extrêmes entre lesquels se joue la contradiction, mais en réalité l'opposition ou la tension dialectique se situe entre termes contraires et sous-contraires et non entre termes contradictoires d'après le carré d'Apulée :

Parcourant les figures (<*Gestaltungen*>) de la conscience, conscience immédiate, perception, entendement, conscience de soi, c'est le mouvement de la conscience elle-même qui accomplit la totalité de ses moments :

> *Dies ist die Bewegung des Bewusstseins und dieses ist darin die Totalität seiner Momente* ([22], 549) – c'est là le mouvement de la conscience et elle est dans ce mouvement la totalité de ses moments.

Le mouvement de la conscience et le mouvement du Concept sont un seul et même mouvement, mais c'est seulement dans le savoir absolu que les deux mouvements convergent absolument, pour le dire en termes mathématiques. Le procès d'extériorisation <*Entäusserung*> rend possible l'automouvement de la conscience et du Concept dans la triade immédiateté – médiation – immédiateté sursumée ou dans la triade en-soi –p our-soi – en-soi pour-soi <*Ansich--für sich--Ansich für sich*>. Hegel a attribué la structure de la triplicité au syllogisme traditionnel d'Aristote à Kant, mais il a mis l'accent sur les limites de la structure formelle tout en insistant sur les propriétés spéculatives du syllogisme dialectique. Un exemple crucial est la genèse dialectique de la conscience de soi. Hegel écrit :

> *Die Mitte ist das Selbstbewusstsein welches sich in die Extreme zersetzt ; und jedes Extreme ist diese Austauschung seiner Bestimmtheit, und absoluter Uebergang in das entgegengesetzte* » ([22], 142) le milieu est la conscience de soi qui se divise en ses extrêmes ; et chacun des extrêmes est cet échange de sa détermination et passage absolu dans l'opposé.

La réciprocité des deux opposés permet de concevoir chacun comme le moyen terme ou la médiation et dans le procès de la médiation de se reconnaître l'un l'autre comme se reconnaissant mutuellement. Ce passage célèbre met en évidence la dialectique concrète du syllogisme dynamique et montre avec force comment la description phénoménologique épouse les règles de l'inférence dynamique en reflétant le mouvement ascendant de la conscience vers le savoir absolu, de la même manière que le développement formel de la logique (onto-logique) suit le mouvement du Concept dans son ascension vers l'Idée absolue.

7. LA LOGIQUE DIALECTIQUE

J'ai tenté de montrer que la méthode dialectique de Hegel devait être interprétée comme une logique dynamique appliquée à la syllogistique traditionnelle et non en recourant aux approches formelles, algébriques ou non standard de la logique contemporaine ; l'approche paraconsistante par exemple fait place à la contradiction dans un système formel et ne résout pas le problème de la transitivité. Je défends plutôt le programme consistant qui suppose que Hegel ne pensait pas en termes de contradictions formelles quand il écrivait dans la *Dissertation de 1801* : la contradiction est la règle pour le vrai <*verum*> et la non-contradiction la règle pour le faux <*falsum*>, mais qu'il pensait plutôt en termes de contraires « médiatisés » par un tiers inclus dans l'autodéveloppement du concept comme l'enseigne la *Logique d'Iéna*. Le concept <*der Begriff*> est à la fois le milieu et le moyen terme <*die Mitte*>, le moyen même <*das Mittel*> et la médiation <*die Vermittlung*> du procès de la connaissance <*das Erkennen*>. La logique dialectique est la logique de l'action des concepts, de leur effectivité, pourrait-on dire <*Tätigkeit und Wirkung des Begriffs*>. Les contradictions sont des opposés, des extrêmes <*entgegengesetzte*> ou des polarités contraires. Les contradictions formelles <*in terminis*> briseraient la chaîne des concepts de la même manière qu'elles coupent le lien inférentiel entre axiomes et théorèmes dans un système formel. En replaçant la logique dialectique dans le cadre syllogistique, on voit immédiatement que la logique du développement conceptuel n'obéit pas à la logique classique. Un exemple frappant là-dessus est le statut de la double négation <*Negation der Negation*> chez Hegel ; ce n'est pas la négation booléenne qui est à l'œuvre ici, mais ce que j'appelle la négation locale. Dans la double négation hégélienne, la première joue le rôle d'une déterminité locale alors que la seconde la sursume : la double négation ne revient donc pas à l'assertion d'origine comme dans la double négation booléenne ou classique, mais constitue un nouvel énoncé généré par le développement du concept. Le caractère progressif ou <processuel> de cette double négation est manifeste dans le concept hégélien de la vraie infinité <*die wahre Unendlichkeit*>.

Il ne s'agit aucunement de présenter la logique hégélienne comme une logique non standard ou déviante susceptible de traitement formel. Comme chacun sait, la *Science de la logique* est une ontologie formelle plutôt qu'une logique formelle dans le sens moderne du terme. Néanmoins, le cadre d'une syllogistique dynamique suggère que Hegel a contribué de façon originale à l'histoire de la logique en construisant un nouveau régime pour la représentation philosophique du développement du savoir dans un moule traditionnel renouvelé.

8. LA SYLLOGISTIQUE DYNAMIQUE DANS *LA SCIENCE DE LA LOGIQUE*

Dans le chapitre terminal de la *Phénoménologie de l'esprit*, Hegel résume le parcours de la conscience :

> C'est là le mouvement de la conscience et celle-ci y est la totalité de ses moments ([23] p. 674)

en parlant de l'esprit de la religion révélée qui n'a pas encore surmonté sa conscience comme telle – je suis ici la traduction de Jarczyk et Labarrière que je modifie à l'occasion. Hegel ajoute

> Ce n'est cependant pas le savoir comme acte pur de comprendre l'objet dont il est question, mais ce savoir doit seulement se trouver mis en évidence dans son devenir ou dans ses moments, selon l'aspect qui appartient à la conscience comme telle et les moments du concept proprement dit ou du pur savoir [mis en évidence] dans la forme de figurations de la conscience. ([20], 675)

Conscience et concept participent du même mouvement et c'est dans la convergence de la série des moments du concept et des figures de l'esprit que s'accomplit le Savoir absolu où vérité et certitude correspondent parfaitement.

> Les moments comme mouvements purs s'autopropulsant « *indem diese*

[Momente] als die reine Bewegungen sich selbst weiter treiben » ([22], 557) ne sont plus dans le Savoir absolu les figures déterminées de la conscience, mais plutôt les moments du mouvement du savoir <*die Momente seiner Bewegung*> et ultimement ces moments s'identifient au moment même du concept pur qui prend la forme finale du cercle <*der in sich zurückgehende Kreis*> ([22], 562) ; l'Idée absolue, dans la conclusion de la *Science de la logique*, sera un cercle de cercles <*Kreis von Kreisen*> dans le mouvement circulaire de l'Esprit.

Faudra-t-il parler de moment angulaire et de commutations cycliques des moments de l'esprit dans ce contexte ? En tout cas, la syllogistique dynamique de Hegel suppose toujours ce mouvement de retour à soi : le concept

> se médiatise avec soi-même (*mit sich selbst vermittelt*) par sa négativité, du même coup est posé pour soi comme l'identité universelle de ses moments ([24], 499.)

La dialectique rotative des moments est le propre de la méthode spéculative de Hegel. Comme le dit Hegel, la triplicité ou la quadruplicité n'est qu'un aspect superficiel ou abstrait de cette dialectique concrète et s'il est vrai que « le syllogisme est le principe de l'idéalisme » comme il l'écrit dans la *Dissertation de 1801*, c'est que l'organisation du savoir en système repose sur la structure simple des trois termes (petit terme, grand terme et moyen terme) dynamisée par les moments du devenir ou l'automouvement du concept.

Dès 1801, la réappropriation vitaliste de la mécanique newtonienne orientera toute l'entreprise hégélienne sous le paradigme du moment entendu comme moment cinétique ou moment angulaire. Que ce soit le concept physique d'une théorie mécanique sans vie – pour Hegel – qui soit à l'origine d'une métaphysique de la vie de l'esprit ne doit pas étonner le lecteur de Hegel. Le concept de vie est en effet le thème majeur des *Écrits de jeunesse* et la transition par le moment cinétique orbital, pourrait-on dire, de la dissertation *De orbitis planetarum* à la période de maturité ne pouvait s'opérer que par la sursomption du concept de vie dans la phénoménologie de l'esprit d'abord et dans la métaphysique ou l'onto-logique de l'idée absolue.

9. ÉPILOGUE SUR LE VOCABULAIRE HÉGÉLIEN

Pour l'épistémologicien, le style et le vocabulaire de Hegel sont le propre de la prosopopée où le verbe pronominal accouplé au neutre du tiers (la troisième personne du singulier) constitue la trame du discours métaphysique qui enchaîne les noms inassignables (sans référence) dans une nomenclature ordonnée selon une sémantique spéculative. Mais la grammaire de ce discours est démontable comme décor métaphysique – et non pas déconstructible, d'après une mauvaise traduction de l'allemand <*Abbau*> que l'on trouve chez Heidegger dans son ouvrage *Zur Seinsfrage*. La consécution des moments (figures) de la conscience dans la *Phénoménologie de l'esprit* et la suite nécessaire des moments du concept dans *La science de la logique* ne constituent pas une syntaxe logique, mais plutôt la taxonomie des noms inassignables de l'histoire de la métaphysique. Le lien inférentiel est assez lâche qui va des Présocratiques à Hegel pour reconstruire l'histoire conceptuelle de la métaphysique et enfin clore le cercle de l'idée dans le circuit total des moments orbitaux, oserais-je dire. Lorsque Hegel met en jeu sa dialectique des extrêmes (*Extreme*), ce n'est rien d'autre qu'une syllogistique qui met en mouvement le terme majeur (le plus grand extrême) et le terme mineur (le plus petit extrême) par la médiation du moyen terme ou terme médian (*Mitte*) qui devient précisément moyen (*Mittel*) de la médiation (*Vermittlung*) dans le milieu (*Mitte*) dynamique du devenir. La lexie ne doit pas nous tromper ici. Les commentateurs, comme B. Bourgeois, ne voient dans le vocabulaire de Hegel que « la langue la plus commune » ne pensent pas à lexicaliser le <*Moment*> hégélien. J'y vois plutôt l'irruption de la langue artificielle <*Kunstsprache*> qui vient corrompre subrepticement la langue commune, au point où cette immixtion peut passer inaperçue aux yeux d'un lecteur même averti. On ne saurait prétendre que les termes <*Vermittlung*>, <*Entäusserung*> ou <*Aufhebung*> tirent leur sème de la langue la plus commune. Traduire par exemple <*Aufhebung*> par « relève » à la suite de Derrida peut mener à des effets de style audacieux comme « le se relever » pour <*das Sichaufheben*> de l'Esprit ou de Dieu et comment traduire « *das Sichaufheben des Daseins Gottes* » à la fin de la *Phénoménologie*. Mais il semble que Derrida ait opté à la fin pour « assomption », une terminologie que l'on réservait à la Vierge Marie dans le catholicisme ! – la tradition orientale parlait plutôt de *Dormition*… Hegel nous dit dans la *Science de la logique* qu'il faut comprendre l'*Aufhebung* comme le *tollere* latin dans l'expression « *tollendum esse Octavium* » qui signifie à la fois « il faut couronner (élever) Octave – en tant qu'empereur – et il faut démettre (enlever) Octave ». Soulignons que *tollere* se décline en *tollo, sustuli, sublatum* (participe passé) et que l'anglais s'en est inspiré pour traduire *Aufhebung* par <*sublation*> qui n'a que le seul sens de la négation, semble-t-il.

L'amphibologie guette à tous les détours de la langue hégélienne. Un Joseph Gauvin, attentif au lexique de Hegel, à sa lettre et à son esprit, a introduit le terme extériorisation pour <*Entäusserung*> que d'aucuns rendaient par aliénation, confondant ainsi <*Entfremdung*> et <*Entäusserung*>. D'autres traducteurs bienveillants introduisent un vocabulaire étranger, e.g. l'être-là heideggérien (Hyppolite) pour le <*Dasein*> hégélien qui veut simplement dire existence ou être déterminé – comment traduire <*das Dasein Gottes*> sans tomber dans un absurde « être-là de Dieu ». Je note que Hans-Georg Gadamer qui a été mon directeur de thèse « *Doktorvater* » à Heidelberg utilise toujours le terme « *existence* » pour *Dasein* dans ses textes sur Hegel en anglais. D'autres encore (Jarczyk et Labarrière) s'adonnent à des excès de langage et des barbarismes comme « auto-conscience » (pour <*Selbstsbewusstsein*>) ou « autostance » (pour <*Selbständigkeit*>), alors que conscience de soi et autonomie font très bien l'affaire dans un paysage linguistique tout à fait familier pour Hegel. Quant au terme de sursomption que j'ai introduit, je ne chercherai pas à le défendre ; d'autres l'ont fait (et mieux que moi) et s'ils ont réussi à imposer un lexème audacieux, ce n'est pas sans aller à une guerre où je n'ai pas été combattant, mais Jarczyk et Labarrière attribuent à qui de droit le terme de sursomption dans leur traduction intégrale de *la Phänomenologie des Geistes*. Je n'ai pas vérifié les traductions récentes et les contorsions linguistiques de *La phénoménologie de l'esprit* en français ordinaire ! de Jean-Pierre Lefèbvre à Bernard Bourgeois pour cause de désintérêt.

La leçon ici n'est pas philosophique, puisqu'il n'est pas question de réduire un philosophème à un lexème, comme plus d'un serait tenté de le faire dans une sorte d'onomastique des noms inassignables de la métaphysique, <étymosophie>, science ou sagesse qui puise à l'origine des mots la richesse future de la pensée naissante. Ces jeux de langage ne sont pourtant pas étrangers à la pratique séculaire de la philosophie. D'autres savoirs, les mathématiques et la physique ou la biologie, même les sciences humaines et sociales ont créé leur vocabulaire propre. Il revient au philosophe, qui partage ce privilège avec l'écrivain ou l'artiste, de créer sa langue propre au risque de ne plus y reconnaître sa propre langue…

BIBLIOGRAPHIE

1. Y. Gauthier, *Hegel. Introduction à une lecture critique*, PUL, Québec, 2010.
2. G. W. F. Hegel, *Wissenschaft der Logik*, *Gesammelte Werke*, Band 11, Felix Meiner Verlag, Hamburg, 1968.
3. G. W. F. Hegel, *Phänomenologie des Geistes*, *Gesammelte Werke*, Band 9, Felix Meiner Verlag, Hamburg, 1968 ff.
4. G. W. F. Hegel, *La phénoménologie de l'esprit*, trad. G. Jarczyk et P.-J. Labarrière, Paris, *Folio*, Gallimard, 1993.
5. G. W. F. Hegel, *Science de la logique.* I*, L'Être*, trad. de G. Jarczyk et P.-J. Labarrière, Paris, Aubier-Montaigne, 1976.
6. G. W. F. Hegel, *Science de la logique*. II, trad. De G. Jarczyk et P. J. Labarrière, Paris, Aubier-Montaigne, 1976.
7. G. W. F. Hegel, *Encyclopédie des sciences philosophiques*, trad. B. Bourgeois, Paris, Aubier, 1986.

DEUXIÈME PARTIE

SELECTED PAPERS

CHAPITRE 12

Commentaire de « From the Local Observer in QM to the Fixed-Point Observer in GR »

Dans cet article[1], je traite de la question de l'observateur local en théorie de la relativité restreinte (RR), en relativité générale (RG) et en mécanique quantique (MQ). J'ai abordé cette question dès mes premiers travaux, en 1971, 1983 et 1992. Pour la RR, je me suis inspiré des travaux de I. E. S. Segal qui a défini mathématiquement un observateur local dans un cadre lorentzien invariant (transformations de Lorentz). La « location ou localisation topologique » de l'observateur fait état simplement d'un ouvert d'une variété topologique (espace topologique qui correspond à un espace euclidien). J'ai voulu généraliser cette notion dans un espace de Hilbert où l'observateur local trouve sa place dans le complément local ou pseudo-complément d'un espace topologique. Le complément local d'un espace de Hilbert est un ensemble ouvert, c'est la place de l'observateur dans l'espace de Hilbert qui s'ouvre sur le système observable représenté par les observables ou quantités physiques. C'est donc à la jonction du système observé, l'ensemble fermé des sous-espaces de l'espace de Hilbert, et du système observateur, que se situe l'observateur local. J'utilise alors une notion constructiviste de E. Bishop héritée du mathématicien intuitionniste Brouwer, la notion d'un sous-ensemble localisé dans un espace topologique muni d'un opérateur qui définit la limite qui sépare le système observé du système observateur. Assis sur la frontière ou sur la limite, l'observateur local occupe l'ensemble nul (ϕ).

Pour la RG, j'utilise une autre notion de Brouwer, le point fixe. L'observateur local ponctuel fixe se situe sur le bord ou sur la frontière de l'univers observable, parce qu'il occupe le centre d'une sphère habitée par un univers homogène et isotropique à courbure positive selon la théorie de la RG et les équations du champ d'Einstein. Cet observateur local situé à la limite intérieure du système observable correspond à un vecteur de longueur zéro sur une surface S^2 pour un sphère close. Ainsi l'observateur local est situé dans un ensemble ouvert de dimension zéro dans un univers observable *n*-dimensionnel.

C'est la MQ et son observateur local qui nous intéresse surtout dans ce chapitre. Il suffirait d'installer l'observateur dans un espace de probabilité fini pour en faire un observateur markovien, c'est-à-dire un observateur stochastique, celui qui effectue les mesures répétées pour définir un processus stochastique qui est une fonction aléatoire à valeurs numériques ou vectorielles. La mécanique statistique s'occupe principalement des processus stochastiques ou aléatoires, comme le mouvement brownien, la marche aléatoire et le processus de Wiener, processus de Markov, etc. Ici, je suis le mathématicien Edward Nelson, inspiré par le physicien hongrois Imre Fényes qui le premier a proposé l'adéquation des processus markoviens et de la MQ ; Fényes dans un série de travaux a voulu dériver l'équation de Schrödinger pour la fonction d'onde des propriétés probabilitaires des processus de Markov en supposant que même les relations d'*indéterminité* (*Unbestimmtheitsrelationen*) ou d'indétermination étaient le résultat de la nature foncièrement indéterministe d'un processus de Markov sans l'intervention d'un processus de mesure ou d'un appareil de mesure, donc sans observateur local (ou global !).

Nelson a voulu reprendre cette interprétation en tentant de montrer l'équivalence de la MQ et de la mécanique stochastique – MQ = MS ou mieux MQ = M (pour Markov) – pour laquelle il utilise un principe de moindre action à la manière de Hilbert pour les équations du champ d'Einstein

$$S = \int L \, dt$$

pour le lagrangien *L* de l'énergie cinétique. Nelson n'a pas besoin de l'observateur pas plus que Fényes, il traite même l'intervention de la mesure de « *Deus ex machina* », la machine étant ici sans doute la MQ sans la machinerie de l'appareil de mesure et de l'observateur. C'est dans une conférence qu'il a donnée à l'Université de Montréal et qu'on trouve facilement sur la toile, *The Mystery of Stochastic Mechanics*, qu'on peut retrouver la question de Nelson. Nelson conclut cependant que les prédictions de la MQ et de la MS divergent. On peut se demander si l'écart entre la MQ et MS n'est pas due justement à l'oubli de la circonstance que représente l'observateur markovien, sorte de deus *in machina*, si j'ose dire. Disons simplement qu'un processus de Markov est un processus stochastique qui décrit un comportement aléatoire futur à partir des informations accessibles au moment de la mesure à propos d'un système physique. Un processus de Markov n'a pas de mémoire de son passé (indéterministe), donc un observateur markovien *indépendant* ne peut définir la marche antérieure ou l'espace d'états des variables aléatoires d'un système observé ou la probabilité de transition d'un état à un autre avant la mesure, alors qu'après la mesure ses prédictions pour le comportement futur du système observé sont fondées sur des mesures répétées dans un espace d'états finis en temps discret ou continu : cela signifie qu'il y donc coupure, rupture ou séparation avec un passé déterministe ou indéterministe antérieur à la mesure.

On peut donc interpréter l'équation de Schrödinger

$$ih /\partial /\partial\, t\, \psi\, (\underline{r},\, t) = \mathbf{H}\psi\, (\underline{r},\, t)$$

dans ce cadre : c'est une équation différentielle partielle pour l'évolution temporelle déterministe de la fonction d'onde en termes de l'hamiltonien **H** pour l'énergie totale du système (énergie cinétique + énergie potentielle). Ce passé déterministe de la fonction d'onde avec amplitude ou densité de probabilité ψ subit cependant un brisure de continuité ou de symétrie, une coupe ou coupure de séparation avec la règle de Born

$$|\psi\, \psi^*| = |\psi|^2$$

dont la dérivation peut être réclamée par plusieurs théories statistiques, déterministes ou indéterministes. C'est que la mesure (par un appareil de mesure) entraine un calcul finitaire ou discret pour un résultat bien défini qui est en discontinuité avec la fonction d'onde continue de l'équation de Schrödinger. Remarquons que si la fonction d'onde elle-même a une cardinalité $2^{\aleph_0}$, la formulation statistique requiert seulement la cardinalité dénombrable $\aleph_0$ en vertu de la limite imposée par l'intégrale

$$\mathrm{P}\,(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

dans un calclul de la probabilité P pour un variable aléatoire X d'une fonction de densité de probabilité f dans l'intervalle $[a,b]$. C'est ici que le Qbism (le bayésianisme quantique) change les degrés de liberté en nombre fini N dans un espace des phases d'un système quantique en degrés de croyance d'un agent ! Notons encore la théorie quantique des champs comporte un nombre infini de degrés de liberté et le Qbiste ne veut pas « être dans le champ » ici. Mais c'est là que se joignent la mécanique statistique et la mécanique quantique avec la limite thermodynamique classique, entropie de Shannon et entropie de von Neumann, information thermodynamique et information quantique. Les Qbistes ou les bayésianistes misent sur le stock d'informations antérieures à un acte de mesure concrète pour modifier leur degré de croyance ; de même, les interprétations modales supposent un ensemble d'états quantiques possibles qui devient un état de fait lors de la mesure par le passage du possible à l'actuel sans qu'il y a ait effondrement du paquet d'ondes (postulat de projection) qui contient tous ces possibles. Pour les interprétations modales avec la modalité de possibilité se substituant à l'indétermination de la fonction d'onde avant la mesure, il suffit de dire que la mesure assigne une valeur à un état quantique actuel qui doit correspondre à un état quantique possible ou virtuel. Mais ce réservoir des possibles à une cardinalité $2^{\aleph_0}$ et il n'y a pas de bijection avec un état mesuré de cardinalité tout au plus dénombrable $\aleph_0$. Passage mystérieux (ou saut quantique !) du possible à l'actuel, peut-on dire. J'adresse une critique semblable à la théorie holographique qui suppose recueillir toute l'information contenue dans l'univers observable à la frontière d'un horizon récessif en expansion accélérée. Mais il y a là passage ou transgression qui déborde les deux bords dimensionnels (cobordisme) et qui déforment le contenu informationnel en dépit des théories conformales et superconformales qui voudraient récupérer toute l'information disponible avec des moyens infinitaires, alors que l'information est toujours finie pour l'observateur local avec son objectif pointé sur l'arc de l'horizon.

Il y a là une variation ou une variété du réalisme caché qu'un agent par définition macroscopique veut évaluer de façon probabiliste en pensant récupérer une part de réalité probable dans un univers possible. À moins qu'il n'accorde les degrés de liberté de choix au monde quantique lui-même, comme l'ont fait ou tenté de le faire Conway et Kochen avec leur théorème du libre choix (*Free Will Theorem*) – voir mon article dans ce recueil *A General No-Cloning Theorem for an Infinite Multiverse*. Tout cela relève d'une ontologie de la mécanique quantique *avant la mesure* et seul un observateur local markovien (macro ou micro) *après la mesure*, un *compteur Markov* sans mémoire peut rendre compte et évaluer stochastiquement les résultats de mesure dans une procédure finie sans connaissances préalables et sans degrés de liberté de croyance ! On peut ajouter ici que la liberté aléatoire de l'observateur markovien *marche* aussi pour les mesures macroscopiques, e.g. le rayonnement du fond diffus cosmologique…

Le problème se situe aussi au niveau de la mesure dans le cas de l'équivalence de Nelson MQ = SM. Dans le cas de la SM avec processus de Markov oublieux de leur passé, la théorie est indéterministe de part en part comme l'avait bien vu Fényies, alors que l'évolution temporelle de la fonction d'onde dans l'équation de Schrödinger est déterministe comme le suppose Nelson et elle ne devient indéterministe que par la règle de Born liée à la mesure. Si l'on pense comme Fényies que la fonction d'onde est indéterministe et comme Born que le statut ontologique de la fonction d'onde est indéterminé avant la mesure et que seule la mesure lui octroie une valeur finie et définie, nous avons l'interprétation de Copenhague. L'oubli de cette circonstance met à mal la thèse de Nelson qui suppute que la MQ et la MS produisent des résultats statistiques qui diffèrent par un point (0 et.9), mais le conflit entre les deux résultats peut être résolu si on s'accorde pour dire que la fonction d'onde étant indéterminée peut porter l'*indéterminité* d'un résultat *indéfini* avant la mesure – après la mesure MQ et SM ou M convergent absolument grâce aux mesures répétées de l'observateur local markovien dans sa marche aléatoire à travers le monde quantique…

En réalité, c'est la suite caténaire (chaine de Markov) des observations de l'observateur local qu'il faut interpréter comme évolution temporelle de la fonction d'onde qui devient par là déterministe et puisque la suite caténaire est linéaire, elle est par définition *unitaire*.

Cette solution met à mal aussi bien la théorie déterministe de de Broglie-Bohm ou la théorie de Bohm qui, si elle a les mêmes prédictions statistiques que la MQ après la mesure, se soustrait à la RR (invariance de Lorentz) et à la théorie de la mesure de la MQ (indéterministe) en supposant un position déterminée ou définie pour chaque particule dans l'univers physique, ce qui suppose un univers surdéterministe qui obéit de lui-même aux prédictions statistiques de la MQ sans l'intervention de la mesure ou d'un observateur-mesureur.

Ce débat mène à l'univers stochastique (acausal) de Weyl qui correspond le mieux à mon sens aux décisions markoviennes du théorème du libre arbitre de Conway-Kochen pour la théorie de la mesure que je discute dans mon article de 1993 « A General No-Cloning Theorem in an Infinite Multiverse » dans *Reports in Mathematical Physics.* Récemment, un article de Proietti et alii., paru dans Arkiv.

org (13 février 2019) sous le titre « Experimental rejection of observer-independence in the quantum world » – l'article est paru depuis sous le titre « Experimental test of local observer independence » dans *Science Advances* (20 septembre 2019, vol. 5, no 9, 6 pages) – a fait grand bruit et a ému les ténors populaires de l'interprétation réaliste en MQ ; l'article décrit un arrangement ou appareil expérimental microscopique pour l'interaction système observé-système observateur. L'article met en scène l'ami de Wigner, un paradoxe souvent discuté dans l'interprétation de la MQ : il y est question de l'expérience d'un ami de Wigner que je résume rapidement.

L'expérience de l'ami en laboratoire consiste à mesurer un photon polarisé en deux états superposés (–1 ou +1). De l'extérieur du labo, Wigner doit confirmer le résultat de mesure que l'ami dit avoir obtenu, mais pour Wigner le photon et le rapport de son ami pour un résultat de mesure, disons + 1 sont en superposition et Wigner conclut que son ami tout aussi compétent soit-il ne peut avoir obtenu un résultat précis en vertu d'un processus d'interférence. Proietti et ses collaborateurs ont voulu généraliser cette expérience de pensée et ont proposé un protocole expérimental pour deux observateurs A et B, leurs amis A_0 et B_0 et six photons qui se révèleront des observateurs microscopiques à qui on ne demande que de stoker des informations de l'expérience de mesure dans leur mémoire photonique impliquée dans l'interaction du système observateur avec le système observé. Les résultats statistiques du protocole expérimental par description tomographique de la mesure de l'état quantique du système observé violent par un score de 5.5 déviations standard les inégalités de Bell (pour la théorie des variables cachées locales) et les inégalités plus générales (Clauser-Horne-Shimony-Holt) pour garantir le quorum ou la cohérence des informations obtenues par les observateurs. La violation de ces inégalités confirme donc la validité de la MQ et on peut adopter les postulats des auteurs, soit le libre choix des observateurs, les principes de localité et d'unitarité qui garantissent qu'il n'y a pas de transmission d'information (signal) instantanée et qu'il y un stade ultime unique dans le procès de la transmission avec la somme égale à 1 des probabilités des résultats de mesure ; il ne s'ensuit pas que l'on doive adopter la thèse des auteurs qui suggèrent le rejet du caractère objectif des faits quantiques ou que leur réalité dépend de l'observateur ou de la communauté des observateurs qui pourraient à la limite ne pas s'entendre sur les faits d'un monde commun. Il est certain en tout cas que la thèse popperrienne d'une MQ sans observateur est battue en brèche et que les théories réalistes naïves ou critiques qui prônent une description littérale de l'univers observable sont vouées à l'obsolescence scientifique.

Si l'expérience est avérée, elle ne ferait que confirmer la théorie de l'observateur local amorcée dans mon article de 1971 et explicitée dans mon texte de 1983, résumée dans mon livre de 1992, *La logique interne des théories physiques*, reprise depuis et finalement conclue dans l'article commenté ci-joint. J'y définissais l'observateur local comme indifférent à un dispositif expérimental macroscopique ou microscopique à l'opposé des théories traditionnelles de la mesure, à commencer par la théorie de la complémentarité de Bohr qui suppose une description classique avec appareil macroscopique jusqu'à la théorie de de Broglie-Bohm ou la théorie GRW (Ghirardi-Misner-Weber) qui font toutes appel à un appareillage macroscopique.

Ma posture constructiviste ne fait pas appel non plus au rôle de la conscience dans la théorie de la mesure de la MQ et bien que je demeure un ami de Wigner, je ne partage pas ses états psychiques au-delà de l'espace fini des états physiques après la mesure pour l'observateur local que je définis en termes purement mathématiques sans attributs anthropocentriques terrestres ou extraterrestres !

Pour les observateurs réalistes qui sont essentiellement les variables cachées d'un appareil de mesure microscopique, on peut proposer la trilogie suivante : observables = quantités physiques dans un espace de Hilbert pour la MQ, *beables* = entités physiques pour le terme de John Bell qui a proposé de remplacer observables par « beables » pour des entités physiques sujettes à une possible observation et « believables » ou *bellieviables* (pour John Bell !) pour des entités physiques qui peuvent être inobservables, mais dont on croit qu'elles existent indépendamment de toute observation par un appareil de mesure macro ou micro. Les « bellievables » ou objets de croyance sont le dernier rempart des réalistes naïfs ou critiques comme K. Popper qui a prôné une mécanique quantique sans observateur – mais Karl Popper s'est trompé quand il a pensé que le théorème de Bell sur les variables cachées locales démontreraient une faille dans la MQ de l'interprétation de Copenhague ; c'était avant les expériences d'Aspect et autres qui ont plutôt validé la MQ et Popper a dû mettre un autre débit à son compte personnel de falsificationniste…

Quoi qu'il en soit, les antiréalistes ont beau jeu de tirer profit de l'indécision réaliste et comme Bell le prédisait, il faudrait une théorie surdéterministe pour supporter l'idée de variables cachées non locales qui garantiraient que tous les résultats d'expérience seraient déterminés en l'absence même de l'observateur-expérimentateur. Le réalisme se révèle alors un option métaphysique non falsifiable par définition et l'antiréaliste aurait beau jeu à dénoncer les réalistes cachés, du bayésien modéré en théorie des probabilités qui parle de révision des croyances à l'extrémiste qbiste ou bettabilitarianiste (C. Fuchs) qui joue aux dés avec la MQ à la place du dieu d'Einstein.

Dans ce contexte, l'ami de Wigner joue un rôle de bouc émissaire, si l'on peut dire. Il fait office de doublet expérimental superposé (et intriqué !) à un état quantique que Wigner doit dédoubler dans sa conscience. On a beau jeu de déclarer que les expériences sont incompatibles comme des chercheurs l'ont récemment annoncé, Frauchiger, Brukner, Renner, Fuchs, Shack, en plus de Proietti et son équipe qui viennent d'emboiter le pas avec une expérience microphysique dans l'article cité plus haut. Dans le cas de Proietti, ce sont les six photons (responsables de l'interaction électromagnétique) qui stockent le contenu informationnel de l'expérience multipliant ainsi le nombre des (petits !) amis de Wigner qui doivent entrer dans sa conscience et que Wigner doit démultiplier à la fin. En fin de compte, l'expérience de pensée de Proietti *et alii*. ne fait que miniaturiser l'ami de Wigner et Wigner lui-même[2].

La résolution du paradoxe de Wigner passe par la théorie de l'observateur local et si l'expérience doit être concluante, il faut sauvegarder l'objectivité de l'expérience que seul Wigner peut revendiquer en tant que dernier observateur ou observateur unitaire dans la chaine de transmission ou de communication de l'information ; il doit alors considérer ses amis comme autant de systèmes *observés* microphysiques, lui-même (Wigner) pouvant être considéré comme observateur microphysique, le dernier en ligne peut-on dire. Puisque le formalisme de la MQ ne fait pas de distinction entre systèmes observés et systèmes observateurs et par là entre observateurs micro et macro, l'observateur terminal en bout de ligne, au sens où il occupe le poste d'observateur ponctuel (unitaire), est en droit de considérer les amis observateurs qui le précèdent comme des systèmes observés. C'est là la définition même de l'observateur local universel qui se situe à la *ligne de séparation* du système observé et du système observateur. C'est cet observateur qui *localise* l'expérience, ce n'est pas le système observé qui se localise spontanément comme dans certaines théories de l'effondrement (*collapse*) de la fonction d'onde : c'est encore lui qui localise les corrélations non locales à l'intérieur d'une limite plus ou moins bien définie (la limite de Tsirelson) pour les inégalités de Bell et autres inégalités plus générales dans une MQ indéterministe. Disons-le de nouveau, cet observateur local est un observateur *extérieur*, séparé mais lié au système observé par la structure relationnelle des observateurs de la RR à la RG et à la MQ et c'est localement que les observateurs peuvent arriver au consensus universel – l'observateur *interne* de la théorie des multivers d'Everett ne peut départager un observateur local parmi tous ses clones dans un ensemble non dénombrable de cardinalité du continu $2^{\aleph_0}$, puisqu'ils sont incapables d'effectuer des opérations de mesure finies ou même dénombrables dans un univers inobservable.

Cet observateur local est défini géométriquement et topologiquement en RR, RG et MQ (dans un espace de Hilbert) et sa séparation d'avec le(s) système(s) observé(s) peut être vue comme une coupure ou un choc (*Stossvorgang*) selon l'expression de Born et l'observateur local en vertu de son statut logico-mathématique est un roi sans habits macro ou micro, humain ou non humain (transhumain ?), terrestre ou extraterrestre avec ou sans conscience. C'est là le prix qu'il faut payer pour avoir un seul monde physique objectif face à un observateur local, singulier et universel qui effectue à chaque fois une mesure unique pour obtenir un résultat singulier vérifiable. Ma résolution du paradoxe est réelle (*realistic* en anglais) sans pour autant être partie prenante de l'interprétation réaliste en MQ ou encore d'une interprétation antiréaliste mitigée tributaire d'une posture empiriste ou structuraliste oublieuse de sa genèse constructive.

Le constructivisme logico-mathématique que je défends impose des contraintes théoriques à toute pratique de mesure objective. La logique interne de la MQ n'est pas booléenne et ses caractéristiques topologiques intuitionnistes peuvent être arithmétisées dans une logique polynomiale modulaire[3] capable de gérer les fondements mathématiques de la MQ en particulier à l'aide d'un calcul finitaire qui gouverne aussi bien les résultats uniques des expériences de mesure que les statistiques issues de ces expériences, qu'elles soient stochastiques ou simplement probabilitaires (fréquentistes ou bayésiennes). Pour l'observateur local constructiviste, il ne construit pas la réalité physique, mais il façonne ou modélise un donné indéterminé dans l'interaction d'un système observé et d'un système observateur, ce qui constitue un phénomène physique au sens que l'annonçait déjà un assistant de Bohr, Léon Rosenfeld. C'est dans la perspective de Hilbert et von Neumann que je désigne l'interprétation de Copenhague (Bohr-Heisenberg) comme interprétation constructiviste de la MQ plutôt que comme interprétation instrumentaliste qui a une connotation pragmatique. Ce sont en effet Hilbert et von Neumann qui ont formulé les fondements mathématiques de la MQ avec sa théorie de la mesure qui demeure pour le praticien physicien l'outil privilégié de l'expérimentation et qui confesse souvent que ça fonctionne sans trop savoir pourquoi ; le théoricien est là pour lui donner les raisons de son succès expérimental. À la fin, constructivisme et instrumentalisme sont réconciliables dans une posture fondationnelle constructiviste qui ménage une place de choix à l'observateur local sur le plan théorique et dans la pratique expérimentale à la fois dans un univers aussi bien macroscopique que microscopique en vertu du caractère universel (requis par la MQ) d'un agent mesureur dans un réel mesuré. Cet observateur local doit être interprété en dernière analyse par un *observateur-interprète* local qui dans notre cas est macroscopique en tant qu'agent constructeur de la mesure à l'échelle terrestre.

NOTES

1. L'article est paru dans *Advanced Studies in Theoretical Physics*, vol. 11, 2017, no. 12, 687-707. J'ai corrigé quelques erreurs typographiques. On trouvera des informations complémentaires sur le sujet de cet article dans mes ouvrages *Théorétiques. Pour une philosophie constructiviste des sciences* (Le Préambule, 1982), p. 107-119 pour la MQ et l'équation de Schrödinger et *La logique interne des théories physiques* (Bellarmin/Vrin, 1992) chap. III pour la notion d'observateur local et son rôle en MQ – il s'agit en fait d'une traduction enrichie de mon article en anglais « Quantum Mechanics and the Local Observer » paru dans *International Journal of Theoretical Physics*, vol. 22, no. 12 (1983), p. 1141-1152. Dans un article paru dans la même revue « Relational Quantum Mechanics », *Int. Journal of Theor. Phys.* **35** (1996) : 1637-1678, le physicien C. Rovelli défend un point de vue similaire en insistant sur l'interaction du système mesuré (observé) et du système mesureur (observateur) tout en mettant l'accent sur une soi-disant innovation par rapport à l'interprétation de Bohr de la MQ en supposant qu'il ne doit pas y avoir de distinction entre systèmes microphysiques et systèmes macrophysiques dans sa théorie relationnelle fondée sur l'idée d'un référentiel relativiste pour un observateur privilégié *O* – observateur que j'ai appelé « observateur local ». Rovelli n'évoque pas l'observateur local, mais parle plutôt de *localisation* dans une région finie de l'espace des phases de la formulation statistique de la théorie de la mesure dans un référentiel galiléen pour l'observateur privilégié (*privileged observer*). Je rappelle que c'est I. M. Segal qui a introduit la notion *mathématique* d'observateur local (ou observateur privilégié pour Rovelli) comme référentiel lorentzien pour la relativité restreinte (RR) et j'ai introduit la notion en MQ dans mon article de 1983. Rovelli ne cite pas Segal comme source et

un problème majeur de sa théorie de l'indistinction entre systèmes macrophysiques et microphysiques, c'est qu'il n'y pas d'observateurs microphysiques aptes à transmettre l'information ou le contenu informationnel de l'interaction. Si l'expérimentation de Proietti *et alii* s'avérait, comment Rovelli pourrait-il en rendre compte ? Je rappelle enfin que j'ai évoqué la réalité d'observateurs micro ou macro dans mon article de 1983 à la suite de mes échanges épistolaires avec Irving Segal au début des années 1980 à propos de son ouvrage *Mathematical Cosmology and Extragalactic Astronomy*, Academic Press, New York, 1976.

2. Bien que je ne sois pas l'ami de Wigner dont il est question ici, j'ai discuté avec lui lors d'un colloque à l'Université de Western Ontario (UWO) au printemps 1971. À Wigner qui supposait « que la Lune n'existait pas, s'il n'y avait pas d'observateur de la Lune », j'avais proposé la réponse d'Aristote qui dans sa *Physique* (chap. IV, livre XX, 223a22-223a28) soutenait que le temps est le nombre (*arithmos*) ou la mesure du mouvement et que c'est l'âme (*nous*) ou l'esprit qui nombre ou mesure le temps et donc si l'esprit (ou la conscience pour Wigner) n'existe pas, le temps n'existe pas ; cette réponse d'Aristote, qui confirme la nécessité de l'observateur dans toute mesure, avait comblé d'aise Wigner à tel point qu'il n'a pas protesté lorsque l'on m'a attribué un de ses textes dans les *Actes du colloque* – c'est moi qui ai demandé la rectification ! Pour terminer sur une note plus légère, il est bien certain que Wigner, qui a travaillé à la suite de Weyl sur les groupes de symétrie en MQ et en théorie des particules élémentaires, ne doit pas le prix Nobel à son ami microscopique asymétrique…

3. Pour des précisions sur la logique polynomiale modulaire, on peut consulter mon ouvrage *Towards an Arithmetical logic. The Arithmetical Foundations of Logic* (Birkhäuser/Springer, 2015) ou encore mon ouvrage *Logique arithmétique. L'arithmétisation de la logique* (PUL, 2010).

From the Local Observer in QM to the Fixed-Point Observer in GR

SUMMARY

After the introduction by I.E. Segal of the local observer in his chronogeometrical theory of relativity in [21], I proposed the introduction of the local observer in quantum mechanics [11]. In this paper, I extend the notion of local observer to a fixed-point observer in general relativity as a topological invariant under homeomorphisms. While Einstein's equivalence principle allows for the passage from SR to GR through a local Lorentz frame, the topological invariant provides a unique (homeomorphic) link from the local observer in QM to the fixed-point observer in GR. We use essentially mathematical tools from algebraic topology and transfinite set theory.

AMS Subject Classification : 03E05, 55M05, 60J05, 81P15, 83F05

Keywords : Local observer, fixed-point observer, quantum mechanics, general relativity, algebraic topology, transfinite set theory.

1. INTRODUCTION

In his 1976 *Mathematical Cosmology and Extragalactic Astronomy*. I.E. Segal introduced the chronogeometrical local observer as the mathematical counterpart of a local Lorentz frame. Segal's observer was located in a globally hyperbolic (causal) space as an open connected set of a topological manifold endowed with metric, homogeneous, physical (covariant) properties. The topological setting was meant to cope with causal diffeomorphisms. In my 1983 *Quantum Mechanics and the Local Observer*, the local observer was topologically the local complement of the Hilbert space of QM. Here we don't need causal diffeomorphisms, mainly because we are in an acausal context and partly because of differential defects in 4-dimensional soft manifolds as locally Euclidean spaces (the Donaldson-Friedman deformation theory in the 1980s). Only the more general homeomophisms between n-dimensional spaces and $\mathbf{R}^n$ secure the algebraic-topological status of the local observer from QM to GR. In that context, I demonstrate a general theorem on the local observer as a topological invariant in a stochastic framework in which the local observer of QM encompasses the relativistic observers in SR and GR even in a cosmological multiverse scenario as a unifying principle from QM to GR.

2. THE TOPOLOGICAL LOCATION OF THE LOCAL OBSERVER IN QM

I adopt the usual Hilbert space formalism for QM to define the topological location of the local observer. I retrieve here a theorem and its proof from my 1983 paper. Consider Hilbert space as a metric and a topological space ; D is in this case the set of subspaces of the Hilbert space and E is obtained by local complementation ; E is the « location » of the local observer –.

We shall see that Hilbert space can make room for a notion of local observer : the observer becomes the (local) complement of the observable, *i.e.* the closed linear manifolds of the Hilbert space – of course the whole Hilbert space contains all bounded linear transformations (defined on open subsets) and is therefore not orthocomplementable – but here we obtain non-orthocomplementability in a different way. (Remember that in a finite-dimensional space, every linear manifold is closed).

THEOREM 1. *Hilbert space admits the observer as an open set through local negation (or complementation) – that is, we do not have orthocomplentation on the whole Hilbert space even in the finite-dimensional case.*

Proof. Let H be an n-dimensional Hilbert space and let $F^{\perp}$ be the set of closed linear manifolds $f^{\perp}$, $F^{\perp}=F^{-}$, the closure of all f. One can now define the relative complement F^{+} of F^{-} such that $\mathrm{H}-F^{-}=F^{+}$; F^{+} is then an open subset. From the topology, we pass to the metric of H ; for the metric of H, a subset A of H is located, if the distance

$$\forall x \in \mathrm{H} \quad \rho(x, A) \equiv \inf \quad \rho(x, y) : y \in A$$

from x to A exists. The metric complement $-A$ of a located subset A is the set

$$-A \equiv \quad x : x \in \mathrm{H}, \rho(x, A) > 0$$

which is open, since

$$\forall x, y \in \mathrm{H} \quad \rho(x, A) \leq \rho(x, y) + \rho(x, A) \quad .$$

Here the observer has a topological and metrical place as the local complement of the closed set of subspaces of H. Brouwer had introduced the notion of located subset (or subsequence) and E. Bishop has put it to use in his constructive analysis [1]. In order to further constructivize this result, I introduce the topological boundary operator b which is to be interpreted as the boundary between the observable (or observed system D) and the observer (the observing system E): we have the relations

$$E = \neg D - b(E)$$

and

$$D = \neg E \cup b(D)$$

thus

$$\neg D(\mathrm{H}) = E(\mathrm{H}) - b \quad E(\mathrm{H}) \quad .$$

The interior of E, *i.e.* E°, is the complement of the closure of the complement of E and is thus open; we have also

$$E = E^{\circ}.$$

For any x, $D(\neg x)$ means that $x \in E$. So for some a, we have

$$E(a) = D(\neg a) - b \quad D(\neg a) \quad ;$$

On the other hand, the closure of D, *i.e.* D^{-} implies that

$$B \quad D(\neg a) \quad = a^{-} \cap (D - a)^{-}.$$

Hence

$$A^{-} = a \cup b \quad D(\neg a)$$

and

$$a^{-} \in E(\mathrm{H}) = a \in D(\mathrm{H}) \cup b \quad a \in D(\mathrm{H})$$

and

$$a \in D(\mathrm{H}) = a^{-} \in E(\mathrm{H}) - b \;\; E(\mathrm{H})$$

which shows that E is disjoint from its boundary, that is, it is open and consequently the whole Hilbert space $D(\mathrm{H}) \cup E(\mathrm{H})$ is not orthocomplementable, since local complementation excludes $(a^{-})^{-} = a$.

Remark: The effect of abandoning orthocomplementation amounts to adopting an indefinite metric which may, in fact, be more convenient for some physical theories (*e.g.* quantum field theories) where the local observer has still its topological prevailing location. I skip here the finite derivation of the result in a modular polynomial calculus that can be found in (Gauthier [15], chapter 5).

3. A MARKOVIAN OBSERVER

I define the Markovian observer as opposed to a deterministic Laplacian observer or the observer on Sirius who can describe the initial conditions of a system in order to predict its final state. The stochastic Markov-state observer has no memory and its predictions are based only on actual observations, experiments and measurements realized in actual discrete time on a discrete state space. Probability can consequenlly be defined in terms of a finite probabilty space (E. Nelson [18]): a finite probability space is a finite set Ω and a (strictly positive) function pr on Ω such that for $\omega \in \Omega$

$$\sum pr(\omega) = 1$$

and expectation is defined

$$Ex = \sum x(\omega)\, pr(\omega)$$

for a random variable x; the probability of an event $A \subseteq \Omega$ is

$$Pr\, A = \sum_{\omega \in A} pr(\omega).$$

Nelson also defines the complementary event as $A^{c} = \Omega$ for all $\omega \in \Omega - A$. This is the Boolean complement which we replace by our local complement $(\Omega - a) + b$ or $(1 - a) + b$ for which we have a finite derivation (see again Gauthier [15], chapter 5).

What is the use of a finite probability calculus in QM? Von Neumann's work in 1927-1932 focuses on what is called the finiteness of the eigenvalue problem. The point here is that any calculation is finite and since we have only finite results, those must be the outcomes of a finite calculation which is itself made possible only if the analytical apparatus contains the mathematical structures which enable such calculations. Such a formalism is the complex Hilbert space with

$$|\Psi| \in L^2(\mu)$$

where μ is a real positive measure on the functional space L^2 (*i.e.* the equivalence class of square-integrable functions). The integral

$$\int |\Psi|^2 \, d\mu$$

is finite, which is equivalent to the fact that, in the theory of bounded quadratic forms, the sum

$$K(x,x) = \sum_{p,q=1}^{\infty} k_{pq} x_p x_q$$

of all sequences $x_1, x_2, \ldots$ (of complex numbers) is finite in an orthonormal system of vectors. That mathematical fact, which Hilbert derived in the theory of integral equations in 1907, states that a linear expression

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + \ldots$$

is a linear function, if and only if the sum of the squares of the coefficients in the linear expression $k_1 x_1, \ldots$ is *finite*. The theorem, inspired by Kronecker's result on linear forms (homogeneous polynomials), is the very basis of the Hilbert space formulation of *QM*. Notice that on the probabilistic or statistical interpretation, the "acausal" interaction between an observed system and an observing system takes place in a given experimental situation and produces a univocal result of finite statistics for real or realized measurements.

In order for real measurements to have real positive probability values, the analytical apparatus must satisfy certain realizability conditions, <*Realitätsbedingungen*>, as Hilbert puts it[16]. For example, orthogonality for vectors, linearity and hermiticity for functional operators and the finiteness of the eigenvalue problem for Hermitian operators, as in von Neumann's *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* [23], are such constraints of realizability.

In that connection, the Born rule

$$|\,\psi\,\psi^{*}| = |\psi|^{2}$$

determines the probability calculus of acausal stochastic processes like atomic frequencies to which Born assigns a probability function written as $\Phi_{(n,m)}$ (with a time factor) in his 1926 paper [2]). He adds in a note that it is only after a more precise calculation that he found that the probability is proportional to the square of the Φ function making it non-linear, although he confessed in his 1954 Nobel Prize lecture that he was influenced at first by Einstein's idea of the square of optical wave amplitudes as probability density for the occurrence of photons (see Born [3]). As a matter of historial fact the limit formula used by Einstein in his 1905 photoelectric effect paper for frequency v^2 appeared already in the 1900 Planck's paper on blackbody radiation and in the Rayleigh-Jeans law of 1900 for the ultraviolet problem, the three components of the birth of quantum theory (*old quantum mechanics*). Born also says that he thinks that the atomic world is not determinate, but he admits that this is a philosophical question and Born adds that it is not conclusive. However, Heisenberg's uncertainty relations with the the fundamental non-commutation relation for conjugate canonical variables, e.g. position and momentum

$$pq - qp = i\hbar \qquad \text{with } \hbar = h/2\pi$$

retains some indeterminacy (*Unbestimmtheit*) within the measurement process itself, while Bohr's complementarity principle attempts to recover some determinacy in terms of complementary descriptions of causal conservation laws for dynamical variables and spacetime coordinates.

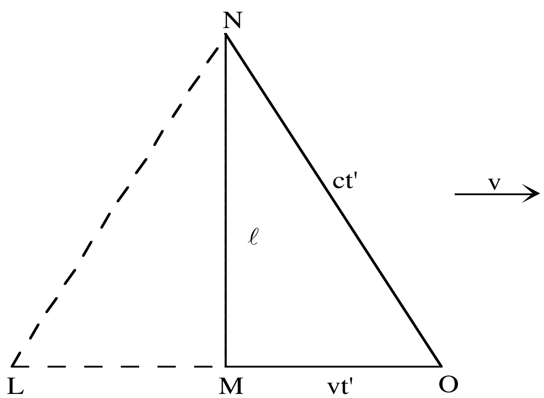
In any case, I assume that in the context mentioned above, it is the finiteness of the measurement process of eigenvalues in an orthonormal system of vectors that is responsible for the Born rule besides the linear wave function of time evolution in Schrödinger's partial differential equation

$$ih\,;/\partial/\partial t\;\psi(\underline{r}; t) = \mathrm{H}\psi\,(\underline{r}; t)$$

with values $2^{\aleph_0}$ in **R** and **C**. A memoryless Markovian observer would count only on a finite set of experiments or measurements to predict statistically the future behaviour of a quantum-mechanical system and would tend to identify QM with statistical mechanics as Nelson suggested. And here is the crux of the matter. The Markovian observer sequentially order his observations in a catenary (chain) way which is necessarily *unitary*, a requisit of MQ with locality. One can then interpret the linear Schrödinger equation as indeterminate, becoming determinate only after measurement by the orderly evolution of transitions between observations realized by a local Markovian observer in his random walk across the quantum world… A Bayesian observer on the other side would use a calculus of prior probabilities to retain a causal link to the past behaviour of the observed system in a more or less deterministic spirit.

4. THE RELATIVISTIC OBSERVER

The relativistic observer is definitely determinist. In order to define the local observer in relativity theory, I start with a thought experiment on a space-time vessel for the derivation of special relativity (SR). Take an inertial system, the space-time vessel at rest with ℓ the length or the height of the stationary mast and set the system in uniform motion with velocity v:



A light beam leaves L, is reflected by N and returns at O; in this scheme ct' is the distance traveled by the light beam and vt' the distance traveled by the system in uniform motion while ℓ is simply the distance traveled by a light signal in an inertial system. We have $t = \ell/c$, we have also the Pythagorean theorem for a right-angled triangle with sides a and b and hypotenuse c: $c^2 = a^2 + b^2$ which gives

$$(ct')^2 = \ell^2 + vt'^2$$

then $$\ell = \sqrt{(ct')^2 - (vt')^2}$$

by $t = \ell$ / c, one has

$$t = \sqrt{(ct')^2 - (vt')^2 / c^2} = t'\sqrt{c^2 - v^2/c^2}$$

which gives $$t' = \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

therefore $$t' = t / \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

The derivation of the central formula in SR in six easy steps:

1. The Pythagorean theorem: $c^2 = a^2 + b^2$
2. $ct'^2 = l^2 + vt'^2$
3. $1 = \sqrt{ct'^2 - vt'^2}$;
4. $t = \sqrt{ct'^2 - vt'^2 / c^2} = t'\sqrt{c^2 - v^2/c^2}$
5. $t' \sqrt{1 - v^2 / c^2}$
6. $t' = t / \sqrt{1 - v^2 / c^2}$. |

Consequences:

1. $t' = t / \sqrt{1 - v^2 / c^2}$ ≤ 1 for time dilation
2. $l' = l \sqrt{1 - v^2 / c^2}$ ≥ 1 for Lorentz-Fitzgerald length contraction.

The transition from inertial systems to local Lorentz frames in accelerated systems offers a generalization from SR to GR via Einstein equivalence principle and the general covariance principle for coordinate transformations in a Minkowskian universe. Recall that I.E. Segal has defined his topological observer as a local Lorentz frame to obey the equivalence principle. Recently, S. Nomura in his paper [19] has introduced a metric (geodesic) observer in a supersymmetric Minkowskian universe with the metric invariant

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

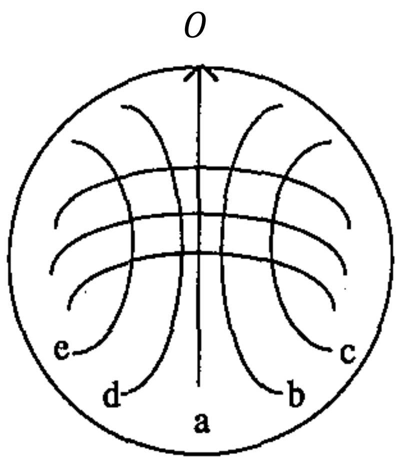
for the metric element in SR and

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu \text{ for } \mu, \nu = 1,\ldots, n$$

for the fundamental tensor of GR pseudo-Riemannian metric for

$$R_{\mu\nu} - {}^1\!/\!_2\, g_{\mu\nu} R - \lambda g_{\mu\nu} = -\, 8\pi G T_{\mu\nu},$$

Einstein's field equations of GR in the $\mu\nu$ geodesic parameters of a Minkowskian manifold. In Nomura's observable universe (a matter bulk with an apparent horizon) which he claims is completeley described by the universal wave function $\psi\,(t)$, the single observer sits on a geodesic that I interpret as the origin O in the following Penrose diagram



We assume that spacetime is a 4-dimensional sphere or an hypersphere in $\mathbf{R}^4$ and we take the 3-surface of this quadridimensional hypersphere to obtain a spherical space. One can then derive the linear element ds^2 by symmetry stipulations which lead to a closed sphere S^2. From the viewpoint of O, S^2 has no priviledged direction and the universe is isotropic and homogeneous according to the cosmological principle. The origin O can be considered as a fixed point or a vector of length 0. We have here Brouwer's theorem :

THEOREM 2. *Any closed ball is a space with a fixed point in* $\boldsymbol{R}^n$ *provided that any homeomorphism in* S^2 *contains a fixed point, that is there must be a vector of length 0 in the vector field of* S^2.

Proof. Immediate. See section 5 for details.

The vector of length zero corresponds topologically to an open set separating the local observer from the closed sets of the closed ball and the equivalence principle guarantees that the local Lorentz frame as an open set is projected on the GR cosmic scene. This is our local observer or fixed-point observer in a spacetime continuum which is an n-dimensional manifold homeomorphic to the Euclidean space $\mathbf{R}^n$. In that connection the continuum is a closed connected set of points and an other theorem of Brouwer (see [5]) states that an n–1 dimensional continuum separates an n-dimensional Euclidean space in two regions, in our case, the region of the fixed –point observer and the region of the observable universe.

Nomura's mega-universe of eternal inflation and infinite non-cloning universes mentioned above has fractal dimension, but its topology is embeddable in a Banach space and the contraction mapping theorem implies the existence of a fixed point in metric spaces, in such a way that Nomura's supersymmetric Minkowski space is topologically contractible to a point as if the observable universe would collapse in Nomura's single observer, our local fixed-point observer !

The same goes for other cosmological multiversal theories like the brane cosmology of M-supersymmetric theory in 11 dimensions which limits the number of universes around 10^{500}, since the D-brane or « multibrane » universe would not allow for homeomorphic images, except for homological mirror symmetry (Kontsevich). All these cosmologies must admit dimensional asymmetry, but they have to make room somehow for the local observer.

From the perspective of the local fixed-point observer, the cosmological holographic principle which reduces the dimensions of 3-dimensional universe to a 2-dimensional sphere is certainly compatible with our result, since everything happens *outside* the local observer and the physical universe appears as a homeomorphic image to the *same* local observer. In the more general string-theoretic landscape with conformal field theory CFT, one has the ADS/CFT (ADS for anti-de Sitter space) duality with the Maldacena-Witten equivalence principle in which a higher dimension could be holographically reduced by one dimension on such spaces as Calabi-Yau or Kähler manifolds, all complex structures defined on **C**. Here is an apparent contradiction with Brouwer homeomorphic fixed – point invariant, since duality equivalence would imply homeomorphic images of worlds in different dimensions $m \neq n$, but there is no problem if the fixed –point invariant is the local observer or *holographer*. Put differently, the local observer is a fixed-point observer in interaction with the observable universe and even though string theory (superstring or M-theory) is a viable theory as a finitary renormalizable theory, it should be free of non-finite holographic information content at the boundary of a finite visible universe with a receding horizon in accelerated expansion. In any case, the cobordism needed to transgress this limit of the boundary is bound to deform, not conform the information available as it is supposed in conformal and superconformal theories, as I have explained above. Here again the lone local observer as the ultimate holographer or *informer* can judge of the information content available in the observed system or observable universe.

Let us remark finally that the local observer from a topological point of view is a fixed-point observer in interaction with the observable universe and as a primary topological invariant, it is gauge invariant and can trespass dimensional barriers. The local observer has nothing to do with the antropic principle, since it is any observing system, may it be human or non-human, experimental apparatus or robot, macroscopic or microcospic, at the center of the observable universe.

5. THE FIXED-POINT OBSERVER

I recall the general theorem I have formulated in my 2013 paper (see Gauthier [14])

THEOREM 3. *In an n-dimensional infinite universe, there cannot be an exact reproduction or homeomorphic images of items (finite or countably infinite) in any finite or countably infinite* $\aleph_0$ *subuniverse of the uncountable multiverse of the power of the continuum.*

Proof. I skip the proof that I had given in the paper to adopt it to the notion of the fixed-point observer in GR in the following theorem:

THEOREM 4. *The local observer as a fixed-point observer is the central topological invariant under homeomorphisms being located in an open set of dimension zero in any universe of finite or infinite dimension.*

The topological setting: Let us consider an n-dimensional Riemannian (semi-Riemannian) or Lorentzian spacetime for GR. We are interested in the topological manifold, a spacetime deprived of its metric field which is locally Minkowskian. What is relevant here is that the topological manifold locally corresponds to an n-dimensional space, i.e. a topological space is locally Euclidean and a locally Haussdorf space as an n-dimensional manifold is homeomorphic to $\mathbf{R}^n$. Such a setting is also appropriate for the topological field theory of string theory in some finite dimension (10,11, 26) with closed strings, loops and knots in at least 10^{500} universes.

The most general setting is however set-theoretic combinatorial: an arbitrary subset X of a denumerably infinite set $\aleph_0$ is included in the power set of that set, that is

$$X \subseteq P(X)$$

and by the Cantor theorem on cardinalities

$$\forall X \quad \text{card}\, X < \text{card}\, P(X) \;,$$

the power set $P(X) > X$, $P(X) = 2^X$ and for a denumerable set $\aleph_0$

$$P\,\{\aleph_0\} = 2^{\aleph_0} = c \text{ (the continuum)}$$

and $P\{\aleph_0\}$ contains $\{\varnothing\}$, {finite subsets}, {denumerable subsets $\aleph_0$}, $\{2^{\aleph_0}\}$. Thus the continuum has cardinality $2^{\aleph_0}$ and – independently of the Continuum Hypothesis which asserts that $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ or the Generalized Continuum Hypothesis $\forall\sigma(\aleph_\sigma < 2^{\aleph_\sigma} = \aleph_{\sigma+1}$ – Cantor has shown that all continua in any dimension are *isomorphic* (see Cantor [6]), but Brouwer has subsequently shown that they are not *homeomorphic*, that is the bijection is not continuous, for example there is no continuous transformation between points on a circle and points on a sphere.

Recall that the power set 2^n, the set of all the subsets of a given set n, represents all the combinations C of the elements or members of the set. There is no bijection between $\aleph_0$ and $P(\aleph_0)$ and *a fortiori* there is no continuous bijection between an arbitrary subset finite or denumerably infinite ($\aleph_0$) and the power set of cardinality $2^{\aleph_0}$. This is the situation in metric spaces with Hausdorff dimension, finite and infinite (or transfinite). Turning to the topological dimension setting, we have topological spaces (manifolds) which are locally Euclidean R^n. Here we deal with homeomorphic mappings and since Brouwer's proof on the invariance of the dimension number works for open sets and the system of their neighbourhoods, the argument is straightforward: there is no homeomorphic image of an n-universe to an m-universe for $m \neq n$. We can still specify our argument to metric topological spaces, for example a Hilbert space which is also a Banach space where we have the open mapping theorem which sends open sets to open sets between Banach spaces of finite or infinite ($\aleph_0$) topological dimension. Moreover, the sequence of linear subspaces of a Banach space has a local open complement by the following argument:

Let B be an n-dimensional Banach space and let $F^{\perp}$ be the sequence of closed linear manifolds or subspaces $F^{\perp}$ of B. Set $F^{\perp} = F^{-}$, the closure of all $F^{\perp}$. The local complement F^{+} of F^{-} such that

$$F^{\perp} = F^{+} - F^{-}$$

is an open subset of B. If we take a locally convex space as the space B, the sequence G of open subsets g containing a neigbourhood of each of their points admits readily a local complement which is also open (by locality), since the metric complement

$$-A \equiv \quad x{:}x \in X, \rho(x, A) > 0$$

of a located subset A, *i. e.*

$$\rho(x, A) \equiv inf \quad \rho(x, y){:}\ y \in A$$

(if this distance from x to A exists $\forall x \in X$) is open, for we have

$$\rho(x, A) \leq \rho(x, y) + \rho(x, A) \quad (\forall y \in A)$$

(as we have seen in THEOREM 1). A still more special case can be obtained, if we restrict ourselves to a fixed point and a local homeomorphism, a fiber in the language of sheaves, defined by the restriction on a function f: $X \rightarrow Y$ for topological spaces X and Y with

$$f\,X{:}X \rightarrow f(X)$$

and the inverse image $f^{-1}(y)$ for $y \in Y$. Here again we have an open set (and neighbourhoods) and it is only in spaces of the same dimension that this obtains, since as Brouwer's theorem shows for spaces of different dimensions $n \neq m$, there is no homeomorphic image (or open map) in the neighbourhood of an open set in a Banach space, even at infinitesimal distance. For the fixed-point observer, we need Brouwer's theorem in (Brouwer [4]):

> «A one-to-one continuous transformation of an n-dimensional element in itself possesses necessarily a fixed point».
>
> (my translation)

The element in question here may be a closed ball or a closed disk; I use it in the form of a continuous function on a compact connected subset of a Euclidean space to itself. There the fixed point is an open set and I identify it with the fixed-point observer. Thus the fixed-point observers constitute a connected set or rather the universal connection of observers in a domain of invariance and this makes the fixed-point observer the fundamental topological invariant.

Fixed points are invariant under homeomorphisms and their domain of invariance (see Brouwer [5]) extends to continuous mappings between subsets of $\mathbf{R}^n$. Various extensions of Brouwer's fixed point theorem reach up to to theorems on random fixed points in probabity theory on so-called Polish spaces. From a logico-mathematical point of view however, there are limitations, for example in non-expansive selfmappings of complete metric spaces, but it always possible to define an asymptotic fixed point – for this see Kohlenbach [17] and Gauthier [13]. In our context, a random fixed-point observer is indeed part and parcel of stochastic processes. We assume that our metric space is complete in the usual Hilbert space of QM and in an indeterministic universe, the random observer is a fixed-point observer determining in a Markovian state space the probability density of upcoming events in the randomly observed system.

The local fixed-point observer may then be the connecting link of observers not only in one universe, but in the multiverse transgressing (in a random walk across worlds!) different dimensions beyond the 4-dimensional spacetime of GR, if one is willing to speculate on the possibility of a multiversal observer.

6. REALIST OBSERVERS

Most physicists (and philosophers of physics) don't seem to be very sensitive to the mathematical and logico-mathematical background of their hypotheses and speculations. In particular, they have most of them a loose informal sense of the concept and word « infinite », especially those physicists and philosophers who propose realist foundations of physics. In connection with our discussion, it is transfinite set theory which appears to be the crux of the matter, since the classical example is H. Everett's many-universe theory. Everett defended the view that the universal wave function ψ in the Schrödinger wave equation ramifies in an infinite multiplicity of worlds with an « internal » observer sitting on a branch of the multiverse, the actual world of measurement experiments. Such an internal observer plays a dual role, being part of the observed system and the observing system at the same time. But the main problem concerns measurement. What does this observer really measure? From a set-theoretical point of view, the universal wave function has the cardinality of the continuum $c = 2^{\aleph_0}$ having its values in **R** and **C**, while measurements have at most the cardinality $\aleph_0$ and there is no bijection between $\aleph_0$ and $2^{\aleph_0}$. This means that the universal wave function remains inaccessible to measurement, as is any branch of the ramification. Everett's thesis that the formalism generates its own interpretation is at stake, since the theory is inconsistent on mathematical grounds. An other example is the recent proposal of G. t'Hooft.

G. 't Hooft defends a realist interpretation of QM in his long working paper *The Cellular Automaton Interpretation of Quantum Mechanics* [22]. The author advocates a deterministic or superdeterministic view of the universal wave function for the Schrödinger equation that would not ramify as in Everett's many-universes interpretation – they are *practically* uncountable, as 't Hooft says in his informal idiom –, but would give rise to a unique universe, a fluctuating vacuum filled with « solid » quanta or « fluid » particles that would obey a lawlike determinism evolving from a given fundamental field such as a scalar field or a quantum (true or false) vacuum. The entire universe of the wave function has a real deterministic *ontological* basis in Hilbert space following 't Hooft. But 't Hooft doesn't say that such a basis must have a finite cardinality or at most an infinite countable cardinality $\aleph_0$. The universal wave function ψ with its values in **R** and **C** has however the uncountable cardinality $2^{\aleph_0} = \beth_1$ (beth number), the power of the continuum – the continuum hypothesis (CH) $c = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$ is not needed in our discussion –. The infinite-dimensional Hilbert spaces that are used in the separable space topology are all homeomorphic in countable cardinality (of a countable orthonormal basis): a Hilbert space of uncountable cardinality $2^{\aleph_0}$ is not separable and the notion of homeomorphism here has the usual definition of a bicontinuous bijection, that is, if the function $f(x)$ is continuous, its inverse $f^{-1}(x)$ is also continuous. The same holds in the more general Fock spaces for the second quantization in quantum field theory with its many – particle systems and von Neumann C* separable algebras, while larger spaces like infinite-dimensional Banach spaces equipped with an uncountable Hamel basis (provided by the axiom of choice) smash all dimensions in one *indistinct* all-encompassing continuum. Separable Hausdorff spaces as functional spaces have a cardinality higher than the continuum c, that is $\beth_2$ or 2^c, but their Hausdorff dimension d for regular metric spaces like Euclidean spaces $\mathbf{R}^n$ or $\mathbf{R}^\omega$ (the ordinal of $\aleph_0$) corresponds to the finite or countable dimensions of Hilbert spaces – the Hausdorff dimension d for irregular finite or countable metric spaces is 0 –. Hilbert spaces of finite or $\aleph_0$ dimensions are also Banach spaces, but they are the natural setting for self-adjoint operators and observables designed to capture the finite probability values of the Born rule ($\psi^*\psi = |\psi|^2$) for *actual* concrete measurements. There is no bijection between $\aleph_0$ and $2^{\aleph_0}$, the set of all finite and infinite subsets or combinations of $\aleph_0$ quantum states. So the universal wave function is inaccessible or unassailable from the $\aleph_0$ infinite-dimensional Hilbert space perspective. The case of finite-dimensional Hilbert space does not fare better and is still worse for 't Hooft cellular automata or finite lattice-theoretic devices, since Hilbert spaces are not homeomorphic over different dimensions $m < n$ and cannot reach up to a unique infinite-$\aleph_0$ dimensional Hilbert space. What this means is the mathematical fact from transfinite arithmetic that if the universal wave function ψ could be *realized*, the one universe would be in all its states at once or in contradiction to 't Hooft view that there is only one state of the universal wave function at any instant. In both cases though, such a universe would be indeed immeasurable – with no experiment whatsoever to measure anything and there would be no need at all for a measurement theory, observers, no Hilbert space of observables, not a quantum bit of quantum logic and no-go theorems, as 't Hooft notes, and for that matter ultimately no QM and no physics at all!

A third example is S. Gao [9] tentative interpretation of QM in terms of a realist ontology of discontinuous random motions of particles accounted for by so-called «protective» measurements. In his defence of discontinuous functions, Gao refers to measure theory and the Borel-Lebesgue duo for their exploitation of the notion of discontinuity in a set-theoretic context. Let us see the definition of a discontinuous function; the function $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ is discontinuous on a point a, if it is not continuous there, that is in the real interval I [0,1] one has:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \eta > 0 \; \forall x \in I \, ([|x - a| < \eta \to |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$$

(for a continuous function, we have $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$) for arbitrarily small η and ε. In other words, a function is discontinuous if it is not continuous. This situation is similar to transcendental number theory: a number is transcendental, if it is not algebraic, i. e. it is not the solution of an algebraic equation. Transcendental numbers defined by negation are the most numerous among real numbers and discontinuous functions defined similarly are more numerous than continuous functions, but like transcendental numbers they are hard to find or to describe explicitly. For the Lebesgue measure, the cardinality of the Lebesgue tribe is 2^c or $\beth_2$, that is beyond c the continuum, but a Lebesgue measure is either finitely additive or σ – additive (denumerably additive) for all mathematical purposes. Again the continuum **R** or its power set are nor accessible to measurement. Realist ontologies tend to fill up **R**, the real continuum and its power set $P(\mathbf{R})$, the set of all real-valued functions, with real physical particles. Such views pertain to metaphysical speculations. There is no motion, no randomness in the static mathematical continuum as a completed non-denumerable infinite totality and for that matter transfinite set theory even postulates (Zermelo's well-ordering axiom) that all sets are well-ordered leaving no room for jumps, even at infinite limit ordinals. We should remind here that from a mathematical point of view, even in a 4-dimensional spacetime continuum, non-denumerable pathologies are due to a dimensional surgery of deformations (the Friedman-Donaldson theory). The assumption of a *full* stochastic continuum distillating probabilities by the Born rule confines again to an inconsistent QM foundation. Other realist approaches, for example the de Broglie-Bohm interpretation of the wave function or the coherent histories approach share the same cardinal defects of *cardinality*, if I may say.

In the case of the Broglie-Bohm theory, a pilot wave crosses the entire universe in a continuous trajectory as a non-local non-relativistic quantum system while consistent or rather coherent histories « decohere » into $\aleph_0$ denumerable sequences among $2^{\aleph_0}$ non-denumerable divergent subsequences without a finite probablity calculus being able to choose among them. Infinities of different cardinality also abound in quantum field theories and Feynman integrals are filtered by the Feynman diagrams calculus oblivious of the mathematical inconsistent background. Renormalization is not very helpful here leaving behind still too many rampant infinities. Even modal interpretations that are only halfway realist suppose an indefinite or indeterminate dynamical state potentially becoming a real actual definite value state upon measurement.

The moral of the story is simple. Realism and determinism in physics must be grounded on mathematical realism. Transfinite set theory is the utmost realist theory of the mathematical continuum and any theory of the real physical continuum must be aware of the benefits and also of the pitfalls of the exploration and exploitation of the continuum. Schrödinger's quantum version of the classical Hamiltonian wave equation is a deterministic configuration of the physical continuum and as such it is immune to the observer and to finite measurement. But experimental physics is a finite measurement process and theoretical physics has to provide the adequate analytical apparatus for the experimental apparatus. A constructivist or « finitist » theory is needed to counteract the excesses and the inconsistencies of physical and metaphysical realism. Here Hermann Weyl, the pionner of modern gauge theory, could be the good measure of the constructivist approach.

One should go back to Hermann Weyl for a more sober appraisal of the probabilistic approach to physics in a little-known 1920 paper (see [24]). At the time, Weyl shared with the intuitionist Brouwer the idea that the mathematical continuum was a process of becoming « *ein Prozess im Werden* ». For Weyl, the physical world is also in an infinite (endless) process of becoming. While the causal outlook is bound to the eternal cycle of causal chains, the statistical or probabilistic view privileges decisions that are autonomous and causally absolutely independent of each other « *selbständige, kausal voneinander absolut unabhängige Entscheidungen* » ([24], p. 541). Weyl adds that these « decisions » are the real ingredients of the world. The causal static view describes only the world scene « *Schauplatz* », not the real events (of the statistical probabilistic worldview), Weyl concludes – see Gauthier [12] for Weyl's view on the causal universe of Relativity Theory and also Weyl [24] for his general philosophical outlook –.

Weyl himself uses the binomial distribution ([18], 539) to stress the stochastic independence of physical events – Weyl had insisted on the *one* world of infinitely novel becoming. Let us start with the binomial distribution

$$p(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

and the expansion of the binomial coefficient given by the factorial

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \; for \; \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = {}_nC_k$$

for the combinations C with the power set 2^n of a set of n finite elements or experiments. Finite experiments include actual experiments and thought experiments that are the free-will choices of the experimenters as accounted for in the recent Conway-Kochen proposal (see [7] and[8]). Their free-will hypothesis extends to the Weylian decisions (*Entscheidungen*) in a probabilistic universe. Instead of the universal free-will postulate, random observers could play the role of free-will observers in a stochastic universe without assuming individual conscious choices, simply because randomness fills the purpose of a statistical mechanics identifiable with quantum mechanics without collapse, only the determination of the indeterminate in the observed-observer in the meausurement interaction, and without consciousness (the von Neumann's cut or *Schnitt*) unless consciousness is conceived as a purely physical process.

A Markovian observer as described above (in Section 3) has no memory and its random observations, experiments, measurements have no past. It is a discrete observer in a finite probability space where a stochastic process corresponds to repeated independent observations of a given random variable the state space of which is either finite or denumerable (Kolmogorov's σ-additivity) in ergodic theory and statistical mechanics. In that context, the wave function ψ of the Schrödinger equation has no determinate past, it is as indeterminate as a mathematical continuum from a Brouwerian point of view and it is only when a measurement interaction occurs that a determinate state is produced with Born-ruled probability values. Quantum mechanics as the fundamental theory of the physical world is thus an indeterminist theory with a determinate outcome only in measurement theory of the local interaction between an observed system and an observer system. Kochen and Specker believe that randomness does not account for their free-will ontological notion, but they think of probability theory in retrospect as if it could recover the stochastic processes or chaotic fluctuations that we attribute to the indeterminate substratum of the universal wave function ψ as if it had some determinate state *a posteriori* from the realist viewpoint they adopt. Finally, the observers in some realist deterministic interpretations of QM appear (and disappear !) as local hidden variables, while the observers in the constructivist interpretation have a definite mathematical location in the algebraic-topological space formulation of QM and GR.

7. CONCLUSION

The constructivist interpretation (as opposed to a realist interpretation) defended here is in agreement with the Weylian standpoint and can be viewed in the case of Quantum Mechanics as a variant of the Copenhagen Interpretation with explicit constructivist logical and mathematical motives in the scope of the local observer at micro- and macroscopic scales, in 2-3-4 or n-dimensional space – and for the observer in 0-dimensional space ! There the local observer appears as the open relative (local) complement of a topological space or as a fixed-point observer an n-dimensional manifold homeomorphic to an n – dimensional Euclidean space. As for logic, the negation involved in the local complement corresponds to a non-Boolean or constructive notion for which we have $\neg\neg\, a \neq a$ and this leads naturally to a non-classical logic internal to the given physical theory. In QM and in Relativity Theory, the local observer is the *coupling constant* of the relational system observed-observer; Those ideas have been introduced early in my critical work on the foundations of physics from a physico – mathematical point of view (see [10] and [11]). The physicist C. Rovelli has recently developed loosely related ideas in his informal realist notion of a relational QM (see [20]). In cosmology, the local observer located anywhere is a fixed point as the central observation post of the cosmic panorama at equal distance from any point on the cosmic (hemispherical) horizon of the celestial sphere which is itself bounded by homeomorphic reflections of the local isotropic universe as required by the cosmological principle. For the local observer, everywhere is *localized* and what is beyond the horizon boundary lives in the same dimension since the visible is *cobordant* with the invisible. Finally, from an information-theoretic point of view, the local observer is the first informant for the information content of the observable universe and constitutes the fundamental link for a unifying theory of QM and GR.

REFERENCES

[1] E. Bishop, *Foundations of Constructive Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1966

[2] M. Born, Zur Quantenmechanik der Stoßvorgänge, *Zeitschrift für Physik* **37** (12): 863-867, 1926

[3] M. Born, The statistical interpretation of quantum mechanics, *Nobel Lecture*, December 1954

[4] L.E.J. Brouwer, Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl. *Math. Annalen* **70**, 161-165, 1910

[5] L.E.J. Brouwer, Beweis der Invarianz des n-dimensionalen Gebietes. *Math. Annalen* **71**, 305-313, 1912, **72**, 55-56,1912

[6] G. Cantor, Über einen Satz aus der Theorie der stetigen Mannigfaltigkeiten, *Abhandlungen mathematisch und philosophischen Inhalts*, Georg Olms, Hildesheim, 134-138 (1966)

[7] J. Conway, and S. Kochen, The Free Will Theorem. *Found. of Physics* **36**,1441-1473 (2006)

[8] J. Conway, and S. Kochen, The Strong Free Will Theorem. *Notices of the American Mathematical Society* **56**, 226-232 (February 2009)

[9] S. Gao, The Meaning of the Wave Function : in Search of the Ontology of Quantum Mechanics, *arKiv.org. <quant.ph> arKiv : 1611.02738*

[10] Y. Gauthier, The Use of the Axiomatic Method in Quantum Physics, *Philosophy of Science.* **38** (1971) : 429-437

[11] Y. Gauthier, Quantum Mechanics and the Local Observer, *Int. Journal of Theor. Phys.* **22** (1983) : 1141-1152

[12] Y. Gauthier, Hermann Weyl on Minkowskian spacetime and Riemannian Geometry. *Int. Studies in the Philosophy of Science* **19**(3), 261-269 (2005)

[13] Y. Gauthier, Classical Function Theory and Applied Proof Theory. *Int. Journal of Pure and Applied Mathematics* **56**, no. 3, 223-233 (2009)

[14] Y. Gauthier, A General No-Cloning Theorem for an Infinite Multiverse, *Reports on Mathematical Physics*, **72** (2013) : 191-199. [15]. Y. Gauthier, *Towards an Arithmetical Logic. Arithmetical Foundations of Logic*, Birkhäuser/Springer, 2015.

[16] D. Hilbert, J. von Neumann, L. Nordheim, Über die Grundlagen der Quantenmechanik, *Math. Ann.* **98** (1928): 1-30.

[17] U. Kohlenbach, *Applied Proof Theory : Proof Interpretations and their Use in Mathematics*, Springer, 2008

[18] E. Nelson, *A Radically Elementary Probability Theory*, Princeton University Press, Princeton, N.J. 1987

[19] Y. J. Nomura, Physical Theories, Eternal Inflation and Quantum Universe, *High Energ. Phys.* (2011): 3

[20] C. Rovelli, Relational Quantum Mechanics, *Int. Journal of Theor. Phys.* **35** (1996): 1637-1678

[21] I. E. Segal, *Mathematical Cosmology and Extragalactic Astronomy*, Academic Press, New York, 1976

[22] G. 't Hooft, The Cellular Automaton Interpretation of Quantum Mechanics, **arKiv.org. <quant.ph> arKiv 1405.1548**

[23] J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Berlin, 1932.

[24] H. Weyl, Das Verhältnis der kausalen zur statistischen Betrachtungsweise in der Physik , first published in *Schweizerische Medizinische Wochenschrift* **50**, 537-541 (1920) reprinted in *Gesammelte Abhandlungen*, K. Chandrasekharan, ed., (Springer, New York), vol. II, 113-122, 1968

[25] H. Weyl, *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, Atheneum, New York, 1960

CHAPITRE 13

Commentaire de « Hilbert's Idea of a Physical Axiomatics. The analytical Apparatus of Quantum Mechanics »

Dans ce texte qui a été publié dans la revue *Journal of Physical Axiomatics*, vol. 2 (2010) : 1-14, j'ai mis l'accent sur le travail de Hilbert (en collaboration avec von Neumann et Nordheim) paru en 1928 sur les fondements de la mécanique quantique – voir référence [11] dans l'article. Pour les travaux antérieurs de Hilbert portant sur la physique, on pourra consulter le gros ouvrage de 2004 de l'historien Léo Corry *David Hilbert and the axiomatization of physics (1898-1918)* qui s'arrête, comme son titre l'indique, avant l'article de 1928. Corry se consacre à une simple narration des travaux de Hilbert sans s'intéresser à la logique interne des mathématiques hilbertiennes.

J'ai insisté sur les fondements proprement mathématiques de la MQ et sur la notion d'appareil analytique « *analytischer Apparat* », c'est-à-dire l'ensemble des structures mathématiques (et logiques) qui surdéterminent les modèles d'une théorie physique qui à leur tour déterminent le domaine expérimental.[1] C'est là sens de la méthode axiomatique que Hilbert avait appliquée pour les fondements de la géométrie en 1899.

Dans l'article ci-joint, je propose une formulation de l'espace de Hilbert, socle mathématique de la MQ, qui fasse une place logico-mathématique à la notion d'observateur local que j'ai élaborée depuis l'article de 1983 « Quantum Mechanics and the Local Observer » (voir référence [3] dans l'article). J'ai fait cependant appel à des notions logico-mathématiques, comme négation locale et complémentation locale, qui remontent aux articles « Intuitionistic Logic and Local Mathematical Theories » dans *Zeitschrift für mathematische Logik* *und Grundlagen der Mathematik*, vol. 23, no.5 (1977) : 411-414 et « A theory of local negation : The model and some applications » dans *Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung*, vol. 25, nos 3-4 (1985) : 127-143. Ces notions sont à l'origine de la théorie de l'observateur local amorcée déjà dans l'article de 1971 « The use of the axiomatic method in quantum physics » dans *Philosophy of Science*, vol. 38 (1971) : 429-437. Le dernier état de la question se trouve dans l'article repris plus haut dans le présent recueil « From the local Observer in QM to the fixed-point Observer in GR ». Toutes ces notions sont donné naissance à un programme de logique arithmétique résumé sous le titre de logique polynomiale modulaire dans mon ouvrage *Towards an Arithmetical Logic. The Arithmetical Foundations of Logic*, Bâle, Birkhäuser et Springer, 2015.

Hilbert's idea of a physical axiomatics. The Analytical Apparatus of Quantum Mechanics

1. INTRODUCTION

Hilbert's idea of a physical axiomatics is introduced in his 6th problem in his 1900 list. It is the axiomatization of probability and mechanics, he says, that should concern the mathematician who wishes to secure the foundations of physics as rigourously as it is achieved in arithmetic and geometry. In his major work (13, III, 245-387), Kronecker, who had inspired Hilbert in more ways than one, referred to Kirchhoff's mechanism as a model of a scientific theory for its simplicity and completeness, attributes he claimed for his own general arithmetic. The same Kirchhoff furnished to Hilbert a radiation theory for his early work on foundations of physics (10, III, 217-257). What we call now Kirchhoff's law on the equality between rates of emission and absorption of energy in thermal equilibrium is indeed a good example of a physical domain that should be investigated in view of the consistency of its axioms. One is reminded here that Hilbert had made of this question already in 1900 the sixth problem of his list « The mathematical treatment of the axioms of physics ». Hilbert names probability theory and mechanics as the two privileged domains of such interpretations. The central problem in physical theories is still the consistency problem, because a fundamental physical theory proceeds like geometry from general axioms to more specific ones and the extension from the first principles to the secondary ones must preserve consistency. Consistency is not a matter of feeling or experimentation, but of logic, Hilbert insists, and the extension of the theory of thermal radiation to elementary optics is possible only on the grounds of consistency.

The problem area under discussion is of no particular interest for our purposes, nor are Hilbert's contributions to relativity theory (10, III, 257-289) since they are mathematical elaborations and only partly foundationally illuminating – Hilbert had also worked on the foundations of the kinetic theory of gases and other occasional physical subjects. The work on (general) relativity theory in particular seems to have been inspired by the groundbreaking inquiries of Weyl, more than by Einstein's original work. Of greater interest to us is the paper written in collaboration with von Neumann and Nordheim « On the foundations of quantum mechanics » (9).

In that paper we find the clear exhortation to make explicit the concept of probability in order to extract the mathematical content from its mystical (philosophical) gangue. But the main themes are, in my view, associated with the notions of "analytical apparatus" <*analytischer Apparat*> and "conditions of reality" <*Realitätsbedingungen*>. Which comes first, the analytical apparatus or conditions of reality, is a matter of foundational outlook and we shall see how Hilbert conceived a so-called "physical axiomatics".

Probabilities and their relationships constitute the material we start from. The physical requirements a probability theory of physical phenomena has to fulfil represent the basis on which a "simple" analytical apparatus is defined ; then follows a physical interpretation of the analytical structure and if the basis is fully determined, the analytical structure should be canonical. This is the axiomatic formulation already present in the Hilbertian foundations of geometry and the general argument leaves no doubt as to the permanence of the axiomatic ideal in Hilbert's work on the foundations of physics. What Hilbert seems to strive to is the conception of a categorical mathematical theory with a multiplicity of models ; however, not all models would be isomorphic. Non-standard models point rather to a complete first-order theory that generates a variety of interpretations. But the mathematical structure is generally not first-order. The dilemma of a physical axiomatics or of a "physical logic" opens up numerous avenues of research.

The analytical apparatus or the mathematical formalism is first conjectured and then tested through an interpretation in order to check its adequacy. The two components, analytical apparatus and its physical interpretation, must be sharply distinguished and that separation has the effect that the formalism is stable throughout the variations of its (physical) interpretations where some degree of freedom and arbitrariness cannot be eliminated. However, this is the price to pay for the axiomatization and vague concepts like probability will finally loose their fuzzy character. The conditions of reality for probability will prove to be intrisically linked with the calculus of Hermitian operators and Hilbert's early theory of integral equations. Thus the fact that a probability measure is real positive depends on the finiteness of the sum

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots$$

for a linear function. Hilbert's result, which is a bulding-block of the Hilbert space formalism, was inspired by a similar result of Kronecker on linear forms. Kronecker's influence on Hilbert has also a conservative extension in the foundations of quantum mechanics.

Hilbert's ideas of the foundations of *QM* have been made to work by von Neumann (15 and 16) in the Hilbert space formulation of quantum mechanics, which is the standard formulation of *QM*. We shall explore in the following the continuation of Hilbert's programme in the hands of his followers. I start with a notion which is not found in Hilbert, but can be traced back to von Neumann's foundational work in *QM*.

2. QUANTUM MECANICS

2.1 The Hilbert space

The usual presentation of *QM* requires the analytical apparatus of Hilbert space as a linear vector space with complex coefficients; among all linear manifolds that constitute a Hilbert space, the closed ones or the subspaces are of special interest for physics (*i.e. QM* here), since notions like orthogonal vectors, orthogonal complements, projections, etc., can be defined on them. It is a well-known fact that not all linear manifolds are closed (8, p. 22) and that the set of all linear subsets of the infinite-dimensional Hilbert space is not orthocomplementable (11, p. 122): it is this possibility which I want to exploit, keeping in mind that a Hilbert space is a metric and topological space. The interesting fact about Hilbert space from a physical point of view is that it permits the definition of orthogonality

$$f, g \quad = 0$$

written $f \perp g$; the orthogonal complement of f, $f^{\perp\perp}$ obeys the Boolean rule $f^{\perp\perp} = f$ and $f^{\perp}$ forms a subspace of H. For *QM*, it is important to notice that there is a bijection between subspaces and projections, *i.e.* the linear operators E such that $EE^{\perp} = E$ for $E^{\perp}$ the adjoint of E defined by $(E^{\perp})^{\perp} = E$ (if $E^{\perp} = E$, then E is a self-adjoint or Hermitian operator). The spectral theorem states that there is a bijection between self-adjoint operators and spectral measures on (the Borel set of) the real line R' and the von Neumann *dogma* states that there is a bijection between self-adjoint operators and the observables of *QM*[1]. Let us look at the orthogonal complement: we have seen that $f^{\perp\perp} = f$; consequently, the orthogonal complement corresponds to the orthocomplement $(a^{-})^{-} = a$ of a Boolean lattice, where $\leq$ correspond to $\rightarrow$, a^{-} to $\neg a$, $a \cap b$ to $a \wedge b$ and $a \cup b$ to $a \vee b$. Orthocomplementation induces an involutive antiautomorphism $(a^{\perp -})^{\perp}$ on the field vector space. It is such an antiautomorphism which yields Gleason's important theorem (1957) stipulating that any probability measure $\mu(A)$ on the subspaces of H has the form

$$\mu(A) = Tr(WP_A)$$

where Tr means for any complete system of normalized orthogonal vectors, P_A denotes the orthogonal projection of A and W is a Hermitian operator which satisfies

$$W > 0,\ TrW \text{ and } W^2 \leq W.$$

Other spaces, like Banach spaces, which lack the restriction of orthogonality, do not seem to be suited to the needs of *QM*.

The usual formulation of *QM* requires the analytical apparatus of the Hilbert space H as a complex vector space (see Jauch, 1968) with

$$\forall f, g \in \mathrm{H} \quad (f + g) \in \mathrm{H}$$

$$\forall f \in \mathrm{H}\ \forall \lambda \in C (\lambda f \in \mathrm{H})$$

for f and g and a complex coefficient λ with

$$1 \cdot \mathrm{f},\ \Theta + f = f \text{ and } \Theta \cdot f = 0$$

for the null vector Θ. The Hilbert space has also a scalar or interior product which is strictly positive. In particular, we have

and

$$(f, g) = (g, f)^*$$

the complex conjugate with the norm

$$f^{\ 2} (f, f) > 0 \qquad \text{for } f \neq \Theta.$$

The space H is separable (dense)

$$\forall f \in \mathrm{H}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists f_n \quad f_n - f_n \quad < \varepsilon \qquad \text{for } n = 1, 2, \ldots$$

and complete, *i.e.* any Cauchy sequence

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N < i, j \quad \rho(x_1, x_j) \quad < \varepsilon_0$$

converges

$$\lim_{n=\infty} \quad f - f_n \quad = 0 \text{ in H.}$$

The analytical apparatus consists also of the following physical postulates or axioms

1) physical states are represented by state vectors (in H),
2) there is a bijection between observables and Hermitian operators – von Neumann's *dogma*,
3) the evolution of the physical system is described by Schrödinger's equation,
4) the probability to find a particle in a particular position is given by

   $$pr(\underline{r}, t) = \Psi^*(\underline{r}, t)\ \Psi(\underline{r}, t) = |\ \Psi(\underline{r}, t)|^2$$

   where $\underline{r}$ is the position vector and Ψ^* the complex conjugate of Ψ

   $$\Psi^{\perp} \Psi = |\ \Psi|^2\ .$$

Finally, we have

5) the projection postulate which states that immediately after a measurement (that is, an interaction), the superposition $\sum c_j \sigma_j \alpha_j$ is transfomed or reduced to $\sigma_n \alpha_n$.

The fifth postulate for the wave packet reduction characterizes von Neumann's theory of measurement. For instance, the superposition of states $\sum \sigma_j \alpha_j$ is made up of the combined system – the observer and the observed system – and for von Neumann a measurement projects the system $\sum$ in a state $\sigma_j \alpha_j$ (we neglect the terms of the expansion here). Vectors $\sigma_n \alpha_n$ have a well-defined value since projections are in bijection with the subspaces of the Hilbert space, but the system is no more in a pure state, but in a mixture. Everett's multiverse theory (or relative state theory supposes that the superposition is not reduced or projected in a determinate state, but ramifies after an interaction in a multitude of branches each corresponding to a component of the superposition: there would be as many worlds as there are components and the result of measurement would be valid on only one world among a (non-denumerable) infinity of universes. Here is the rub, more irritating than von Neumann's cut <*Schnitt*> between the observed system and the observer: the set of all values of the wave function Ψ is C, the set of complex numbers, which has the cardinality $2^{\aleph_0}$; thus, the ramified Ψ cannot be measured for the set of all possible measurements certainly does not exceed $\aleph_0$ and there is no bijection between $\aleph_0$ and $2^{\aleph_0}$. The inconsistency is fatal in view of Everett's idea that the formalism generates its own interpretation. If the ramification of Ψ must have a probabilistic objective content, one is obliged to admit that it cannot emerge from the divergent ramification of non-denumerable probability values, a probability theory being at most σ-additive, that is denumerably convergent. Another example of an inconsistent probability theory of *QM* is the theory of consistent histories, first formulated by Griffiths (see 7) and adopted since by some important physicists, Gell-Mann and Hartle, among others. The theory can be considered as a variant of Everett's many-universe or multiverse interpretation with a historical component, since parallel universes can have different histories, that is temporal sequences of quantum events. In order for a given history to be consistent, it is granted a weakened logical status which forbids, for instance, to join two incompatible events (*e.g.* spin states a and b of an electron) in a classical conjunction $a \wedge b$. These singular histories must preserve probability measures or σ-additivity for denumerable measures with the help of elementary logical notions as *Modus Ponens*, conditional probabilities and counterfactuals, truth and liability. But the main question is the consistency of consistent histories. Recent work by Goldstein and Page (1995), Dowker and Kent (1996) tends to show that Griffith's theory is inconsistent in its probabilistic assumptions about consistent histories. From a combinatorial point of view, denumerable or σ-additivity supposes that the decomposition of probability measures covers up inconsistent history subsequences (subsets) as well as consistent but irreconciliable subsequences in the density matrix of consistent histories; in other words, there is no bijection between the $\aleph_0$ sequences and the $2^{\aleph_0}$ subsequences (the power set of all histories) and standard probabilities are lost in the multiplicity of divergent histories (and subhistories). The lesson to be drawn here is perhaps that a paraconsistent logic that accommodates contradictions besides tautologies can take care of a "quasi-consistency" for the "quasi-classicality" in a mixture of coherent histories in quantum systems and decoherent histories in classical (macroscopic) systems, as quantum decoherence theory seems to indicate. But the term "consistency histories" would nonetheless sound like a misnomer for a theory which makes room for too many divergent histories, as the universal ramification of the wave function would have it in Everett's multiverse interpretation.

2.2 Probabilities

Hilbert (followed in this by von Neumann) introduced the notion of analytical apparatus <*der analytische Apparat*> drawn from the general structure of an axiomatic system in physics and he made no mystery of his intention to provide physics with the same kind of axiomatic foundations as geometry. Physical situations must be mirrored in an analytical apparatus, physical quantities are represented by mathematical constructs which are translated back into the language of physics in order to give real meaning to empirical statements. The analytical apparatus is not subjected to change while its physical interpretation has a variable degree of freedom or arbitrariness. What this means is that the mathematical formalism of a physical theory is a syntactical structure which does not possess a canonical interpretation, the analytical apparatus does not generate a unique model. At the same time, axiomatization helps in clarifying a concept like probability which is thus rescued from its mystical state. It is noteworthy that another pair of renowned mathematicians, Hardy and Littlewood expressed the same opinion at about the same time: "Probability is not a notion of pure mathematics, but of philosophy or physics".

Probabilities had, long before Quantum Mechanics, been knocking at the door of physics, but Laplace had entitled his work *Essai philosophique sur les probabilités* (1814) after having called it *Théorie analytique des probabilités* (1812). Statistical mechanics can certainly count as a forerunner of *QM* as far as the statistical behavior of a large number of particles is an essential ingredient in the probability theory of quantum-mechanical systems. But even in the work of pioneers like Born and Pauli, probability has entered *QM* somehow through the backdoor and it seems that it is only reluctantly that Born, for example, has admitted the idea of probability. Later work by Kolmogorov on the axiomatic foundations of elementary probability theory or von Mises and Reichenbach on the frequentist interpretation of probability will achieve some measure of success, but it is the historical advent of a rigorous formalization of the notion of probability as it occurs in quantum physics which has not been sufficiently stressed.

If probability has evidently a multiple application in *QM*, it remains that it is mainly a mathematical notion. Von Neumann's work in 1927-1932 focuses on what is called the finiteness of the eigenvalue problem. The point here is that any calculation is finite and since we have only finite results, those must be the products of a finite calculation which is itself made possible only if the analytical apparatus contains the mathematical structures which enable such calculations. Such a formalism is the complex Hilbert space with

$$|\Psi|^2 \in L^2(\mu)$$

where μ is a real positive measure on the functional space L^2 (*i.e.* the equivalence class of square-integrable functions). The integral

$$\int |\Psi|^2 \, d\mu$$

is finite, which is equivalent to the fact that, in the theory of bounded quadratic forms, the sum

$$K(x,x) = \sum_{p,q=1}^{\infty} k_{pq} x_p x_q$$

of all sequences $x_1, x_1, \ldots$ (of complex numbers) is finite in an orthonormal system of vectors. That mathematical fact, which Hilbert derived in the theory of integral equations in 1907, states that a linear expression

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + \ldots$$

is a linear function, if and only if the sum of the squares of the coefficients in the linear expression $k_1 k_2, \ldots$ is *finite*. The theorem, inspired by Kronecker's result on linear forms (homogeneous polynomials), is the very basis of the Hilbert space formulation of *QM*. Notice that on the probabilistic or statistical interpretation, the "acausal" interaction between an observed system and an observing system takes place in a given experimental situation and produces a univocal result of finite statistics for real or realized measurements.

In order for real measurements to have real positive probability values, the analytical apparatus must satisfy certain realizability conditions, <*Realitätsbedingungen*>, as Hilbert and von Neumann put it. For example, orthogonality for vectors, linearity and hermiticity for functional operators and the finiteness of the eigenvalue problem for Hermitian operators, as in von Neumann's further work *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, are such constraints of realizability.

2.3 Logics

The requirements for realizability are not limited to additivity for Hermitian operators – Grete Hermann seems to have been the first one to critisize the requirement on philosophical grounds – but are strictures imposed by the analytical apparatus or the deductive structure of the theory in von Neumann's terminology. In their joint paper of 1936, Birkhoff and von Neumann, attempt to define the "logical calculus" of quantum-mechanical propositions associated with projection operators alluded to in von Neumann (15, 134). They are led to denote the orthogonal complement ($\perp$) as the "negative" of an experimental proposition in an orthocomplemented lattice satisfying

1) $(a^{\perp})^{\perp} = a$

2) $a \leq b$, *iff* $b^{\perp} \leq a^{\perp}$

3) $a \wedge a^{\perp} = 0$

4) $a \vee a^{\perp} = 1$.

The dual antiautomorphism of period two (or the involutory antiautomorphism of projective geometry) does not however uniquely determine complements in a continuous geometry and von Neumann came back to quantum logic in his paper «Quantum Logics» (1961) with the discussion of a continuous geometry without points and whose elements are all the linear subspaces of a given space (more general than a Hilbert space); von Neumann thought that the logic of quantum probabilities (frequencies) could be built upon such a geometry. But here the probability measures must be infinite in order to be convergent and the probability statements that express those measures are required to have a finite meaning, as Reichenbach claimed for the verifiability theory of his probability theory. Von Neumann was dissatisfied with Hilbert space vector formalism, – but was unable to define a finite probability theory for his abstract projective geometry framework – the type *II* factor of a modular non-atomic lattice.

In that context, Birkhoff and von Neumann deny the distributive law of logic in favor of a weaker modular identity or orthomodularity

$$a \leq b \rightarrow a \vee b\ (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$$

weakened by Jauch and Piron[2] to

$$a \leq b, \textit{ iff } a \text{ and } b \text{ are compatible}$$

(compatibility is an equivalence relation which is symmetric, but not transitive). The underlying logic here is the non-commutativity of operators P_1 et P_2

$$P_1 P_2 \neq P_2 P_1$$

of which the uncertainty relations are "a direct intuitive explanation", as Heisenberg said.

The quantum logic of Jauch and Piron is another example of an impossibility proof for hidden variables as compatible propositions in the framework of essentialy non-compatible quantum-mechanical propositions. Kochen and Specker devised rather a quantum logic for a partial Boolean algebra of commuting (or "commeasurable", as they say, 12, 64) quantum-mechanical observables (or propositions) which is not embeddable in a commutative Boolean algebra – there is no 2-valued homomorphism h from the partial algebra A to the Boolean algebra B with the properties

1) $h(a) \approx h(b)$

2) $h(\mu a + b) = \mu(h(a))\ \lambda(h(b)$

3) $h(ab) = h(a)\ h(b)$

4) $h(1) = 1$

where $\approx$ is the relation of commensurability, a,b are elements of A and μ,λ belong to a field of sets K (compare with the relation of compatibility defined in 2.3 above).

The fact that the 2-valued propositions form a commutative algebra which does not imbed commeasurable quantum-mechanical propositions can be seen as a far-reaching consequence of Gleason's theorem on the measure of the closed subspaces of a Hilbert space (see Gleason, 1957).

2.4 Local complementation

Even in the case of set complementation (as in the theory of Hilbert spaces), we can have local complementation. Consider Hilbert space as a metric and a topological space; D is in this case the set of subspaces of the Hilbert space and E is obtained by local complementation; E is the "location" of the local observer. We shall see that the Hilbert space can make room for a notion of local observer: the observer becomes the (local) complement of the observable, *i.e.* the closed linear manifolds of the Hilbert space – of course the whole Hilbert space contains all bounded linear transformations (defined on open subsets) and is therefore not orthocomplementable. But here we obtain non-orthocomplementability in a different way. (Remember that in a finite-dimensional space, every linear manifold is closed).

Theorem. Hilbert space admits the observer through local negation (or complementation) – that is, we do not have orthocomplentation on the whole Hilbert space even in the finite-dimensional case.

Proof. Let H be an n-dimensional Hilbert space and let $F^{\perp}$ be the set of closed linear manifolds $f^{\perp}$, $F^{\perp}=F^{-}$, the closure of all f. One can now define the relative complement F^{+} of F^{-} such that $\mathrm{H}-F^{-}=F^{+}$; F^{+} is then an open subset. From the topology, we pass to the metric of H; for the metric of H, a subset A of H is located[3], if the distance

$$\forall x \in \mathrm{H} \quad \rho(x,A) \equiv \inf \quad \rho(x,y) : y \in A$$

from x to A exists. The metric complement $-A$ of a located subset A is the set

$$-A \equiv \quad x : x \in \mathrm{H}, \rho(x,A) > 0$$

which is open, since

$$\forall x,y \in \mathrm{H} \quad \rho(x,A) \leq \rho(x,y) + \rho(x,A) \ .$$

Here the observer has a topological and metrical place as the local complement of the closed set of subspaces of H. In order to further constructivize this result, I introduce the topological boundary operator b which is to be interpreted as the boundary between the observable (or observed) and the observer: we have the relations

$$E = \neg D - b(E)$$

and

$$D = \neg E \quad b(D)$$

thus

$$\neg D(\mathrm{H}) = E(\mathrm{H}) - b \;\; E(\mathrm{H}) \; .$$

The interior of E, *i.e.* E°, is the complement of the closure of the complement of E and is thus open; we have also

$$E = E^{\circ}.$$

For any x, $D(\neg x)$ means that $x \in E$. So for some a, we have

$$E(a) = D(\neg a) - b \;\; D(\neg a) \;\; ;$$

On the other hand, the closure of D, *i.e.* D^{-} implies that

$$B \;\; D(\neg a) \;\; = a^{-} \cap (D - a)^{-}.$$

Hence

$$\bar{A} = a \cup b \;\; D(\neg a)$$

and

$$\bar{a} \in D(\mathrm{H}) = a \in D(\mathrm{H}) \cup b \;\; a \in D(\mathrm{H})$$

and

$$a \in D(\mathrm{H}) = a^{-} \in E(\mathrm{H}) - b \;\; E(\mathrm{H})$$

which shows that E is disjoint from its boundary, that is, it is open and consequently the whole Hilbert space $D(\mathrm{H}) \cup E(\mathrm{H})$ is not orthocomplementable, since local complementation excludes $(a^{-})^{-} = a$[4].

Remark: the effect of abandoning orthocomplementation amounts to adopting an indefinite metric which may, in fact, be more convenient for some physical theories (*e.g.* quantum field theory).

2.5 The total Hilbert space

Gleason's theorem says that in a separable Hilbert space of dim ≥ 3, every measure on the closed subspaces has the form

$$\mu(A) = Tr(WP_A)$$

where the trace Tr means $TrX = \sum_R(\varphi_R, X\varphi_R)$ for any complete system of normalized orthogonal vectors φ_R; P_A denotes the orthogonal projection of A and W is a Hermitian operator which satisfies

$$W > 0,\ TrW = 1 \text{ and } W^2 \leq W.$$

Since the sum for the linear span B over a countable set of orthogonal subspaces A_i

$$\mu(B) = \sum \mu(A_i)$$

is finite, μ can be regarded as a real positive measure on the functional space L^2 as we saw above. Gleason's result states that "frame functions" defined on the unit sphere are regular, that is, there exists a self-adjoint operator T defined on the Hilbert space H such that the frame function f. When the (real) Hilbert space is finite-dimensional, the frame functions are regular, iff they are the restriction to the unit sphere of quadratic forms (homogeneous polynomials of degree 2) – again in accordance with the Hilbert-Kronecker theorem on the finite sum of the squares of coefficients in a linear expression. But the total Hilbert space containing not only the subspaces (closed varieties), but all the linear varieties is infinite-dimensional and is not orthocomplementable. In view of the fact that complements in the total Hilbert space cannot be uniquely determined, a fact that von Neumann and Birkhoff had noticed, one can introduce a local or relative complement in the lattice of open subsets of H beyond the closed sequence of subspaces of H. Topologically then, the local complement is an open subset of H and the topological boundary operator separates the space of the observed system from the space of the observing system, since points on the boundary are neither in A nor in $X - A$ for a given set and its complement in a topological space X. All linear varieties are closed in a finite-dimensional space X (see 8, 1957), and we have to "open up" that space; we need to locate finitely the relative complement and a metric to that effect can be defined on the topology (see 2). Brouwer has introduced the notion of located subset for subsequences (see 1):

a subsequence A of B, *i.e.* $A \subset B$, is localised, if there exists a distance ρ (for points x and y) such that

$$\forall x \in \mathrm{H} \quad \rho(x,A) \equiv \inf \quad \rho(x,y) : y \in A \quad .$$

The metric local complement $-A$ of the subsequence A is

$$-A \equiv \quad x : x \in \mathrm{H}, \rho(x,A) > 0$$

and is open, since

$$\forall x,y \in \mathrm{H} \quad \rho(x,A) \leq \rho(x,y) + \rho(x,A) \ .$$

The notion of local complement with its distance function constitutes the basis of a probability calculus which differs from the classical notions.

2.6 Finite derivation of the local complement

In accordance with Hilbert's result on finite sums for linear expressions, the local complement of our probability calculus is also embedded in a finite form. Instead of Kolmogorov's infinite probability space, we have a finite probability space as in (Nelson, 1987) : a finite probability space is a finite set Ω and a (strictly positive) function pr on Ω such that for $\omega \in \Omega$

$$\sum pr(\omega) = 1$$

and expectation is defined

$$Ex = \sum x(\omega) pr(\omega)$$

for a random variable x; the probability of an event $A \subseteq \Omega$ is

$$Pr\,A = \sum_{\omega \in A} pr(\omega).$$

Nelson also defines the complementary event as $A^c = \Omega \setminus A$ for all $\omega \in \Omega - A$. This is the Boolean complement which we replace by our local complement $(\Omega - a) + b$ or $(1 - a) + b$. Putting $\bar{a}$ for $1 - a$, we introduce polynomials in the following (binomial) form with decreasing powers

$$(\bar{a}_o x + b_0 x)^n = \bar{a}_0^n x + n\bar{a}_0^{n-1} x b_0 x + [n(n-1)/2!]\ \bar{a}_0^{n-2} x b_0^2 x + \dots\ b_0^n x$$

where the companion indeterminate x shares the same power expansion. By an easy calculation (on homogeneous polynomials that are symmetric *i.e.* with a symmetric function $f(x,y) = f(y,x)$ of the coefficients)

$$
\begin{aligned}
(\bar{a}_0 x + b_0 x)^n &= \bar{a}_0^n x + \sum_{k=1}^{n-1} (n-1/k-1)\ \bar{a}_0^{k-1} x + (n-1/k)\ a_0^k x b_0^{n-k} x + b_0^n x \\
&= \sum_{k=1}^{n} (n/k-1)\ a_0^k x b_0^{n-k}\ x + \sum_{k=0}^{n-1} (n-1/k)\ a_0^k x b_0^{n-k}\ x \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (n-1/k)\ a_0^{k+1}\ x b_0^{n-1} x + \sum_{k=0}^{n-1} (n/k-1)\ a_0^k x b_0^{n-k} x \\
&= \bar{a}_0 \sum_{k=0}^{n-1} (n-1/k)\ (\bar{a}_0 - 1)^k b_0^{n-1-k} x + \sum_{k=0}^{n-1} (n-1/k)\ \bar{a}_0^k x (b_0 - 1)^{n-1-k} x \\
&= (\bar{a}_1 x + b_1 x)(\bar{a}_1 x + b_1 x - 1)^{n-1}
\end{aligned}
$$

and continuing by descent and omitting the x's, we have

$$
\begin{gathered}
(\bar{a}_2 + b_2)(\bar{a}_2 + b_2 - 2)^{n-2} \\
\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
(\bar{a}_{n-2} + b_{n-2} + \bar{a}_{n-2} +_{n-2} - (n-2))^{n-(n-2)} \\
(\bar{a}_{n-1} + b_{n-1} + \bar{a}_{n-1} +_{n-1} - (n-1))^{n-(n-1)} \\
(\bar{a}_n + b_n)(\bar{a}_n + b_n)^{n-n}.
\end{gathered}
$$

Applying descent again on $(\bar{a}_n + b_n)$, we obtain

$$(\bar{a}_0 + b_0)$$

or, reinstating the x's

$$(\bar{a}_0 x + b_0 x).$$

Remembering that

$$(\bar{a}x + bx)^n_{k<n} = \sum_{k+m=n} (k + m/k)\ \bar{a}^k b^m x^n)$$

we have

$$(\bar{a}x + bx)^{n+m=n}_{k<n} = \prod_{k+m=n} (k, m) = 2^n$$

or more explicitly

$$\sum_{i=0}^{m+n} c_1 x^{n+m-1} = \bar{a}_0 x \cdot b_0 x \prod_{i=1}^{m+n} (1 + c_i x) = 2^n$$

where the product is over the coefficients (with indeterminates) of convolution of the two polynomials (monomials) a_0 and b_0. The descent that we have applied here is the arithmetic finite descent from a given n to the first ordinal (0, or 1). The finite descent (or derivation) is applied to a probability calculus, but it could be applied also to a propositional calculus as in Kochen and Specker (12). The interesting difference is that the calculus is no more classical nor Boolean, but intuitionistic, since the local complement corresponds to intuitionistic implication

$$a \to b = In \quad (X - a) \quad b$$

and the algebra of propositions (or events) is not even a partial Boolean algebra, but a Brouwerian lattice, that is a partially ordered set with two binary operations (meet and join) and a relative "pseudo-complement"

$$a \to b = a \quad c \leq b$$

for c the greatest element different from a. The Brouwerian lattice is isomorphic to a Heyting algebra, which is the algebraic structure corresponding to the intuitionistic logic of propositions. The open subsets of a topological space also determine a Brouwerian lattice.

Kolmogorov's axiomatization of the probability calculus is based on a triple $<\Omega, \Sigma, \mu>$ for μ a probability measure on the σ-algebra Σ of subsets or events A of a probability space Ω

1) $A \in \Omega$

2) $\forall A \in \Omega \to \bigcup_{j=1}^{x} A_i \in \Omega$

3) $A' = \Omega - A$ for A' the complement of A

with $0 \leq \mu(A) \leq 1$ for $A \in \Omega$ and $\mu(0) = 0$, $\mu(\Omega) = 1$; countable or σ-additivity means

$$\mu \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

for $A_i \cap A_j = \varnothing$, if $i \neq j$. Properties of the Boolean complementation of probabilities are summarized as follows

$$(A')' = A,\ A \cup A' = \Omega,\ A \cap A' = \varnothing$$

and

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \text{ and } (A \cap B)^{-} = (A' \cup B').$$

For local complementation, we have $(A')' \neq A$ for

$$C = A \Rightarrow B = In\ \ (X - a) \cup B$$

where In is the set of interior points and A, B, C are open subsets of a topological space X (C is here the largest open subset distinct from A). This relative "pseudo-complement" is the main distinctive feature of a Brouwerian lattice. We see that probabilities according to the local complement do not satisfy the Boolean equality or duality and make it possible to adjoin an intermediary or included third, that is the open subset B here. The expectation value

$$Exp\ (A) \int A d\mu$$

for a dispersion ΔA is given by

$$Var\ (A) = Exp\ \ A - Exp(A)\ \ ^2$$

and it is easy to see that in order to take into account the local complement, we must have

$$\Delta A^2 = Exp\ \ A - Exp(A) + Exp(\neg A)\ \ ^2$$

where $\neg A$ is the local complement of the space of events. For non-interactive systems and dispersion-free states, the local complement has a negligible effect on the statistics. But in quantum interactive systems (where a measurement is *some kind* of interaction between an observed system and an observing system), the statistical *weight* of the local complement cannot be ignored, although it is confined and *indeterminate*. The indeterminacy has something to do with the Indeterminacy or Uncertainty relations, but only indirectly in that the local complement acquires a determinate value upon measurement and only within actual measurement results as a relative complementation of probabilities.

3. CONCLUSION

It is possible to reconstruct the EPR argument for "elements-of-reality" without Bell's inequalities by appealing to indirect measurements or *reductio ad absurdum* arguments. The contextuality and nonlocality appear as features of a realist interpretation incompatible with *QM* to the extent that undefined values for observables of *QM* become definite for "elements-of-reality" in the EPR reconstruction. The simple case of the spin angular momentum will suffice for our argument.

The fundamental relationship for the x, y, z components of spin along the x^-, y^-, z^- axes is (S being the spin observable and squaring)

$$S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = S^2.$$

Direct measurement of the z component excludes attributing definite values to the other components, but realism specifically supposes that there are *independent* "elements-of-reality" that can be subjected to *indirect* measurements

Léon Rosenfeld, a harsh defender of the Copenhagen interpretation, summarizes the instrumentalist view:

> A phenomenon is therefore a process (endowed with the characteristic quantal wholeness) involving a definite type of interaction between the system and the apparatus (17, 82).

Thus, the probability calculus must be inherent to the quantum-mechanical measurement process. The tacit assumption of a classical probability structure must be questioned and a better adjustement of the analytical apparatus and its physical interpretation remains a lasting problem for foundational research. The completeness of Quantum Mechanics, despite Bell's pronouncement, is such a problem, may it be of a quantum-logical or mathematical nature. The topological solution suggested here has intrumentalist overtones, but it aims essentially at explaining Quantum Mechanics as the physics of "local" experiments. Although the metaphysics of wholeness or nonseparability is not totally dispelled by such an attempt, it might provide the sceptic with some good reasons not to despair about the so-called incompleteness of Quantum Mechanics in his search for reality. As M. Redhead (17, 45) puts it, on Bohr's complementarity interpretation, the value of an observable Q, when the state of the system is not an eigenstate of Q, is undefined or "meaningless" and one cannot impugn such an interpretation by denying a locality principle which says that a previously undefined value for an observable cannot be defined by measurements performed "at a distance". On Redhead's reckoning, the charge of incompleteness cannot be levelled against Bohr's view, unless staunch realism and non-constructive *reductio ad absurdum* arguments are invoked. But if the Undeterminacy or Uncertainty Principle has given rise to a non-commutative geometry and analysis (A. Connes), Bohr's Complementarity Principle could yield on a par a non-classical logic and probability calculus. And this militates for a proportionate anti-realist or, as I prefer to say, a constructivist (instrumentalist) interpretation of *QM*.

NOTES

1. Von Neumann's dogma has been challenged in 1952 by Wick, Wightman and Wigner who introduced superselection rules showing that there exist Hermitian operators that do not correspond to observables ; on the other side, Park and Margenau argue that there are observables, for example, the non-commuting x and z – components of spin which are not represented by Hermitian operators.
2. See J. M. Jauch (1968).
3. This notion of located subset has been introduced by Brouwer. E. Bishop has put it to use in his *Foundations of Constructive Analysis* (1).
4. Orthocomplementation requires that $(a^-)^- = a$, $a^- \cap a = \varnothing$ and $a \leq b \leftrightarrow b^- \leq a^-$.

REFERENCES

1. E. Bishop, *Foundations of Constructive Analysis*, McGraw-Hill, New York. 1967.
2. Y. Gauthier, Quantum Mechanics and the Local Observer, *International Journal of Theoretical Physics*, 22 (1983), 1141-1152.
3. Y. Gauthier, Hilbert and the Internal Logic of Mathematics, *Synthese* 101 (1994), 1-14.
4. Y. Gauthier, Hermann Minkowski : From Geometry of Numbers to Physical Geometry, *Minkowski Spacetime : A Hundred Years Later*, (ed. V. Petkov). Springer, Berlin 2010, 247-257.

5. Y. Gauthier, Classical Function Theory and Applied Proof Theory, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 56, no. 2 (2009), 223-233.
6. A.M. Gleason. Measures on the Closed Subspaces of a Hilbert Space, *Journal of Mathematics and Mechanics* 6 (1957), 885-893.
7. R.B. Griffiths, Consistent Histories and the Interpretation of Quantum Mechanics, *Journal of Statistical Physics*, 36 (1984), 219.
8. P. Halmos, *Introduction to Hilbert Space and the Theory of Spectral Multiplicity*, 2nd ed., Chelsea, New York, 1957.
9. D. Hilbert, J.von Neumann and L.Nordheim, Über die Grundlagen der Quantenmechanik, *Mathematische Annalen*, 98 (1928), 1-30.
10. D.Hilbert, *Gesammelte Abhandlungen*, 3. Bände, Chelsea, New York, 1932.
11. J.M. Jauch, *Foundations of Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1968.
12. S. Kochen and E.P. Specker, The Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics, *Journal of Mathematics and Physics*, 17 (1967), 59-87.
13. L. Kronecker, *Werke*, K. Hensel (ed.), 5 vols, Chelsea, New York, 1968.
14. E. Nelson, *Radically Elementary Probability Theory*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1987.
15. J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer-Verlag, Berlin, 1932.
16. J. von Neumann, Mathematische Begründung der Quantenmechanik, *Collected Works*, vol.1, Pergamon Press, Oxford, 1961.
17. M. Redhead, *Incompleteness, Nonlocality and Realism*, Clarendon Press, Oxford, 1987.
18. L. Rosenfeld, Misunderstandings on the Foundations of Quantum Theory, *Observation and Interpretation in the Philosophy of Physics with Special Reference to Quantum Mechanics*, S. Körner (ed.), Dover, New York, 1967.

CHAPITRE 14

Commentaire de «A General No-Cloning Theorem for an Infinite Multiverse»

Ce texte porte sur un théorème général en cosmologie scientifique. Il a été publié dans la revue *Reports on Mathematical Physics*, vol. 72 (2013): 191-199. J'y ai apporté quelques modifications que l'on retrouve dans mon article de 2016 sur «Simple Inconsistency of simple realist QM interpretations and related mathematical theories» publié dans ce recueil. Je critique en particulier la théorie des multivers héritée de H. Everett et épousée par certains physiciens comme David Deutch, Brian Greene ou Sean Carroll entre autres auteurs d'ouvrages populaires qui supposent une théorie du tout (TDT ou TOE ou Theory of Everything en anglais) comportant une infinité non dénombrable d'univers (de cardinalité inaccessible $2^{\aleph_0}$ ou 2 à l'aleph zéro en principe). Les théories plus sérieuses du tout comme la théorie des cordes, supercordes et membranes (E. Witten et alii) limitent malgré tout le nombre d'univers accessibles à 10^{500}. C'est dans ce cadre plus restreint qu'on peut étudier le principe holographique introduit par G. t'Hooft et L. Susskind et la correspondance AdS/CFT due à J. Malcadena. AdS est l'espace anti-de Sitter, un espace hyperbolique avec une courbure négative, contrairement à un espace sphérique avec courbure positive comme dans les équations du champ d'Einstein et CFT est la théorie conforme des champs: cette théorie suppose qu'il y a une correspondance ou symétrie miroir entre différents univers, mais comme je l'ai indiqué dans l'article cité plus haut, cette image ne peut être que diffractée, ce qui limite la portée du principe holographique destiné à détecter le contenu informationnel ou l'entropie d'un système. C'est dans cette perspective qu'on l'utilise pour scruter l'horizon (des événements) bidimensionnel d'un trou noir tridimensionnel afin d'y lire l'information qu'un trou noir peut éjecter, puisqu'un trou noir s'évapore selon la thèse Hawking à la manière d'une machine thermique. De là, on peut conclure selon la deuxième loi de la thermodynamique classique qu'il y a un message entropique qu'on peut lire sur l'horizon d'un trou noir, à moins que surgisse un mur de feu énergétique qui brouille irrémédiablement le message abyssal projeté sur l'horizon. Les questions et les paradoxes abondent, comme ailleurs en cosmologie où les scénarios divergent à propos d'univers singuliers, c'est-à-dire avec une singularité initiale (le *Big-Bang*) ou multiples, c'est-à-dire des trous noirs qui peuvent être considérés comme autant de *Big-Bangs* miniatures. Ce qui est certain cependant du point de vue fondationnel de la théorie de la mesure, c'est qu'il y n'a pas de quantités physiques (d'observables) infinies, comme une singularité initiale de densité infinie et que l'infini en physique aussi bien qu'en mathématiques n'est qu'une « façon de parler » comme disait Gauss en français dans le texte de sa lettre à Schumacher en 1831 !

Le théorème général de non clonage prend sa source en MQ et s'applique aussi bien en cosmologie, comme je le montre dans l'article commenté. Les notions techniques que j'utilise, homéomorphisme, homomorphisme et homotopie ont une signification précise en mathématiques (topologie et analyse complexe) et je pense m'en être servi à bon escient pour démontrer l'impossibilité du clonage dans le multivers et démonter le mythe cosmologique d'une reproduction infinitaire du même. En MQ, la thèse du non clonage implique qu'il n'y a pas de doublet identique d'une particule élémentaire dans son état propre inconnu avant la mesure. Cette impossibilité est liée au principe de superposition (et d'intrication) où tous les états quantiques d'une particule sont situés sur la fonction d'onde dans l'équation de Schrödinger. Ces états sont de cardinalité non dénombrable d'après la théorie quantique puisque la fonction d'onde (linéaire) prend ses valeurs dans l'ensemble des réels **R** ou dans l'ensemble **C** des complexes de même cardinalité $2^{\aleph_0}$. Une version populaire de la superposition suggère qu'une particule peut se trouver simultanément dans deux états (e.g. pour les valeurs + ½ ou – ½ pour le spin d'une particule), mais il s'agit pour une paire de particules d'une seule particule qui se retrouve dans un seul état, disons –1, après le mesure d'où l'on peut inférer que l'autre particule est dans l'état + 1) – pour un calcul de valeurs ½, on obtient $1\sqrt{2}$ pour deux particules avec des signes opposés pour une probabilité totale égale à 1 – on pourrait aussi choisir comme exemple les deux directions de spin, ↑ et ↓, d'une particule comme l'électron avec le même résultat. Il en va de même pour le paradoxe EPR (Einstein-Podolsky-Rosen) qui supposait une corrélation sans interaction entre deux systèmes quantiques éloignés spatialement l'un de l'autre, mais qui donnait leur probabilité conjointe $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Le paradoxe est aisément résolu (par Bohr) lorsqu'on admet que les deux systèmes sont disjoints avant la mesure, mais conjoints après la mesure. La sagesse populaire du commun des mortels et d'un bon nombre de savants, physiciens et autres, déclarent alors que la mesure ou l'observation détruit ou perturbe le système observé, alors qu'il faut penser que le système observateur met au jour le système observé qui jusqu'à la mesure était inobservable ou indéterminé. Les réalistes « déterminés » et superdéterministes continuent d'engranger sur les « éléments de réalité » que Einstein revendiquait dans son idéal déterministe immunisé contre l'indéterminisme de l'interprétation de Copenhague, d'où la résistance des théories déterministes de l'intrication (*entanglement*) et de la décohérence micro-macro avec un environnement expérimental – supermicroscope imaginé par Heisenberg et autres appareils bien réels, interféromètre, compteur Geiger et appareil de Stern-Gerlach – tout cela pour les défenseurs d'une théorie réaliste de la mesure qui fasse abstraction de l'observateur. Ce à quoi il faut rétorquer que les appareils de mesure, qu'ils soient micro ou macro, font partie du système observateur ! Le paradoxe ici tient à la théorie de la décohérence soutenue entre autres par Hartle et Gell-Mann qui plaident l'ignorance de la partie de la fonction d'onde future qui n'est pas en interaction avec un appareil de mesure, cette partie de la foncton d'onde qui décohère étant impuissante à constituer une *histoire cohérente* de la fonction d'onde ; ce qui est paradoxal dans cette interprétation de la MQ, c'est que le plaidoyer d'ignorance porte sur le futur de la fonction d'onde *après* la mesure, alors qu'on reproche à l'interprétation de Copenhague son ignorance du passé *avant* la mesure. Un renversement réaliste de la perspective qui génère bien d'autres problèmes du point de vue d'un observateur local markovien qui gère le futur comme je l'explique dans l'article.

Dans toute cette discussion, il est évident que cela n'a rien à voir avec une prédétermination de la bilocation d'une particule élémentaire, comme le veut la croyance populaire et comme le professent certains conférenciers, physiciens populaires ou vulgarisateurs, qui flattent le chat mort-vif de Schrödinger en doubles fentes à qui mieux mieux ou de tout poil ! Il ne s'agit pas dans ce dernier cas d'une expérience de pensée réalisable en principe, mais d'une expérience imaginaire irréalisable propre à exciter les esprits crédules ! Il n'y a donc pas de clonage au niveau élémentaire et pas davantage au niveau cosmique multiversel, d'autant plus que les mondes parallèles du multivers sont inobservables – on définit les quantités physiques comme observables dans la MQ formalisée dans l'espace de Hilbert où l'on a des principes de symétrie, *e.g.* unitarité ou évolution des états comme en théorie quantique des champs, *e.g.* CPT, conjugaison de la charge, parité et renversement du temps. Les symétries peuvent être cependant brisées comme dans l'hypothèse de la symétrie matière-antimatière dans la théorie du *Big Bang* ou asymptotiquement approchées comme la symétrie du miroir en théorie des cordes, mais dans le cas du multivers, la symétrie se trouve parfaitement brisée dans la perspective de la reproduction du même dans le clonage multiversel. Il appert qu'il s'agit d'une hypothèse métaphysique sans fondement logique, mathématique ou physique, une hypothèse à mettre au compte de l'imagination de métaphysiciens qui a vrai dire ont remplacé les métaphysiciens traditionnels selon le vœu de Stephen Hawking lui-même devenu métaphysicien malgré lui.

Les métaphysiciens de la tradition ont rêvé d'outre-mondes ou d'arrières-mondes peuplés d'entités idéales, noumènes, comme les appelait Kant, qui devaient propulser, par un coup «Anstoss», les phénomènes dans le monde observable. Les théories cosmologiques ne sont pas en reste des conceptions philosophiques. Rappelons que Kant avait prôné la théorie newtonienne d'un univers infini dans l'espace et le temps à la création d'un Dieu infini dans son *Histoire générale de la nature et théorie du ciel.* C'était le Kant d'avant *Les prolégomènes à toute métaphysique future* et la *Critique de la raison pure* où la dialectique transcendantale ne permet pas de conclure que l'univers est infini, seulement qu'il a une extension indéfinie (*Unbestimmte Weite*). L'ignorance de de cette limitation ou de ce passage à la limite pour Kant conduit physiciens et autres théoriciens à des extravagances qui confinent au poème *Euréka* d'Edgar Allan Poe qui avait au moins l'imagination fertile du poète déclarant que chacun des univers avait son dieu. Son traducteur Mallarmé lui répondra cependant qu'un «coup de dés jamais n'abolira le hasard», ce qui à mes yeux consacre la nature aléatoire des processus universels. Mallarmé écrit dans son poème *Le tombeau d'Edgar Poe*:

Tel qu'en lui-même l'éternité le change

……………………………………………

Donner un sens plus pur aux mots de la tribu

…………………………………………………

Calme bloc ici-bas chu d'un désastre obscur

À mon sens, ces vers caractérisent adéquatement la destinée poétique dans le destin entropique d'un univers illimité.

Ce cosmos multiple « cosmoi » de Poe avait au moins le mérite d'exister séparément sans contact et sans communication inter-mondes. Outre-mondes et multivers accessibles seulement à l'imagination poétique ne sont pas à rejeter, mais ils ne sauraient se substituer à la physique théorique qui a pour fonction de fixer les limites respectives de la construction mathématique et de l'observation expérimentale.

Je note enfin que dans cet article je m'inspire de Hermann Weyl pour appuyer la thèse de Conway-Kochen sur le libre choix, ou les décisions « *Entscheidungen* » selon le terme de Weyl. Il ne faut pas à mon sens accorder un sens littéral aux expressions de décisions et de libre choix dans un univers stochastique et attribuer aux particules élémentaires le comportement *libéral* de l'observateur local dans l'expérimentation. Si Conway et Kochen semblent opter pour une interprétation réaliste ou naturaliste du *clinamen* ou déclinaison dans le style de Lucrèce, il faut penser que la métaphore du libre choix s'applique aux mouvements aléatoires d'un univers particulaire qu'un observateur ordonne librement à l'aide d'un appareil expérimental ancré dans l'appareil analytique de la théorie physique, dans ce cas-ci la mécanique quantique.

A General No-Cloning Theorem for an Infinite Multiverse

ABSTRACT

In this paper, I formulate a general no-cloning theorem which covers the quantum-mechanical and the theoretical quantum information cases as well as the cosmological multiverse theory. The main argument is topological and does not involve the peculiar copy-multiplier devices of the quantum-mechanical and information-theoretic approaches to the no-cloning thesis. It is shown that that a combinatorial set-theoretic treatment of the mathematical and physical spacetime contnuum in cosmological and or quantum-mechanical terms forbids an infinite (countable) number of exact copies of finite elements (states) possibly denumerably or non-denumerably infinite elements in the uncountable multiverse. The historical background draws on ideas from Weyl to Conway and Kochen on the Free Will Theorem in Quantum Mechanics.

Keywords: Topological invariance, Combinatorial Set-Theoretic Foundations, Free Will Theorem, Quantum Mechanics, Multiverse Cosmology.

1. INTRODUCTION

Although there are strong philosophical underpinnings from Fichte's idealism to Husserl's transcendental phenomenology in Weyl's constructivism, I shall limit myself to the mathematical motivations in his appraisal of the probabilistic approach to physics. At the time (his 1920 paper [17]), Weyl shared with the intuitionist Brouwer the idea that the mathematical continuum was a process of becoming « *ein Prozess im Werden* » (see [18]). For Weyl, the physical world is also in an infinite process of becoming and the notion of the end of time is only a limit idea « *Grenzidee* ». While the causal outlook is bound to the eternal cycle of causal chains, the statistical or probabilistic view privileges decisions that are autonomous and causally absolutely independent of each other «*selbständige, kausal voneinander absolut unabhängige Entscheidungen*» ([6], p. 541). Weyl adds that these «decisions» are the real ingredients of the world. The causal static view describes only the world scene «*Schauplatz*», not the real events (of the statistical probabilistic worldview), Weyl concludes – see [4] for Weyl's view on the causal universe of Relativity Theory.

To me, Weyl's foundational stance offers a strong supportive hypothesis to the Conway-Kochen free will theorem and I would like to add a combinatorial probabilistic argument to defend the idea. Weyl himself uses the binomial distribution ([17], 539) to stress the probabilistic independence of physical events and I shall use the argument against the naïve thesis of a current cosmological view on infinite worlds with infinite reproduction of true copies or doubles (or *Doppelgänger*) – Weyl had insisted on the *one* world of infinitely novel becoming. Let us start with the binomial distribution

$$p\ (k) = \binom{n}{k}\, p^k\, q^{n-k}$$

and the expansion of the binomial coefficient given by the factorial

$$\sum_{h=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \mathit{for}\ \frac{n!}{k!(n-k)!} = {}_nC_k$$

for the combinations C with the power set 2^n of a set of n elements. By Cantor theorem the power set P (X) > X, P(X) = 2^X and for a denumerable set $\aleph_0$

$$\mathrm{P}\ \{\aleph_0\} = 2^{\aleph_0} = \mathrm{c}\ (\text{the continuum})$$

and P $\{\aleph_0\} = \{\varnothing\}$, {finite subsets}, {denumerable subsets $\aleph_0$}, $\{2^{\aleph_0}\}$. Thus the continuum has cardinality $2^{\aleph_0}$ and – independently of the Continuum Hypothesis which asserts that $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ or the Generalized Continuum Hypothesis $\forall\sigma\ (\aleph_\sigma < 2^{\aleph_\sigma} = \aleph_{\sigma+1})$ [1] – Cantor has shown that all continua in any dimension are *isomorphic*, but Brouwer has subsequently shown that they are not *homeomorphic*, that is the bijection is not continuous, for example there is no continuous transformation between points on a circle and points on a sphere. The argument shows that finite subsets are indistinguishable in the continuum; in terms of measure-theoretic probability theory

(Borel-Kolmogorov), they are negligible or of measure zero, so that there is no infinite reproduction of a finite configuration (combination) in an indeterministic universe. In a deterministic universe, eternal return is possible only in a spatially finite world. Poincaré's recurrence theorem states that an isolated mechanical system will come back arbitrarily close to its initial state or conditions in a universe of *finite volume* on an arbitrarily long temporal sequence (see [11]).

The combinatorial argument points to infinitistic hypotheses in contemporary physics, from quantum theory (e.g. Everett's multiverse theory) to cosmology (e.g. parallel universes) as well as to logical or mathematical theories which postulate actual infinities.

Hermann Weyl as a constructivist logician and mathematician who was also deeply involved in physics and its philosophy could not conceive of the continuum, mathematical or physical, as a static set-theoretic transfinite universe. This accords well with a finistitic worldview which grants the physical world with a spontaneous self-determining becoming or evolution as advocated in the Conway-Kochen proposal ([6] and [7]). The Conway-Kochen argument dispenses with probability or random processes ; for Weyl, the causal (deterministic) independence of decisions « *Entscheidungen* » is likely indistinguishable from the statistical (stochastic) « indecisions » in the constructive theory of a becoming continuum ([17], 541) from the point of view of local observers [9].

2. THE CONWAY-KOCHEN FREE-WILL THEOREM

In their paper [7] Conway and Specker quote Hermann Weyl's saying : « The objective world simply is, it does not happen » and reject this block-universe vision of an eternal spacetime arena for General Relativity, but they neglect to add that Weyl mentions the « gaze of consciousness » ([19], 116) as the sequential order of events in the transcendental world which is a physico-mathematical construction of our own. This last view is certainly coherent with the free will idea that Conway and Kochen put forward in their papers [6] and [7].

To make explicit their idea of free will in Quantum Mechanics, they have formulated three axioms :

1) the SPIN axiom says that a triple experiment, that is an experiment in a three-axes x, y, z coordinate system, yields the outcome 1, 0, 1 for spin-1 particles

2) the TWIN axiom asserts that spatially separated coupled spin-1 particles can give the same answer when they are asked the same question as in the well-known EPR experiment with the spin-$^1\!/\!_2$ statistics

$$\Phi = 1/\sqrt{2}\ [(\varphi_+ \quad \psi_+) + (\varphi_- \quad \psi_-)]$$

3) finally, the FIN axiom states a causal antecedence (relativistic causality) of the source of a signal over its reception.

The FIN axiom is put in a stronger form in [7] under the name MIN claiming that two experimenters exchanging on the 33 particular directions (with 40 triples x, y, z) of the Kochen –Specker coordinate frame for spin-1 particles are free to pick any direction and any triple on their side of the exchange : the Strong Free Will Theorem declares that the freedom of choice is not « a function of properties of that part of the universe that is earlier than a response in this exchange with respect to any initial frame of reference » ([7], 228). Notice the ontological import of the exchange process, since it is a spin-1 particle responding to the call, so that if an experimenter is free to experiment or to set up an experiment, the « objects » of the experiment, that is the particles experience an equal amount of freedom in such a way that the independence of both outcome and set-up parameters is preserved. Conway and Specker are clearlty defending an objective realist interpretation of free will and if experimenters (human, robotic or otherwise) have a share of that freedom, it is imparted on them by Nature ! This view is a far cry from Weyl's transcendental standpoint, but is in line with the assumed realism of the EPR experiment, the Bell theorem on non-contextual local hidden-variable theories or Bohm's version of QM and various no-go theorems in QM. The question of determinism is at the philosophical center here and of course it is not settled by the free will theorem, nevertheless there is an immediate profit to be gained by the foundational discussion and we can compare briefly the Conway-Kochen way with Weyl's views in the first section.

While Weyl puts the emphasis on the statistical worldview, Conway and Kochen insist that they do not need any notion of probability or stochastic process to establish their result. They argue for an overarching indeterminism that is grounded in the very nature of the quantum-mechanical world. Weyl's views in 1920 were expressed in the infancy of quantum physics and although he had a clear understanding of the distinction between causal and statistical theories, he did advocate the idea that decisions or free will choices are « autonomous and causally absolutely independent of each other » and that they are the real ingredients of the world in an everlasting process of becoming. This is, in my opinion, in complete agreement with the Conway-Kochen ontological standpoint, but once again one should not ignore that there is a deep philosophical divide between the two positions. Let me emphasize the rôle that quantum logic has played in the evolution of ideas in that context. Hermann Weyl was among the first to advocate the concept of a quantum logic that is at the heart of the contemporary debate. Gleason's theorem on the measure of closed subspaces of a Hilbert space and Kochen-Specker theorem on the non-embeddability of the partial Boolean algebra of observables in a commutative Boolean algebra can be seen as the final blows on non-contextual hidden-variable theories; those results among others belong to quantum logic and non-standard logic including intuitionistic logic and maybe non-classical probability theory (see Nelson[13]). Surely, Conway and Kochen are not reluctant to consider logical issues, but they seem to be more inclined to adopt a general philosophical perspective, maybe along Lucretius'poem *De rerum natura* in which the Roman philosopher and disciple of Epicurus defends the idea that man's free will is deducible from free will in nature through the «*clinamen*», the deviation or declination of particles (or atoms for Lucretius) in the void of the universe or universes, since Lucretius proclaims a multiplicity of universes in an infinite world much in the spirit of multiverse theory. Surely the analogy is incorrect to the point that a constructivist defendant cannot impart a literal meaning to free choice for elementary particles even in the context of denumerably infinite degrees of freedom as in quantum field theories. A realist ontology is not compatible with the notion of a stochastic local observer who is the only judge who can arbitrate between causal and acausal processes.

3. A GENERAL NO-CLONING THEOREM IN THE MULTIVERSAL COSMOLOGY

There is strong analogy between the Conway-Kochen theorem and the general no-cloning proposal: both have to do with the non-reproducibility of measurements and their outcomes in an indeterministic setting. But there is also a deep difference between the two for free will cannot be demonstrated mathematically, while the general no-cloning theorem has a rigorous mathematical proof based on set theory and algebraic topology. Let us begin with some preliminaries.

3.1 The no-cloning theorem in QM

The argument for the no-cloning theorem in QM goes back to the papers of Wooters and Zurek [20] and Dieks [8]. The fundamental idea is quite simple : a single quantum (or quantum state) cannot be cloned. Wootters and Zurek even question the very notion of quantum state in [21]. One singles out an arbitrary state and shows that due to the time evolution operator and linearity and unitarity (bounded linearity) conditions, all states – for the singled-out state is arbitrary – cannot be cloned in a copy-multiplier experiment. Quantum Mechanics is couched in an infinite-dimensional Hilbert in a second-order language whose cardinality is $2^{\aleph_0}$ in the set-theoretic idiom. Infinite-dimensional means $\aleph_0$ dimensions, that is the denumerable infinity of the set N of positive integers – $2^{\aleph_0}$ is non-denumerable and it corresponds to the set R of real numbers. There is no bijection between $\aleph_0$ and $2^{\aleph_0}$ which is also the power set of $\aleph_0$. It is in that context that Cantor formulated his Continuum Hypothesis as stated above in section 1.

The first occurrence of the continuum Hypothesis appears in a 1878 paper « Contributions to the theory of multiplicities (manifolds) » ([5], 119-133) in which Cantor attempts to prove that all continuous manifolds are of the same denumerable dimension using the concept of the non-denumerable cardinality (*Mächtigkeit*) of the reals $2^{\aleph_0}$. In a subsequent paper « On a proposition in the theory of continuous manifolds » ([5], 134-138), Cantor gives a defective proof that all continua are of the same dimension, this time using the Riemannian notion of a multivalued function. One has to wait till Brouwer's papers in 1910 and the following years ([2] and [3]) to get the right concept : continua of different dimension might be isomorphic (have the same cardinality), but they cannot be homeomorphic. It is in his 1910 paper « Proof of the invariance of the dimension number » that Brouwer proves the following statement :

> An m-dimensional manifold cannot contain a one-to-one continuous function of a domain of a greater dimension number.
>
> ([2],165)

The same is true for $l < m$ and this means that there is no homeomorphism or bicontinuous mapping between manifolds of different dimension. Brouwer uses various concepts like simplicial maps and the fixed-point theorem. In particular, Brouwer's fixed-point theorem was inspired by Kronecker's notion of the winding number « *Windungszahl* » or indicatrix. The fixed-point theorem states that a one-to-one continuous transformation of an n-dimensional element in itself posesses a fixed point ; in contemporary idiom, the indicatrix is called an index or a topological degree for a continuous function to itself on the closed unit ball D^n such that it has at least one fixed point – see Gauthier [12]. In the language of general (set-theoretic) topology, Brouwer's proof says simply that if U is an open subset of a Euclidean space R^n and we have an injective map f: $U \rightarrow R^n$, then the image of $f(U)$ is open and homeomorphic : R^n is not homeomorphic to R^m if $m \neq n$.

I use those notions to formulate a general theorem to the effect that there cannot be exact copies of elements (states, objects or persons) that could be clones or doppelgangers in an infinite multiverse. There are cosmologists like A. Vilenkin (see [14] and[16]) or D. Deutsch and string theorists like B. Greene who would be inclined to think that there is an exact reproduction of states of affairs in an infinite universe of finite (or infinite) dimension. The following theorem shows that it cannot be the case.

3.2 A no-cloning theorem in the multiverse cosmology

*Theorem***.** In an n-dimensional infinite universe, there cannot be an exact reproduction or homomorphic images of items (finite or infinite) in any finite or denumerably infinite $\aleph_0$ subuniverse of the multiverse.

*Proof***.** We take the notion of multiverse in its original sense of Everett's many-universe interpretation of QM – as the universal ramification of the wave function – but the notion includes any cosmological theory like heterotetic string theory in 10, 11 or 26 dimensions with at least 10^{500} universes attempting a unification of cosmology or General Relativity with Quantum Mechanics. The most general setting is set-theoretic combinatorial : an arbitrary subset X of a denumerably infinite set $\aleph_0$ is included in the power set of that set, that is

$$X \subseteq P(X)$$

and by the Cantor theorem on cardinalities

$$\forall X\,(\text{card}\,X < \text{card}\,P(X)).$$

Recall that the power set 2^n, the set of all the subsets of a given set n, represents all the combinations C of the elements or members of the set, as in the binomial theorem used by Weyl (see above) in his probabilistic picture of a universe in a process of infinite becoming.

There is no bijection between $\aleph_0$ and $P(\aleph_0)$ and *a fortiori* there in no continuous bijection between an arbitrary subset (subuniverse) and the multiverse or between a countable subuniverse in any finite dimension n and the (uncountable) superuniverse of dimension ω or even ω_1 for the cardinality $2^{\aleph_0}$. This is the situation in metric spaces with Hausdorff dimension, finite and infinite (or transfinite). Turning to the topological dimension setting, we have topological spaces (manifolds) which are locally Euclidean R^n to refer to Cantor's original faulty argument; here we deal with homeomorphic images and since Brouwer's proof on the invariance of the dimension number works for open sets and the system of their neighborhoods, the argument is straightforward: there is no homeomorphic image of an n-universe to an m-universe for $m \neq n$. We can still specify our argument to metric topological spaces, for example a Hilbert space which is also a Banach space where we have the open mapping theorem which sends open sets to open sets between Banach spaces of finite or infinite topological dimension. Moreover, the sequence of linear subspaces of a Banach space has a local open complement by the following argument:

Let B be an n-dimensional Banach space and let $F^\perp$ be the sequence of closed linear manifolds or subspaces $F^\perp$ of B. Set $F^\perp = F^-$, the closure of all $F^\perp$. The local complement F^+ of F^- such that

$$F^\perp = F^+ - F^-$$

is an open subset of B. If we take a locally convex space as the space B, the sequence G of open subsets g containing a neigbourhood of each of their points admits readily a local complement which is also open (by locality), since the metric complement

$$-A \equiv \quad x : x \in X, \rho(x, A) > 0$$

of a located subset A, *i. e.*

$$\rho(x, A) \equiv inf \quad \rho(x, y) : y \in A$$

(if this distance from x to A exists $\forall x \in X$) is open, for we have

$$\rho(x,A) \equiv inf \ \ \rho(x,y){:}\, y \in A$$

(see Bishop [1967] for the notion of located subset). A still more special case can be obtained, if we restrict ourselves to a fixed point and and a local homeomorphism, a fiber in the language of sheaves, defined by the restriction on a function f: $X \rightarrow Y$ for topological spaces X and Y with

$$f|X : X \rightarrow f(X)$$

and the inverse image $f^{-1}(y)$ for $y \in Y$. Here again we have an open set (and neighborhoods) and it is only that in spaces of the same dimension that this obtains, since as Brouwer's theorem shows that for spaces of different dimensions $n \neq m$, there is no homeomorphic image (or open map) in the neighbourhood of an open set in a Banach space, even at infinitesimal distance.

The immediate effect of that result is that there cannot be any reduplication of an open map in manifolds of dimensions $n > 1$ and a particle cannot meet its exact double in the *free* world of the multiverse ! In QM, the phenomenon of entanglement of states is invoked, but our result is equally valid for disentangled dual states – duality is not an internal mathematical property in Banach spaces, nor an intrinsic feature of the physical world.

The ontological indiscernability principle of Leibnizian inspiration and reduced to the statistical principle of invariance permutation by van Fraassen in the quantum-mechanical context (see for example [15], chapter 11) is used to the same effect and is thereby included in the no-cloning theorem which could be termed the homeomorphic *indiscernability* principle, since it is a *domain invariance* theorem.

Our result also strengthens the no-cloning theorem in QM and imposes also limitations on approximate clonings as in the paper of Busek and Hillery [4] in which they imagine copying states in the (undefined) neighborhood of a given state or hyperinstances or *almost exact* copies in multidimensional cosmology. For supersymmetric theories, one should remember that homeomorphisms and diffeomorphisms reduce to automorphisms in spaces of the same dimension and should not expect superpartners at near range or in a nearby dimension. The no-cloning idea applies equally to the « transdimensional » cosmology suggested by Vilenkin and others [14] and [16] in the measure problem of the multiverse, since the essential use of the notion of hypersurface refers to an m-dimensional manifold with an $m-1$ dimensional submanifold in differential topology.

From the perspective of the local observer [9], the cosmological holographic principle (introduced by Gerhard t'Hooft and Leonard Susskind) which reduces the dimensions of the multiverse to a two-dimensional surface is certainly compatible with our result, since everything happens *outside* the local observer and the physical universe appears as a homeomorphic image to the *same* local observer. But the information gathered on the two-dimensional surface cannot be projected back on a three-dimensional cosmic scene without diffraction, so that a homeomorphic cloning cannot be realized. Put differently, the local observer is a fixed-point observer in interaction with the observable universe and has a unique point of view. Otherwise, the highly speculative theory of eternal and infinite observers is not immune to serious foundational criticisms and even though string theory (superstring or M-theory) is a viable theory as a finitary renormalizable theory, it should be free of *doppelgängers* or ghost observers with the restrictions imposed on conformal mapping. The philosophical, logical and mathematical shortcomings of cosmologists and string theorists are no excuse when it comes to logico-mathematical foundations.

4. CONCLUSION

The general result is congenial to Weyl's views on the ever-becoming world and Brouwer's idea of the (mathematical) continuum as a process. In the classical Cantorian view, the continuum is made of uncountable *distinct* real numbers, while in the Brouwerian-Weylian view the continuum as an ever-becoming process is made of *indistinguishable* elementary processes. In both cases, as we have seen, there is no exact reproduction or copying of arbitrary individuals, may they be items of an infinite species, animal, human, robotic, alien or supernatural, entities, Leibnizian monads, Nietzschean «cyclists» in an infinite return or physical objects in general in an infinite-dimensional universe. Our result is also compatible with the Conway-Kochen free will approach for even in the absence of time, particles have the choice or the random pick of a denumerable infinity of directions and not just the the 33 directions of the triple *x, y, z* experiment – of course an actual experiment requires time and is limited to a finite number of decisions, as Weyl puts it. Those decisions take 1/10 of a second for human experimenters as Conway and Kochen admit ([6], p.1142), but they also take place in Weyl's transcendental (*a priori*) time for observers. From an information-theoretic point of view, transmission of signals also takes time and there is limit above, may it be the speed of light or more generally causal antecedence of the emission of a signal over its reception and this also can be accounted for in a non-realist constructivist way as the transcendental channel of intersubjective communication that can even be quantified – counting is an objective activity of a free agent…

As far as the philosophy of free will is concerned, our result means that the question is not of ontological import, as Conway and Kochen claim in their realistic posture, but is essentially of a constructivist nature, as Weyl describes [19] the theoretical or symbolic construction of the world in physico-mathematical terms.

REFERENCES

[1] Bishop, E.: *Foundations of Constructive Analysis*. McGraw-Hill, New York (1966)

[2] Brouwer, L.E.J.: Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl. *Math. Annalen* **70**, 161-165 (1910)

[3] Brouwer, L.E.J.: Beweis der Invarianz des n-dimensionalen Gebietes. *Math. Annalen* **71**, 305-313 (1912), **72**, 55-56 (1912)

[4] Busek, V. and Hillery, M.: Quantum Copying: Beyond the no-cloning theorem. *arXiv:quant-ph/19607018v1* (1966)

[5] Cantor, G.: Über einen Satz aus der Theorie der stetigen Mannigfaltigkeiten. *Abhandlungen mathematisch und philosophischen Inhalts*, Georg Olms, Hildesheim, 134-138 (1966)

[6] Conway, J. and Kochen, S.: The Free Will Theorem. *Found. of Physics* **36**,1441-1473 (2006)

[7] Conway, J. and Kochen, S.: The Strong Free Will Theorem. *Notices of the American Mathematical Society* **56**, 226-232 (February 2009)

[8] Dieks, D.: Communications by EPR devices. *Physics Letters* A92, 271-272 (1982)

[9] Gauthier, Y.: Quantum Mechanics and the Local Observer. *International Journal of Theoretical Physics* **22**, 1141-1152 (1983)

[10] Gauthier, Y.: Hermann Weyl on Minkowskian spacetime and Riemannian geometry. *International Studies in the Philosophy of Science* **19**(3), 261-269 (2005)

[11] Gauthier, Y.: The Construction of Chaos Theory. *Foundations of Science* **14**, 153-165 (2009)

[12] Gauthier, Y.: Classical Function Theory and Applied Proof Theory. *Int. Journal of Pure and Applied Mathematics* **56**, no. 3, 223-233 (2009)

[13] Nelson, E. *A Radically Elementary Probability Theory*. Princeton University Press, Princeton, N.J. (1987)

[14] Schwarz-Perlow, D. and Vilenkin, A.: Measures for a Transdimensional Universe. *arXiv;1004. 4567v2* (2010)

[15] Van Fraassen, B.: *Quantum Mechanics. An Empiricist View*. Oxford Clarendon Press, Oxford, 1991.

[16] Vilenkin, A.: A Measure of the Universe. *arXiv: hep-th/0609193v3* (2006)

[17] Weyl, H.: Das Verhältnis der kausalen zur statistischen Betrachtungsweise in der Physik , first published in *Schweizerische Medizinische Wochenschrift* **50**, 537-541 (1920) reprinted in *Gesammelte Abhandlungen*, K. Chandrasekharan, ed., (Springer, New York), vol. II, 113-122 (1968)

[18] Weyl, H.: *Das Kontinuum*. Veit & Co., Leipzig, (1918)

[19] Weyl, H.: *Philosophy of Mathematics and Natural Science*. Atheneum, New York (1963)

[20] Wootters, W.K. and Zurek, W.H.: A single quantum cannot be cloned. *Nature* 299, 802-803 (28 October 1982)

[21] Wootters, W.K. and Zurek, W.H: The no-cloning theorem, Physics Today **62** (2), 76-77 (2009)

Chapitre 15

Commentaire de « On Simple Inconsistency of Simple Realist Interpretations of QM and Related Mathematical Theories »

Dans cet article*, je discute du caractère inconsistant ou contradictoire sur le plan logique et mathématique des thèses réalistes, superdéterministes (‘t Hooft et alii) et « multiversistes » (H. Everett *et alii*) qui ont le même contenu physico-mathématique malgré les réticences de ‘t Hooft vis-à-vis la théorie des multivers d’Everett, dont il dit qu’elle baigne pratiquement dans le non dénombrable. L’univers superdéterministe unique de la fonction d’onde chez ‘t Hooft ne quitte pas le non dénombrable, puisque la fonction d’onde superdéterministe a la cardinalité du continu dans R (les réels) et C (les complexes). Qui plus est, les deux théories ont un *observateur interne* incapable de produire des mesures finies ou de cardinalité dénombrable à la limite dans la pratique expérimentale. L’indistinction foncière entre système observé et système observateur rend inopérante toute théorie de la mesure et invalide tout formalisme physico-mathématique qui prétend générer sa propre interprétation physique. Les mêmes inconvénients théoriques affligent les théories mathématiques réalistes qui prétendent reproduire dans les ombres d’un ciel platonicien idéal la réalité d’une pratique concrète. C’est sans doute dans ce sens que le grand promoteur de la théorie des cordes (supercordes et membranes) Edward Witten, physicien et mathématicien (médaillé Fields) s’est demandé récemment si on ne pouvait pas concevoir une physique sans recours au continu mathématique de cardinalité non dénombrable $2^{\aleph_0}$ pour assurer la consistance interne de la théorie physique. Certains, comme le physicien suisse Nicolas Gisin, réclament une refonte des mathématiques classiques infinitaires pour rendre compte des phénomènes quantiques d'un univers fini. Par ailleurs, le physicien autrichien Anton Zeilinger que je cite dans l'article est un pionnier de la théorie de l'information quantique et de la téléportation quantique – qui téléporte l'état quantique d'une particule et non une particule quantique comme telle, faut-il le rappeler – et il affirme dans une interview en 2001 que le réalisme naïf d'un monde indépendant de notre observation (*unabhängig von unserer Beobachtung*) est bien mort. Je souligne de nouveau que j'ai fait valoir ce point de vue dès 1971 dans l'article «The use of the axiomatic method in quantum physics» dans *Philosophy of Science* et surtout dans l'article de 1983 «Quantum Mechanics and the Local Observer» dans *International Journal of Theoretical Physics* (voir les références [2] et [3]).

Je discute aussi des ondes gravitationnelles que la théorie de la Relativité Générale (RG) prévoyait, mais dont l'existence était mise en doute par Einstein. Je veux commenter plus longuement les implications de ce résultat expérimental. Les observations récentes de LIGO en astrophysique semblent confirmer l'existence des ondes gravitationnelles. De même, la présence d'un trou noir a été détectée récemment dans une galaxie près de chez vous, Messier 87 (M87) à 50 millions d'années-lumière de la Terre ; les trous noirs sont aussi prévus par la RG, mais Einstein refusait de croire en la possibilité réelle d'un tel phénomène. Il faut dire que la question relève du noyau physico-mathématique de la RG ; il s'agit de l'équation (ou des équations du champ) discutée brièvement dans l'article, plus particulièrement il s'agit du tenseur de courbure $R_{\mu\nu}$ (R pour Ricci) qui a une longue histoire, de Gauss à Riemann à Ricci, Einstein, Hilbert et Hermann Weyl entre autres.

Einstein n'est pas le premier à penser que l'espace a une structure courbe dans un univers matériel qui est soumis au motif central de Kepler «*Ubi materia, ibi geometria*», là où il y a la matière, il y a la géométrie. Avec Gauss et Riemann, cette géométrie est celle des surfaces et des espaces courbes. Le physicien anglais Clifford a été le premier à suggérer que la présence de la matière incurvait l'espace. Einstein a d'abord imaginé un univers sphérique et stable avec une constante cosmologique λ pour assurer la fermeture d'un univers fini par une sorte d'énergie négative. L'équation du champ n'est pas canonique, c'est-à-dire qu'elle génère une multiplicité de solutions ou modèles possibles, elle n'a pas d'interprétation unique. Ainsi de Sitter a produit une solution exacte de l'équation du champ pour un univers vide de matière et Schwarzschild a conçu le premier la solution du trou noir ou effondrement gravitationnel anticipé par Laplace et le physicien anglais Mitchell au 18e siècle. Gödel a même proposé un modèle non standard, l'univers tournant (*the rotating universe*) qui retourne dans le passé ; c'est aussi une solution exacte, mais son interprétation physique soulève des difficultés insurmontables.

On sait que Poincaré le premier a formulé le principe de relativité pour la relativité restreinte et avait même obtenu la formule $E = mc^2$ qui n'est en réalité pas très difficile à dériver de la mécanique classique, si on substitue c^2 au v^2 de la physique newtonnienne. Lorentz, le maitre d'Einstein, avait réussi à dériver les transformations de la RR de la constante c – Einstein avait voulu baptiser d'abord sa théorie de la relativité théorie des invariants « *Invariantentheorie* », une appellation qui existait déjà en mathématiques.

On admettait jusqu'à récemment que Hilbert avait obtenu la bonne formulation de l'équation du champ formulée par Einstein

$$R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\, g_{\mu\nu} R - \lambda g_{\mu\nu} = - 8\pi G/c^4 T_{\mu\nu}$$

pour le tenseur de courbure R (scalaire de Ricci), le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$, la constante gravitationnelle d'Einstein $8\pi G/c^4$ pour la constante gravitationnelle de Newton G et le tenseur d'énergie-impulsion T[1]. Le terme lambda λ est une addition d'Einstein qu'il a répudié plus tard, qualifiant cette addition de plus grande erreur de sa vie ; il en a fait d'autres… Einstein qui avait peiné plusieurs années sur l'équation du champ avec l'aide du mathématicien Marcel Grossmann a fait appel à un moment donné à Hilbert, le plus important mathématicien de son époque. Il appert que Hilbert qui travaillait à une théorie unifiée de l'électromagnétisme (théorie de Mie) et de la gravitation a obtenu la bonne formulation en moins de cinq jours à l'aide du calcul des variations en termes du principe variationnel de la moindre action pour déterminer les géodésiques d'un espace courbe. Hilbert a invité Einstein à Göttingen et a contribué, bénévolement peut-on dire, dans des lettres et dans des cartes-postales, à résoudre « l'argument du trou » d'Einstein : l'argument du trou impliquait l'invariance des coordonnées spatio-temporelles dans un trou gravitationnel autour d'un astre en fonction de leurs transformations covariantes difféomorphiques (différentiables). La solution du problème est proprement mathématique, alors que la solution physique d'Einstein suppose qu'il y a une coïncidence des points de l'espace-temps partout – dans le trou et hors du trou. On sait que cette solution pose aussi des problèmes à l'horizon d'un trou noir – l'existence d'un « mur de feu ».

Or le texte de Hilbert de 1915 « *Die Grundlagen der Physik* » qui contenait la solution variationnelle a été charcuté à une époque récente, semble-t-il, et la carte postale de Hilbert à Einstein a été mystérieusement détruite ou perdue. Einstein a parlé de cet épisode comme une « *Nostrifiezierung* » ou appropriation intellectuelle, voulant dire par là que Hilbert s'était approprié la solution. Hilbert, beau joueur, n'a pas répliqué à cette accusation à l'époque, mais il a déclaré en 1924 « Einstein est finalement revenu à ma formulation », c'est-à-dire la solution à l'aide du principe variationnel du plus court chemin après que Einstein eut publié en 1922 ses *Princeton Lectures* sous le titre *The Meaning of Relativity* (en traduction anglaise) qui contenait la formule de l'action de Hilbert sans mention de Hilbert. L'équation géodésique porte sur une intégrale de chemin curviligne qui agit sur le tenseur métrique :

$$S = \int {}^1\!/\!_2\, k\, \mathrm{R} \sqrt{-\mathrm{g}}\, \mathrm{d}^4\mathrm{x}$$

(avec la constante gravitationnelle d'Einstein $k = 8\pi\mathrm{G}/\mathrm{c}^4$) pour une géodésique dans un espace courbe ; c'est ce que l'on appelle l'action d'Einstein-Hilbert par déférence pour Einstein, mais il est bien évident que c'est Hilbert qui est à l'origine de l'idée et la solution pour l'équation du champ par la médiation de l'équation géodésique qui induit une métrique dynamique dans les équations du champ. Einstein a introduit l'*action* dans son *The Meaning of Relativity* simplement sous la forme :

$$\int ds \text{ or} \int \sqrt{\mathrm{g}_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu}$$

en admettant que c'était le chemin (*par l'intégrale de chemin*) le plus simple pour la dérivation des équations du champ[2].

Ce serait là *l'action d'Einstein* après *l'action de Hilbert,* d'où *l'action d'Einstein-Hilbert* comme inversion historique pour *l'action de Hilbert-Einstein*, à moins que ce ne soit qu'une question d'ordre alphabétique !

Or la question de la priorité a ressurgi récemment dans les travaux historiographiques du trio Corry, Renn, Stachel qui soutiennent que Hilbert n'avait pas obtenu l'équation du champ. Mais un physicien théoricien a contesté les conclusions du trio en soulignant qu'ils n'avaient pas mentionné le texte tronqué de Hilbert dans leur analyse du débat. D'autres commentateurs ont suivi, surtout des physiciens et mathématiciens, qui ont pris la défense de Hilbert sans conclure pourtant au plagiat de part et d'autre, d'où l'appellation prudente du couple « action d'Einstein-Hilbert » ! L'ouvrage paru en 2005 d'une historienne sérieuse Daniela Wuench, *Zwei wirkliche Kerle*, qu'on peut traduire par « *Deux bons gars* », conclut qu'il y a d'importantes lacunes dans l'histoire du trio d'historiens qui avaient contre-attaqué Winterberg, allant jusqu'à l'accuser d'antisémitisme, ce qui rappelle le procès qu'on a voulu faire à Heisenberg il n'y a pas si longtemps.

J'opte évidemment dans cette affaire ou cette intrigue pour Hilbert qui en avait vu d'autres, en particulier avec le mathématicien intuitionniste Brouwer qui était un virulent polémiste et même s'il a critiqué son ancien professeur Kronecker, Hilbert a reconnu qu'il était tributaire du finitisme kroneckerien dans ses travaux sur les fondements des mathématiques.

Quant à Einstein qui a amorcé le débat avec Hilbert, on peut rappeler qu'il a fabriqué des contorsions dans les influences qu'il a subies de Lorentz à Poincaré et Hilbert jusqu'aux expériences de Michelson (sur l'*inaction* du vent d'éther) que sa première épouse mathématicienne Mileva lui rapportait fidèlement de Heidelberg. Einstein le personnage a voulu préserver sa réputation de grand savant original malgré ses piètres connaissances des mathématiques – il avouait à Marcel Grossmann qu'il devait aller à pied dans les calculs mathématiques alors que le mathématicien y allait à dos de cheval… Il faut cependant reconnaître à Einstein une imagination créatrice qui lui permet de se voir chevaucher un rayon lumineux à vitesse constante *c*, comme il le confesse dans son texte de 1905 « Sur l'électrodynamique des corps en mouvement ».

Mais une part importante de toute cette histoire relève de l'anecdotique et il vaut mieux s'attaquer aux fondements logiques, mathématiques et physiques du savoir scientifique que j'aborde dans l'article.

NOTES

* L'article « Simple Inconsistency of Simple Realist QM Interpretations and related Mathematical Theories » est paru dans *Research and Communications in Mathematics and Mathematical Sciences*, vol. 6, no. 2 (2016) : 117-132.

1. Dans l'équation du champ, l'expression à droite 8π revoie à l'équation de Poisson pour le potentiel gravitationnel avec 4π pour l'aire d'une sphère – ici 2 x 4π pour un univers sphérique stationnaire ; l'expression à gauche ½ $g_{\mu\nu}$ renvoie à la formule classique de l'énergie cinétique ½ mv^2. Pour plus de détails, on pourra consulter mon ouvrage *Théorétiques. Pour une philosophie constructiviste des sciences* (Le Préambule, 1982), p. 100 et s.

2. Dans l'introduction de son texte réimprimé de 1915 « *Die Grundlagen der Physik* » paru dans *Mathematische Annalen* 92 (1924) : 1-32, Hilbert déclare sèchement que Einstein est revenu finalement (*schliesslich*) et directement (*geradenwegs*) aux équations de sa théorie de 1915 après avoir salué les travaux de Hermann Weyl qui a adopté le point de vue de Hilbert dans son ouvrage capital de 1918, *Raum, Zeit, Materie* (*Espace, temps, matière*). Cette théorie reposait sur l'utilisation du lagrangien – qu'on peut appeler l'action de Lagrange – qui décrit le mouvement ou la cinétique d'un système mécanique classique en termes du principe variationnel de moindre action rectilinéaire. L'action de Hilbert consistait à définir les variables dynamiques des équations du champ d'une théorie unifiant la théorie électromagnétique de Mie et la gravitation : la théorie de Mie stipulait que le champ électrique – et magnétique selon la théorie de Maxwell – dépendait du champ gravitationnel. On peut présumer que les travaux d'Einstein après 1916 se trouvent résumés dans ses *Princeton Lectures* données en allemand en mai 1921 et traduites en anglais sous le titre *The Meaning of Relativity* publié par Princeton University Press en 1923 et on peut penser qu'ils sont à l'origine de la remarque de Hilbert sur ces travaux d'Einstein. Quoi qu'il en soit, après avoir souligné les travaux de Weyl, c'est bien timidement que Einstein introduit le travail de Hilbert (sans mentionner son nom) sous le titre « *principle of variation* » en page 99 après avoir évoqué l'intégrale curviligne du plus court chemin pour les géodésiques en page 83. Peut-on supputer dans ce contexte que Einstein n'a pas suivi un parcours rectiligne dans sa quête des transformations covariantes de la RG pour l'argument du trou dont Hilbert l'a tiré, si j'ose dire.

On Simple Inconsistency of Simple Realist Interpretations of QM and Related Mathematical Theories

ABSTRACT

A few realist theories in physics and mathematics are analyzed from a constructivist viewpoint. Technical notions like fixed-point theorems and homeomorphisms are employed to pinpoint the logical and mathematical import of the critique.

2010 MSC : 03E30, 58D10, 81P10, 83F05

Keywords : Quantum theory, relativity theory, cosmology, fixed point, homeomorphism

1. INTRODUCTION : REALISM IN PHYSICS

G. 't Hooft defends a realist interpretation of QM in his long working paper *The Cellular Automaton Interpretation of Quantum Mechanics*[1][9]. The author advocates a deterministic or superdeterministic view of the universal wave function for the Schrödinger equation that would not ramify as in Everett's many-universes interpretation – they are *practically* uncountable, as 't Hooft says in his informal idiom –, but would give rise to a unique universe, a fluctuating vacuum filled with «solid» quanta or «fluid» particles that would obey a lawlike determinism evolving from a given fundamental field such as a scalar field or a quantum (true or false) vacuum. The entire universe of the wave function has a real deterministic *ontological* basis in Hilbert space following 't Hooft. But 't Hooft doesn't say that such a basis must have a finite cardinality or at most an infinite countable cardinality $\aleph_0$. The universal wave function ψ with its values in **R** or **C** has however the uncountable cardinality $2^{\aleph_0} = \beth_1$ (beth number), the power of the continuum – the continuum hypothesis (CH) $c = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$ is not needed in our discussion –. The infinite-dimensional Hilbert spaces that are used in the separable space topology are all homeomorphic in countable cardinality (of a countable orthonormal basis): a Hilbert space of uncountable cardinality $2^{\aleph_0}$ is not separable and the notion of homeomorphism here has the usual definition of a bicontinuous bijection, that is, if the function $f(x)$ is continuous, its inverse $f^{-1}(x)$ is also continuous. The same holds in the more general Fock spaces for the second quantization in quantum field theory with its many-particle systems and von Neumann C* separable algebras, while larger spaces like infinite-dimensional Banach spaces equipped with an uncountable Hamel basis provided by the axiom of choice smash all dimensions in one *indistinct* all-encompassing continuum. Separable Hausdorff spaces as functional spaces have a cardinality higher than the continuum $\boldsymbol{c}$, that is $\beth_2$ or 2^c, but their Hausdorff dimension d for regular metric spaces like Euclidean spaces $\mathbf{R}^n$ or $\mathbf{R}^\omega$ (the ordinal of $\aleph_0$) corresponds to the finite or countable dimensions of Hilbert spaces – the Hausdorff dimension d for irregular finite or countable metric spaces is 0. Hilbert spaces of finite or $\aleph_0$ dimensions are also Banach spaces, but they are the natural setting for self-adjoint operators and observables designed to capture the finite probability values of the Born rule ($\psi^*\psi = |\psi|^2$) for *actual* concrete measurements. There is no bijection between $\aleph_0$ and $2^{\aleph_0}$, the set of all finite and infinite subsets or combinations of $\aleph_0$ quantum states. So the universal wave function is inaccessible or unassailable from the $\aleph_0$ infinite-dimensional Hilbert space perspective. The case of finite-dimensional Hilbert space does not fare better and is still worse for ‘t Hooft cellular automata or finite lattice-theoretic devices, since Hilbert spaces are not homeomorphic over different dimensions $m < n$ and cannot reach a unique infinite-$\aleph_0$ dimensional Hilbert space. What this means is the mathematical fact from transfinite arithmetic that if the universal wave function ψ could be *realized*, the one universe would be in all its states at once or *in toto simul sub specie aeternitatis* in contradiction to ‘t Hooft view that there is only one state of the universal wave function at any instant. In both cases though, such a universe would be indeed immeasurable – with no experiment whatsoever to measure anything and there would be no need at all for a measurement theory, observers, no Hilbert space of observables, not a quantum bit of quantum logic and no-go theorems, as ‘t Hooft notes, and for that matter ultimately no QM and no physics at all ! But there could be a metaphysical spin-off with the Dutch philosopher Baruch Spinoza. One may repeat this little exercise in inconsistency in its Spinozistic version in Pars 1 of the *Ethica* : the infinite attributes of the infinite substance (*Deus sive Natura*), extension (*res extensa*) and thought (*res cogitans*) must be not only isomorphic, but homeomorphic according to *Propositio* 7 of the *Ethica* :

Ordo et connexio idearum est ac ordo et connexio rerum.

So, if one supposes a deterministic universe compatible with an infinite Hilbert space of quantum states, Nature as *res extensa* (*Natura*) or God as *res cogitans* (*Deus* or God’s mind) with isomorphic $\aleph_0$ cardinalities cannot comprehend the $2^{\aleph_0}$ cardinality of the wave function continuum. In a Spinozistic perspective, the holographic principle promoted by ‘t Hooft and others would be a holomorphic (continuous) *distorting mirror*, but not a homeomorphic (bicontinuous) image in the passage of a 3-dimensional universe (made of 1-dimensional strings and higher-dimensional branes ?) to a conformally mapped 2-dimensional boundary. In the end, even God’s infinite mind or other infinite minds do not have access to homeomorphic perfect knowledge or omniscience though omnipresent with respect to different finite or infinite (countable or uncountable or even indeterminate) dimensions… Still, radical simple realism could claim access to the wave function in a dimensionless universe without four-dimensional space-time and higher dimensions, but that would imply an extrascientific, poetic or mystical experience, for an other philosopher Ludwig Wittgenstein perhaps in the sense of Proposition 6.45 of his *Tractatus logico-philosophicus* « The experience (*Anschauung*) of the world *sub specie aeterni* is the experience of the world as a closed whole (*begrenztes Ganzes*). The feeling (*Gefühl*) of the world as a closed whole is the mystical feeling ». Such a closed whole however becomes a closed *n*-dimensional space in physical cosmology.

A superdeterministic universe is equally inaccessible in Everett’s and in ‘t Hooft’s versions of QM as well as in Spinoza’s metaphysics. For the philosopher-mathematician Leibniz in his *Theodicy* (par. 29), possible worlds as combinations of an « infinity of infinities » in God’s mind, as he says, could amount to $2^{\aleph_0}$ in Cantorian transfinite arithmetic, but it is only God who has the combinatory power of choosing the best possible world among all those combinations. On the side of philosophical logic, the philosophical theology of possible worlds semantics in modal logic (Lewis or Kripke) with a *designated* world – the *actual* world possibly as the *best* combination – is hardly a substitute here.

This little exercise has been performed with Cantor's diagonal argument for his power set theorem in transfinite set theory. The present author as a constructivist logician is not an endorser of the Cantorian stance ! The authors under discussion adopt the Cantorian distinction between countable and uncountable infinities. Of course, Spinoza who has inspired Cantor, cannot be counted as a protagonist here, but his idea of a homeomorphism or perfect accord between the infinities of extension and thought puts him on the $\aleph_0$ countable cardinality line. It is worth noticing that it is another Dutchman, the mathematician L. E. J. Brouwer, who has shown against Cantor that if all continua are isomorphic in any dimension, that is of the cardinality of the continuum *c*, they are not homeomorphic (in bicontinuous bijection) in different finite or infinite dimensions. Brouwer would reject also the diagonal argument and would not grant the continuum a definite cardinality since it is a process in becoming «*ein Prozess im Werden*» of an *indeterminate* mathematical substratum that could be determined only by choice sequences of a creative subject, as he conceived it. In the same line of thought, Hermann Weyl had insisted on a constructive notion of the mathematical continuum and he even introduced in the 1920's the idea of a physical continuum of infinitely novel becoming fueled by decisions «*Entscheidungen*» in a probabilistic universe. Weyl would need only the combinations allowed by the binomial distribution for the discrete probability distribution

$$p\,(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

with the expansion of the binomial coefficient

$$\sum_{h=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \mathit{for}\ \frac{n!}{k!(n-k)!} = {}_nC_k$$

for the combinations C and the power set 2^n of a set of n finite elements or experiments.

Finite experiments include actual experiments and gedankenexperiments that are free choices of the experimenters as accounted for in the recent Conway-Kochen theory (see [5]and [6]).

Bell's theorem on local hidden-variable theories and its accompanying test experiments belong to this category and their loopholes – among them the locality or communication loophole and the so-called free-choice loophole – seem to have been put to rest in recent experiments (by R. Hanson among others) to the point that A. Zeilinger has claimed the final dismissal of local realism in favor of quantum entanglement which is, in my view, a purely combinatorial particle theory. In that context, superdeterminism looks like a universal local realism where free choice is blinded by an entropic loss of information. In the Weylian worldview as in the Conway-Kochen theory, free choice in an essential ingredient of a chaotic, stochastic universe and the local observer disposes of all the necessarily finite information available. This means that the total information contained in the universal wave function ii practice forever unavailable from the experimenter's side. From the theoretician's side, we have seen that such information is beyond physics and mathematics and there is no possible trade-off with metaphysics where no physics, experimental or theoretical, is admitted, nor is there any place for constructive mathematics in that Platonic heaven. Superdeterminism has been shown here to be inconsistent on both counts, transfinite arithmetic and constructive mathematics.

2. REALISM IN MATHEMATICS

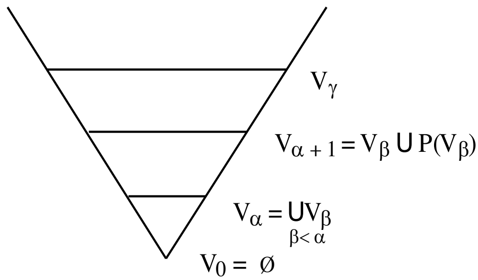
To come back now to a more mundane way of speaking in a mathematical idiom, let us see if we could use the homeomorphism idea (or ideal) to evaluate the contents of Cantor's paradise or Grothendieck's U-topia. I recall that U-topia is the grand assemblage of Grothendieck's U-topoi (with Tarski-Grothendieck universes) while Cantor's paradise is the habitat of the transfinite arithmetic of ordinals and cardinals described by the omegas ω and the alephs $\aleph$. The omegas as limit ordinals run like this :

$$\omega \text{ (or } \omega_0), \omega_1, \omega_2, \ldots$$

the alephs follow suit :

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots \aleph_\omega.$$

Higher set theory, higher category theory with infinity or ∞ – categories and higher topoi theory seem to require a (strongly) inaccessible cardinal in the cumulative ordinal hierarchy of Zermelo-Fraenkel with Choice (ZFC) set theory on level V_γ which looks like this:



where γ is the inaccessible cardinal, V_0 the null set, $\cup$ union, P stands for the power set and the α, β, γ for ordinals – here a cardinal is the least ordinal equinumerous to the well-ordered set of all smaller ordinals as defined by von Neumann. Let us consider those ordinal stages as dimensions in the set-theoretic hierarchical universe (or multiverse) based on the axiom of foundation which essentially says that there is no infinitely descending sequence of ordinals from V_γ for the membership relation $\in$ (V_γ has a transitive model). Inaccessible means not accessible from previous stages by the union and power set operations: needless to say, the existence of inaccessible cardinals and other higher (larger) cardinals is unprovable in ZFC, for example the continuum with $c = \aleph_1 = \beth_1$ has the ordinal ω_1 which clearly has inaccessible status.

Voevodsky in his univalent homotopy theory with the axiom «homotopic equivalence = identity», Mochizuki in his virtual inter-universal geometry and Martin-Löf in his transfinite constructive type theory all claim to reach for an inaccessible cardinal. The reflection principle in ZF set theory says that the properties of the universe V of all sets or the superuniverse Ω of all universes can be reflected in an inaccessible cardinal γ of the cumulative ordinal hierarchy. Since homotopy is limited to (one-way) continuous functions and homeotopy is restricted to self-homeomorphisms (in the same dimension), total reflection in homeomorphic spaces cannot amount to identity in the case Voevodsky's univalent foundations and Mochizuki's inter-universal geometry with an ordinal level γ overarching transfinite dimensions can project only blurred images without homeomorphic continuity, since transfinite neighbors and their properties are refractively obnubilated (more so at *critical points* of elementary embeddings for non-self-mapping ordinals, e.g. measurable cardinals) in the reflection of the universe as can be shown in the generic sets of forcing theory and the collapsing functions of ordinal analysis with omega and aleph *fixed points*. This situation generates impredicative phenomena that cannot be reduced safely to a predicative theory, that is a non-infinitistic theory. Notice that homeomorphic embeddings in topology and geometry are generated in spaces and subspaces of the same dimension as it is the case for isotopy and that in algebra and order theory, isomorphic embeddings preserve the same cardinality. As for constructive type theory, climbing down to finite dimensions from an inaccessible cardinal has a discontinuous impact for identification of finite types up to ω with the limit

$$\lim \omega = \varepsilon_0.$$

The epsilons themselves together with the denumerable ω's form an uncountable set ω_1 with the fixed point ε^{ω}, but this fixed point cannot be sent back or filtered continuously through finite and countable ordinals which can be regarded as dimensions in a set-theoretic universe. What all this means is that an ideal fixed point – homeomorphisms need fixed points – is beyond reach and physics and mathematics (and logic) should rest content with a constructive proximate fixed point in the finite and approximate fixed point receding *ad infinitum* in the non-finite. Of course, neither set theory in its ZF version and Peano arithmetic as infinitistic theories, nor other infinitistic theories like higher category theory or topoi theory can be shown consistent or inconsistent by the finite external means of a formal system as Hilbert had hoped, but infinitistic theories do not have the means either to prove their own consistency by Gödel's second incompleteness result on consistency. Therefore, only finitistic constructive theories (like Fermat-Kronecker arithmetic as I have called it) can afford their own internal consistency and point from without to the internal inconsistency that infinitistic theories are unable to detect from within (see [6] for more critical details).

3. A CASE STUDY

A nice case study for a constructive version of the homeomorphism result of our general no-cloning theorem would be to explore the cosmological implications of the recent LIGO experiment for the detection of gravitational waves published in *Physical Review Letters* last February [1].

LIGO's result obtained already in September 2015 will hopefully stand after the failure of the 2014 BICEP2 result *dusted* by a Planck experiment. Although the reality of gravitational waves pertains to General Relativity, it does not privilege a cosmological model within GR. The fact that gravitational waves cannot travel faster than the speed of light rather than the instantaneous infinite speed of Newtonian gravity relies on SR and Einstein was not so sure of their existence.

The most likely candidate to account for cosmic gravitational waves seems to be the inflation theory of Alan Guth and Andrei Linde (for eternal inflation). If inflation comes before the Big Bang (maybe after a deflation), energy is insufflated through the finite-volume singularity, let us call it the *mouth*, the burning mouth of the hot, dense nascent universe. The quantum vacuum or a cosmic electromagnetic plasma ground state (after H. Alfvén) fluctuates and breathes without end nor beginning in a continuous flow for Linde's cosmology of baby-universes, in which the mouth could be replaced by an umbilical cord attached to a mother-universe. In that scenario, the cosmic background radiation is only the *sibilance* of the vacuum. Such a scenario could be repeated indefinitely or infinitely (countably or in $\aleph_0$ universes) in the chaotic cosmic landscape imagined by Leonard Susskind. String theorists are more restrictive, they are content with 2^{500} worlds. Here string theory or M-brane theory enters the picture awaiting for supersymmetry (supergravity and superpartners) in the bubbling multiverse beyond or rather below the Higgs field where different species of stringy creatures or alien branes are encountered. Only the indiscernible particles survive in the same dimension. The chaotic generation of universes does not garantee that self-similarity is not allowed, but the transgression over different dimensions induces the evaporation of homeomorphic copies (cosmic selfies!). While many fixed points can be constructed as arbitrary sequences in a Banach space, the Lefschetz fixed-point theorem, a generalization of the Brouwer fixed-point theorem, provides some of them with homotopic properties in the *same* dimension. But if you cross over dimensions, Brouwer fixed-point theorem applies along with the no-cloning theorem in a constructive way.

At any rate, can the 5 sigma rule as a measure of confidence, that is 99. 9994% probability (LIGO had 5.1), be applied anywhere in such a scenario? It could at one point at least, some 13 billions years ago at the infinite density of the instant zero of the Big Bang, a highly unphysical state of the observable universe. The mathematical fact that a Euclidean space of any dimension is contractible to a point may account for the hypothetical infinitely dense point of the Big Bang, but such a geometrical punctiform entity can hardly give birth to a physical universe. Otherwise, an inflated sphere or closed ball (hypersphere or hyperball) of any finite dimension in a Euclidean space is not contractible and is not homeomorphic to that space, while the unit sphere (all points at distance 1 from a fixed center point) in an infinite-dimensional Hilbert space is contractible and is not homeomorphic up to $\aleph_0$ spaces – an n-sphere (an n – dimensional manifold) has a boundary in an n+1 ball whose two cobordant manifolds M and N must have the same dimension. A gravitational wave probe could then remove the initial *too thin* singularity and replace it with the finite volume mouth of an inflated bubble or the bouncing loop of discrete spacetime chunks in quantum cosmology. The detection of gravitational waves would then have the effect of discarding two infinities from the physical world, the instantaneous infinite speed of Newtonian gravity and the Big Bang singularity. Other scenarios for peering further into the multiverse, for example into parallel universes through wormholes, black holes and invisible tunnels through spacetime are hypothetical constructs, but deleting the pointlike singularity of the Big Bang – and dressing up black-hole «naked» singularities while lighting up dark energy (or quintessence as a scalar field) – would be enough to open up the astrophysical world vista in the same manner that Tycho Brahe helped Kepler in his astronomical research. The LIGO team of experimenters (almost a thousand people) would have played the role of Tycho for Einstein since his idea that the distribution of matter determines the metric or the geometry of space is a distant echo of Kepler's leitmotiv relayed by Riemann, Mach and Clifford: «*Ubi materia, ibi geometria*».

From a purely mathematical point of view, Riemann was right when he imagined discontinuous multivalued functions for his theory of surfaces or n-dimensional varieties (*Mannigfaltigkeitslehre*) and Feynman could not but invoke infinite paths in the same infinite dimension for his functional integral picture of the quantum world. But cosmic intercourse like inter-universal geometry (*à la* Mochizuki) requires multiple universes that cannot be crossed over without a loss of identity: there is no unique homeomorphic filiation or causal principle in the multiplicity of worlds where there is no dialectics of the One and the Many as in Plato's dialogue *The Parmenides.*

It is only in number theory below the $\aleph_0$ limit that one can preserve the identification of algebraic structures by Fermatian descent in finite number fields; descent or hyperdescent in the category-theoretical language of algebraic geometry needs forgetful functors to transmit abstract algebraic structures to the concrete *glue* of objects and sets in a topological or *toposical* space. Such a situation is pictured in the following commutative diagram for a pullback or fiber product:

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ \mathbf{A} & \rightarrow & \mathbf{B} \\ g\downarrow & & \downarrow h \\ \mathbf{C} & \rightarrow & \mathbf{D} \\ & k & \end{array}$$

where $h \times f = f \times g$ for arrows (morphisms) h, f, g and k; vertical arrows are forgetful functors, they forget all or part of the upper structures. For that kind of extended descent, one has to ascend beyond n and beyond ω to an inaccessible γ as noted above. The lesson here is that one must remain in the same n-dimensional universe if one wants to be faithful to its self-image; multiversal self-replication being necessarily fractional or fractal, reflection beyond any given $n+1$ cosmic (observable) horizon cannot be integral.

4. CONCLUSION ON FOUNDATIONS

To conclude, I want to insist on the constructivist standpoint challenging the realist perspective. Take for example Einstein's equations for GR:

$$R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\, g_{\mu\nu} R - \lambda g_{\mu\nu} = -\, 8\pi G/c^4 T_{\mu\nu}$$

where R stands for the curvature tensor, $g_{\mu\nu}$ for the metric tensor, λ for the cosmological constant, G for the Newtonian gravitational constant and $T_{\mu\nu}$ the stress (matter) – energy tensor. The lambda constant was introduced by Einstein for a static universe and afterwards deleted – the lambda constant survives today in the form Ω_λ of the critical density of matter in the universe and the curvature of space in the presence of matter was predicted by Clifford.

Those equations are not canonical, they have many solutions or models, from de Sitter's empty universe or anti-de Sitter universe with negative curvature to Gödel's rotating universe, and they overdetermine the empirical content of the theory. Hilbert had defined this situation in terms of the analytical apparatus and its conditions of reality «*Realitätsbedingungen*» (see [7]). John von Neumann has used these notions extensively in his 1932 classic *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* and conditions of reality or realizations in the Hilbert space formalism were, for example, orthogonality for vectors, linearity and hermiticity for functional operators and the finiteness of the eigenvalue problem are constraints on the realizability of the analytical apparatus of a physical theory like Quantum Mechanics. Admittedly, those are formal constraints like the constraints imposed on solutions of Einstein's field equations – constraints on Gödel's rotating universe for instance are judged excessive –, but they can be generalised as models of a physical theory to the extent that they are variable features of a canonical analytical apparatus, as Hilbert maintained. I draw the following sketch as an illustration:

	PHYSICAL THEORY	
AA	ANALYTICAL APPARATUS (FORMALISM, LOGICAL AND MATHEMATICAL STRUCTURES)	**AA**
↓	MODELS	↑
EA	EXPERIMENTAL APPARATUS (EMPIRICAL DATA, MEASUREMENT INSTRUMENTS, SET-UPS AND PREPARATION PROCEDURES).	**EA**

What this scheme suggests is that interpretations are indeed necessary in physics and that they should be evaluated according to the consistency of the analytical apparatus and the coherence of the relations between the analytical apparatus and the experimental apparatus via the models generated by the physical theory. Consistency is a logical, syntactical property while coherence is a semantical attribute of the scientific representation of an integral theoretical construction of the world, as Hermann Weyl used to put it [10].

The constructivist interpretation defended here is in agreement with the Weylian standpoint and can be viewed in the case of Quantum Mechanics as a variant of the Copenhagen Interpretation with explicit constructivist logical and mathematical motives in the scope of the local observer at micro- and macroscopic scales, but in the same 2. or 3. or n-dimensional space. There the local observer appears as the open relative (local) complement of a topological space or an n-dimensional manifold homeomorphic to an n-dimensional Euclidean space. As for logic, the negation involved in the local complement corresponds to a non-Boolean or constructive notion for which we have $\neg\neg a \neq a$ and this leads naturallyto a non-classical logic internal to a non-classical logic internal to the given physical theory. In QM and in Relativity Theory, the local observer is the *coupling constant* of the relational system observed-observer; Those ideas have been introduced early in my critical work on the foundations of physics from a logico-mathematical point of view (see [2], [3] and [4]). The physicist C. Rovelli has recently developed somewhat related ideas in his conception of a relational QM (see [8]), albeit from an oecumenical and rather uncritical realist perspective. In cosmology the local observer located anywhere is a fixed point as the central observation post of the cosmic panorama at equal distance from any point on the cosmic (hemispherical) horizon of the celestial sphere which is itself bounded by homeomorphic reflections of the local isotropic universe, as required by the cosmological principle. For the local observer, everywhere is *localized*. As explained above, what is beyond the horizon boundary lives in the same dimension since the visible is cobordant with the invisible much alike the two sides of a visible full Moon hiding its other face.

REFERENCES

[1] B. P. Abbott *et al.*, Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger, *PRL.* **116**, 061102 (2016).

[2] Y. Gauthier, The Use of the Axiomatic Method in Quantum Physics, *Philosophy of Science*. **38** (1971): 429-437.

[3] Y. Gauthier, Quantum Mechanics and the Local Observer, *International Journal of Theoretical Physics*. **22** (1983): 1141-1152.

[4] Y. Gauthier, *La logique interne des théories physiques*, Bellarmin/Vrin, Montréal-Paris, 1992.

[5] Y. Gauthier, A General No-Cloning Theorem for an Infinite Multiverse, in *Reports in Mathematical Physics*, **72** (2013): 191-199.

[6] Y. Gauthier, *Towards an Arithmetical Logic. Arithmetical Foundations of Logic*, Birkhäuser/Springer, 2015.

[7] D. Hilbert, J. von Neumann, L. Nordheim, Über die Grundlagen der Quantenmechanik, *Math. Ann*. **98** (1928) : 1-30.

[8] C. Rovelli, « Relational Quantum Mechanics », *International Journal of Theoretical Physics*. **35** (1996) : 1637-1678.

[9] G. ‘t Hooft, *The Cellular Automaton Interpretation of Quantum Mechanics*, arKiv.org. <quant.ph> arKiv 1405.1548.

[10] H. Weyl, *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, Atheneum, New York, 1960.

CHAPITRE 16

Commentaire de « Hermann Weyl on Minkowskian Space-Time and Riemannian Geometry »

Cet article est paru dans *International Studies in the Philosophy of Science*, vol. 19 (2009), p. 153-165. Hermann Weyl (1885-1955), un des grands mathématiciens du XXe siècle, était aussi physicien et philosophe. Comme philosophe, il a épousé tôt la théorie phénoménologique de Husserl, mais il a aussi été fortement influencé par l'idéalisme allemand, surtout Kant et Fichte ; comme mathématicien, il a été pour un temps marqué par l'intuitionnisme de Brouwer et il adopté le point de vie algorithmique de Kronecker en théorie algébrique des nombres tout en ne négligeant pas les méthodes analytiques qui étaient selon lui plus élégantes ou plus simples. En fondements des mathématiques, il a défendu une théorie constructive prédicativiste qui interdit les constructions imprédicatives, c'est-à-dire celles qui débordent la genèse graduelle des concepts mathématiques. En physique, il s'est inspiré des travaux de Riemann pour la géométrie différentielle et de Minkowski pour la géométrie physique de la théorie de relativité restreinte ; pour la relativité générale, il est le premier a formuler une théorie unifiée des champs gravitationnel et électromagnétique en employant une notion d'invariance de jauge ou groupe de symétrie locale – c'est aussi Weyl qui a inauguré l'étude systématique des groupes en mécanique quantique.

On trouvera d'autres détails sur l'œuvre de Weyl dans mon ouvrage *Théorétiques. Pour une philosophie constructiviste des sciences*, Le Préambule, Longueuil, 1982.

Hermann Weyl on Minkowskian Space-Time and Riemannian Geometry

SUMMARY

Hermann Weyl as a founding father of field theory in relativistic physics and quantum theory has always stressed the internal logic of mathematical and physical theories. In line with his stance in the foundations of mathematics, Weyl has advocated a constructivist approach in physics and geometry. An attempt is made here to present a unified picture of Weyl's conception of space-time theories from Riemann to Minkowski.

The emphasis is on the mathematical foundations of physics and the foundational significance of a constructivist philosophical point of view. I conclude with some remarks on Weyl's broader philosophical views.

1. INTRODUCTION

For Hermann Weyl, mathematics, physics and philosophy stand in close proximity, as he declares in the Preface of the first edition (1918) of his book *Raum, Zeit, Materie* (see Weyl 1950, p. ix). His philosophy of physics is congruent with his philosophy of mathematics (modulo his own philosophical ideas) and it is no wonder if his constructivist stance is imprinted in his work on the foundations of physics. The unified field theory he describes in his *Space, Time, Matter* is motivated by the (theoretical) mathematical construction of the one real world, as he mentions at the end of *Philosophy of Mathematics and Natural Science* (Weyl 1960).

Hermann Weyl has grounded much of his work in geometry and physics on Riemann and Minkowski (and on Einstein, of course). He has trodden on the mathematical footsteps of Riemann and Minkowski, but he has put forward a philosophical attitude that is not shared apparently by his predecessors. One must remember though that Einstein had at times defined his work as that of the epistomologist (*Erkenntnistheoretiker*) and Weyl has been for some time a fervent Husserlian. But his deeper inspiration lies with the mathematical heritage of Riemann and Minkowski.

2. MINKOWSKI'S SPACE-TIME

I want to emphasize in the following that Weyl has taken for granted the Minkowskian world picture as far as Special Relativity is concerned, that is the four-dimensional representation of the space-time continuum. Weyl has used freely the Minkowskian vocabulary of world, world-lines and world-points – or even the Minkowskian "*Substanz*" to designate matter in his philosophical works, for example, *Philosophy of Mathematics and Natural Science* (Weyl 1960). But, of course, he had resorted to Riemannian geometry when it came to the geometrical structure of the universe as a whole in his unified field theory.

Weyl has credited Minkowski for having recognized that :

> The fundamental equations for moving bodies are determined by the principle of relativity if Maxwell's theory for matter at rest is taken for granted (Weyl 1960, p. 96).

He also said referring to Minkowski's 1907 paper "Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körper" (Minkowski 1967) or "The fundamental equations for electromagnetic processes in moving bodies", that :

> The adequate mathematical formulation of Einstein's discovery was first given by Minkowski : to him we are indebted for the idea of four-dimensional world-geometry… (Weyl 1960, p. 173).

Minkowski had distinguishesd in the aforementioned paper the theorem of relativity from the principle of relativity ; the first is purely mathematical in terms of the covariance of Lorentz transformations and the second, the principle of relativity allows, in Minkowski's words, for the derivation of the laws of mechanics solely from the principle of the conservation of energy. The language here is still of space-time vectors and does not anticipate on the 1908 paper on "*Raum und Zeit*" (Minkowski 1967) where the vocabulary of world-points and world-lines is canonized and serves as the basic ingredient for a graphic representation, as Minkowski says, of the group of spatio-temporal transformations. Minkowski then suggests that the terminology for the postulate of relativity is rather dull – "*matt*" in German – when one wants to stress the invariance properties of the group of the transformations and he comes up with his "postulate of the absolute world" [*Postulat der absoluten Welt*]. Let me point out that at one time Einstein himself had wanted to rename relativity theory as invariance theory.

My contention is that Minkowski's idiom has essentially a mathematical meaning as a representational means for the spatio-temporal structure of the physical world. And I assume that Weyl has not interpreted the Minkowskian mathematical picture otherwise. I shall give some reasons to substantiate that claim in the following.

Minkowski's work on physical problems (hydrodynamics, capillarity, etc. and on Relativity Theory) is marginal compared to his endeavour in number theory, geometry and especially what Minkowski has called the geometry of numbers. It is in the geometrical representation of number-theoretic relations that Minkowski introduces the notion of "*Zahlengitter*" or number grids. Minkowski defines there a three-dimensional number grid as a geometrical representation of three integers in rectangular coordinates – cf. "Über Geometrie der Zahlen" in *Gesammelte Abhandlungen* (Minkowski 1967, pp. 264-265).

This geometry of numbers has an arithmetical core, while geometry has an intuitive appeal. The main idea is to inscribe triangles or parallelograms in rectangular Cartesian coordinates in order to represent geometrically the reticular system or grid (*Gitter*) of all grid points (*Gitterpunkte*) of positive quadratic forms with integer coefficients. A number grid is most important for the representation of the volume of a body and its fundamental arithmetical property is the generalization of the length of a straight line into the principle that in a triangle the sum of the lengths of two sides is never smaller than the length of the third side. As a special case, one easily points to the Pythagorean theorem for right triangles:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

which is at the foundation of the differential form

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2$$

in Euclidean coordinates. Weyl has pointed out that the differential form ds^2 is not only the simplest, but also the canon for the classification of possible geometries since the positive quadratic form generates all linear transformations of the variables involved as a unique mathematical structure. Of course, the ds^2 is the fundamental (quadratic) form

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

for the invariant metric element in special Relativity. Let me remark that if one lifts the quadratic restriction, one gets Finsler spaces which are akin to Riemannian spaces. I do not need to mention that Minkowski has devoted much of his work to the theory of quadratic forms, *i.e.* homogeneous polynomials of the second degree which were the main object of study in number theory from Gauss to Kronecker. Rather than elaborate on this, I can only mention that number grids are clearly connected to what we now call Minkowski diagrams.

In his mathematical diagrams, Minkowski depicts grid points and intersection points for the approximation of a real number (or quantity) by rational numbers or diagonal chains that illustrate the fact that in a triangle the sum of the lengths of two sides cannot be smaller than the length of the third one. Here entire rational functions are used as denominators of continued fractions. What we have is an intuitive representation of solutions of a real inequality in terms of integers without common divisors.

Those diagrams do not differ essentially from the ones which are to be found in the paper "*Raum und Zeit*". What is represented here as a grid point is the notion of an arbitrary point like charge or electron or scalar potential in a light cone. The world postulate or the postulate of the absolute world is nothing more than the totality of those grid points along grid lines in a gridded universe without any ontological import.

To obtain a physical picture for Minkowski's diagrams, one has to make the assumption of a correspondence between the energy vector *of motion* and the energy vector *in motion,* as Minkowski has clearly said:

> Der Kraftvektor der Bewegung ist gleich dem bewegenden *Kraftvektor* (Minkowski 1967, p. 441).

What this means is that motion can be only be represented by the picture of a moving vector on a continuous line, a world line as a moving world point; diagrams can then be drawn to picture motion in a physical geometry as grids were used to cover the content of a surface (*Flächeninhalt*) in a geometry of numbers (arithmetical geometry). The parallel between the two tasks, to cover a surface with numerical grids and to fill up a two-dimensional space with diagrams, strongly suggests that there a continuous path in Minkowski's mathematical *Weltanschauung* or theoretical construction of the world, to use Weyl's terminology.

What philosophical conclusions can be drawn from my analysis? For the ontology of space-time, a gridded universe could be empty or devoid of any substance or *Substanz* if we want to use Minkowski's word for matter, Substantial points or world points constitute world lines which embrace the whole world, Minkowski has insisted (Minkowski 1967, p. 434) and the universal validity of the world postulate points to the pre-established harmony of pure mathematics and physics (Minkowski 1967, p. 444). Since the postulate of the absolute world can be given a purely mathematical signification in virtue of its arithmetico-geometrical foundations, I would grant it, following Weyl, only a transcendental status, that is the status of an a priori structure in the theoretical construction of the world, as Weyl has put it in his *Philosophy of Mathematics and Natural Science* (Weyl 1960, p. 235). Minkowski diagrams belong to the analytical apparatus, "*der analytische Apparat*" as Hilbert had termed it in his work on the foundations of Quantum Mechanics (Gauthier 2002); the diagrams do not belong to a model of the physical world. From that standpoint, a realist interpretation of the Minkowskian world view is thereby excluded on Minkowski's own terms. Although Minkowski states that his intuitions of space and time rest on the solid ground of experimental physics, their validity must be sought in the mathematical justification of the intuitive content. Behind or below the physical geometry, "*physikalische Geometrie*" as Helmholtz has called it, lies a geometry of numbers, the heart of which is arithmetic or number theory or simply number, thus coming back to Pythagoras who is the originator of the whole story and his (or their) theorem the cornerstone of the entire edifice.

3. RIEMANNIAN GEOMETRY

Hermann Weyl's foundational stance in mathematics is many-faceted. From the predicative mathematics of *Das Kontinuum* (1917) to the constructivist Kroneckerian point of view of *Algebraic theory of numbers* (1939), Weyl has sustained a continuous effort to defend a constructivist philosophy in mathematics, physics and science in general. I do not want to put any emphasis on his philosophical inspirations from Kant and Fichte to Husserl and Brouwer. I shall rather insist on the motivations internal to his mathematical work and particularly on his appraisal of Riemannian geometry, which has played a major role in Weyl's theoretical endeavours.

I recall the main ideas of Riemann's 1867 paper "*Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu grunde liegen*", "On the hypotheses of the foundations of geometry" (Riemann 1990). The concept of an n-dimensional manifold or space (*Mannigfaltigkeit*) is a topological one, that is, it is to be treated with continuous (real and complex) functions. As a metric space, it is endowed with the metric invariant ds^2 and here Riemann refers to Gauss' theory of curved surfaces.

The fundamental quantity for any surface is the element of arc length

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Gauss had given a general form to this notion of distance by introducing parameters u and v to represent the coordinates (x, y, z) of any point on the surface and had obtained

$$ds^2 = e(u,v)\, dv^2 + 2f(u,v)\, du\, dv + g(u,v)\, dv^2$$

(where e, f, g are functions of the parameters u and v). The general formula for the ds^2 is

$$ds^2 = g_{mn}\, dx_m\, dx_n$$

where dx_m and dx_n are the infinitesimal transformations of the parameterized curves on the surface; and the g_{mn} are the quantities that depend on those curves. The curvature of a surface is then determined from this fundamental quadratic form; this is the point of departure of Riemann's work. The local or infinitesimal approach favoured by

Riemann allows for a generalization of Gauss' surfaces into the n-dimensional manifold with the metrical groundform or fundamental metrical tensor (Weyl 1950, p. 39)

$$ds^2 = g_{uv}\, dx^u\, dx^v \text{ (for u, v} = 1,\ldots, n)$$

which controls the behaviour of the geodesics for a point and a direction in an n-dimensional manifold.

The local infinitesimal point of view insures that the Pythagorean theorem is valid in the infinitely small and in his remarks on Riemann's lecture, Weyl insists again on the fact that the differential form ds^2 is not only the simplest, but also the most appropriate one for the classification of all possible geometries, as I have said above. Group theory enters the picture as, for example, in the case of the alternate subgroup of even permutations of a given group for the distinction between geometries of various dimensions. But Pythagorean-Riemannian geometry is a special case and Weyl adds that one has to supplement the names of Lie and Helmholtz in order to have infinitesimal mobility (*Beweglichkeit*) in an n-dimensional manifold.

The infinitesimal Lie group of rotations obeys the same positive definite quadratic form and also validates the Pythagorean theorem in the infinitely small. Weyl points out that his solution to the new problem of space implied in Relativity Theory, as he says, had urged him to construct a different solution, that is the affine geometry of parallel displacement which Weyl will put to use in his *Raum, Zeit, Materie*, "Space, Time, Matter" of 1918 (Weyl 1950).

4. RIEMANN'S "HYPOTHESES"

Weyl has put the emphasis on Riemann's achievement for being the first to define the idea of a physical geometry. Against all former mathematicians and philosophers, Weyl says it is Riemann who maintains that the metric field is determined by the material content of the world and has the same status as the electromagnetic field. In a Riemannian manifold of constant curvature, free mobility is guaranteed by the Lie group of rotations. But this again implies that the physical content of the space participates in the metric in such a way that it is the distribution of matter which defines ultimately the metric field, an idea rediscovered by Einstein, Weyl tells us. It is not doubtful that Riemann did have such a scientific objective. In his *Pariser Arbeit*, for example, he deals with the linear transformations involved in second-order differential equations to tackle the problem of an isothermic system again in terms of a fundamental quadratic form. In many of his works, Riemann could be considered as a mathematical physicist, as Weyl suggests, and I would suggest that he could be considered also as a philosopher of science, at least to the extent that he has expressed himself even so briefly on matters philosophical. Take, for instance, Riemann's notion of hypothesis.

As a student of the Kantian Herbart, who had defended a kind of physical *a priori*, Riemann distinguishes his sense of hypothesis from the Newtonian notion found in *Philosophiae naturalis principia mathematica* :

> "Quidquid enim ex Phaenomenis non deducitur, Hypothesis vocanda est".

Riemann prefers to define hypothesis as anything (concepts and principles) that goes beyond phenomena, and not as figments of one's imagination :

> "Man pflegt jetzt unter Hypothese Alles zu der Erscheinungen Hinzugedachte zu verstehen" (Riemann 1990, p. 525).

For Riemann, hypotheses and facts <*Thatsachen*> share a common status as conceptual structures that supervene on phenomena ; the law of inertia, for example, as a law of motion is a hypothesis, not different from an axiom, since it belongs to the transempirical or empirical *a priori* realm, while an axiom in the traditional sense should be analytical. By the same token, one could say that facts are the same as hypotheses and Helmholtz' 1868 work « *Ueber die Thatsachen die der Geometrie zugrunde liegen* » stands in perfect continuity with Riemann's notion of hypothesis. As a matter of fact, Riemann states the law of inertia as a counterfactual conditional, much in the manner of later logical positivism :

> "If there were only a single material point in the world moving in space at a definite velocity, it would always move with the same velocity" (Riemann 1990, p. 525).

Riemann's notion of hypothesis reaches beyond Kant to Descartes and Aristotle. One could justify the hypothetico-deductive method by quoting Descartes who says in his *Principles of Philosophy* (IV, 204) :

> "For the things that our senses cannot reach, it suffices to explain how they could be".

Descartes adds : it is exactly what Aristotle has done and he refers here to Aristotle's *Meteors* (I,7) :

> "If it is true that for phenomena which escape our senses we deem to have given a rational explanation by ascending to their possible causes (το δυνατον αυαγαγωμεν), it is certainly true for those phenomena which we now study (the meteors)".

This anagogical way has been called abduction by Peirce and it is certainly part of what has been termed « inference to the best explanation ». In any case and without pouring too much philosophy into Riemann's sparse remarks, one should not neglect the foundational motivations in Riemann's mathematical work.

5. PHYSICAL GEOMETRY

In the Special Theory of Relativity, the Mindowskian four-dimensional manifold is Euclidean, but the quadratic form here is not positive definite, it has an index of inertia of 1 ; it is then called semi-Riemannian as in the case of Special Relativity

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2\, dt^2$$

while in the General Theory, the manifold is Riemannian, since the gravitational material content of the world forces a curvature onto the structure of the metric field.

Incidentally, Riemann points out in his lecture that such a curved space or spherical universe could be unlimited in extension without being infinite from the point of view of measurement. In the case of a space with positive curvature, however small it is, an unlimited spherical surface is necessarily finite (Riemann 1990, p. 284).

In his paper "*Reine Infinitesimalgeometrie*", Pure Infinitesimal Geometry (1918), Weyl declares that Riemann is not always consequent, for infinitesimal geometry forbids to relate two finite elements when they are at an arbitrary finite distance from each other, as Riemann supposes. The relation is possible only in infinitesimal affine geometry for infinitely near points. As Weyl puts it in *Space, Time, Matter*, it is :

> "The principle of gaining knowledge of the external world from the behaviour of its infinitesimal parts. In a Riemannian geometry, geodesics have a stationary length, which is not the case in affine geometry" (Weyl 1950, p. 193)

I want to comment briefly on the fate of Weyl's own geometrical idea of affine geometry, an idea which has been instrumental in his unified field theory of electromagnetism and gravitation in *Raum, Zeit, Materie*.

Weyl indicates that an affine relationship or transfer of direction and not only of length in infinitesimal parallel displacements is inherent in metric space. The metric field is still dominated by the quadratic form ds^2 while the electromagnetic field is endowed with a linear fundamental form $\varphi_i \, dx_i$ which has its origin in the metric field. Weyl will admit later that the gauge invariance between the electromagnetic and the gravitational fields was to be grounded on a more fundamental quantum theory. He had also introduced a cosmological constant as Einstein did, but Weyl thought that Einstein's lambda (λ) was arbitrary, as Einstein later admitted, for it was meant only to insure spatial closure of a stationary universe, while Weyl claims an inner necessity for his own λ, because his affine geometry accounts for the electromagnetic potentials and fully obey Maxwell's equations which demand the equilibrium state of the total mass of a closed universe. An inner necessity however which finally vanished like Einstein's blunder. The fact that it is revived today in supersymmetry theories is evidence that blunders have their own constancy if not their own cosmology. There remains though Weyl's fundamental idea of a unified theory based on gauge invariance which is still a major building block in contemporary physics. But Weyl has also emphasized the Minskowskian world picture in Relativity Theory.

6. CONCLUSION

I want to finish with some remarks on Weyl's foundational stance. From his early mathematical work *Das Kontinuum* and *Raum, Zeit, Materie*, up to his last works including his philosophical papers, Weyl has constantly held a philosophical viewpoint that one can certainly term as constructivist. Although, he has at times admitted that he has used freely transcendantal methods in his representation theory of continuous semi-simple groups of linear transformations (cf. *Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen*) and although he has also said that he has rejected all Puritan doctrines – understanding here constructive or elementary methods – to the profit of the analytic method (cf. *The Classical Groups. Their Invariants and their Representations*, 1939), he has constantly put the emphasis on the algebraic constructions, which are direct methods, as he says. If the analytical means are more elegant, they must give rise to results that can be algebraically reconstructed. In the same way, the use of analogies between the finite case and the infinite one is only of limited interest (for the sake of harmony) in algebraic number theory – the same is true in p-adic analysis where one will want to reduce the infinite prime spots as one does for the points at infinity in projective geometry. And of course, in pure number theory, elementary or constructive methods must be privileged simply because arithmetic is discrete in its essence. Decision procedures must terminate in dealing with finite sets of integers, that is finite fields. In the end, we have the idea of an internal logic in Weyl's life-long endeavour in mathematics, physics and philosophy when he says :

> Each field of knowledge, when it crystallizes into a formal theory, seems to carry with it its intrinsic logic which is part of the formalized symbolic system and this logic will, generally speaking, differ in different fields (Weyl 1968, vol. III, p. 705).

The context is here quantum logic, that is the internal logic of quantum mechanics, but it is, I think, relevant for Weyl's thought *in toto*, for he has always stressed that science and philosophy are guided by the theoretical construction of the world (cf. *Philosophy of Mathematics and Natural Science*).

The unified world picture is but the end result of a diversified approach. The various avenues that lead to the ultimate goal of theoretical construction may take different forms with their own internal logic. Such a logic is not a universal grammar, that is, a central facility serving all comers, as Quine's saying goes. The internal logic of theoretical construction requires a selection of goods according to the specific needs of particular consumers.

It cannot be denied that Weyl has stressed the symbolic construction of the world, as for example in his *Philosophy of Mathematics and Natural Science*. In such a task, mathematics and physics are intimately related :

> A truly realistic mathematics should be conceived in line with physics, as a branch of the theoretical construction of the one real world, and should adopt the same sober and cautioned attitude toward hypothetic extensions of its foundations as is exhibited by physics (Weyl 1960, p. 235).

One also recalls the <*gegenseitige Durchdringung*> or "multiple connectedness" of his philosophical, mathematical and physical interests, as he puts it in the preface of the first edition of *Raum, Zeit, Materie*. But beyond the general philosophical attitude which one could readily characterize as Kantian (or neo-Kantian or Husserlian), there remains the constant concern for the constructivist foundations of science.

As a final remark, I would like to point out that most philosophers and historians of science are not sufficiently aware of the constructive dimension in the theoretical work of the mathematician or the physicist. Take Riemannian geometry as an example. I have insisted on the centrality of quadratic forms in the construction of the concept of space, starting from the Pythagorean theorem to Gauss's curved surfaces, Riemann's n-dimensional manifolds and Minkowski's number grids and diagrams. Following Weyl, we view infinitesimal differential geometry as applying the Pythagorean theorem in an infinitesimal setting where the arithmetic of quadratic forms or homogeneous polynomials of the second degree still hold. The invariant quadratic form ds^2 is central, simply because it is the fundamental measure of the lengths of curves (distances) as in the Pythagorean theorem. Compare this to the central role played by Pythagorean triplets (again from the Pythagorean theorem) in number theory from Fermat to contemporary arithmetic-algebraic geometry – for this, see (Gauthier 2002).

The geometrical model of the arithmetic form is the metric invariant ds^2 of Special Relativity which finds its way as the metric tensor in General Relativity. But differential forms (linear, quadratic and of higher degree) as homogeneous polynomials pervade also Quantum Mechanics from Schrödinger's equation to Quantum Field Theories. Those constructions emanate from what Kronecker has called "general arithmetic" <*allgemeine Arithmetik*> (covering most of algebra) together with the corresponding topological invariants. Those forms are the true a priori constituents or conditions of reality – "*Realitätsbedingungen*" as Hilbert has called them – of a physical theory. John von Neumann has made good use of those conditions of reality in his axiomatic foundations of quantum mechanics *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* (1932) and it would not be too far-fetched to enrol Hilbert and Poincaré, von Neumann and Weyl in the same enterprise of the theoretical construction of the world on Weyl's terms.

REFERENCES

1. Gauthier, Y. (2002) *Internal Logic. Foundations of Mathematics from Kronecker to Hilbert* (Kluwer, “Synthese Library”, Dordrecht/Boston/ London).
2. Minkowski, H. (1967) *Gesammelte Abhandlungen*, hrsg. v. D. Hilbert (Chelsea, New York).
3. Riemann, B. (1990) *Gesammelte mathematische Werke, wissenschaftlicher Nachlass und Nachtrage. Collected Papers* neu hrsg. v. R. Naramsihan, (B.G Teubner, Springer-Verlag, Berlin, New York, Leipzig).
4. Weyl, H, (1968) *Gesammelte Abhandlungen*, hrsg. v. K. Chandrasekharan (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York).
5. Weyl, H. (1950) *Space, Time, Matter*, trans. By H. L. Brose (Dover Publications, New York).
6. Weyl, H. (1960) *Philosophy of Mathematics and Natural Science* (Atheneum, New York).

CHAPITRE 17

Commentaire de « The construction of chaos theory »

Ce texte est paru dans la revue *Foundations of Science*, vol.14 (2009) : 153-165. J'ai voulu retracer l'Histoire de la notion de chaos en partant de la thermodynamique classique et en passant par la mécanique statistique pour arriver à la théorie des systèmes dynamiques contemporaine. J'ai laissé deux questions en suspens dans mon texte : la notion de chaos quantique et la théorie algorithmique de l'information, questions sur lesquelles je veux revenir dans ce commentaire. Disons en premier lieu que la théorie du chaos se décline de nos jours en trois régimes, chaos classique, chaos semi-classique et chaos quantique. La théorie du chaos quantique n'existe pas encore comme je le déclarais il y dix ans et seuls le chaos classique et le chaos semi-classique ont des formulations suffisamment précises pour être intégrées à la théorie contemporaine des systèmes dynamiques : le chaos classique est le chaos déterministe en régime classique avec sensibilité aux conditions initiales et attracteurs étranges, le chaos semi-classique a un régime entre déterminisme et indéterminisme, irréversibilité et fluctuations quantiques où la notion de trajectoire a disparu malgré les vœux de Prigogine dans sa théorie du non-équilibre et des systèmes dissipatifs.

J'ai mis l'accent sur la notion d'entropie et je voudrais préciser l'idée de l'entropie comme contenu informationnel en théorie de la complexité algorithmique avec la notion de comportement ou processus aléatoire. À l'origine il s'agit de la complexité de Kolmogorov pour la théorie classique qui suggère que l'entropie est la mesure du contenu aléatoire d'un système dynamique. La complexité algorithmique au sens de Kolmogorov a la formule :

$$\mathrm{K}(s) \leq |\underline{s}| + c$$

pour K la complexité de la suite *s* de bits et *c* une constante. Cette formule suggère que qu'une suite est aléatoire si l'algorithme de sa définition est irréductible ou incompressible, c'est à dire qu'elle ne peut être comprimée dans une suite plus courte, comme la chaine ou suite binaire (infinie) de 0 et de 1 (*bits*) de sa description informatique. La complexité de Kolmogorov n'est pas computable. La généralisation de cette notion aux *qubits* mène à l'idée d'un ordinateur quantique, idée en vogue aujourd'hui, mais dont la gestation est difficile.

Dans le cas de la complexité algorithmique, la longueur de la suite de bits est la mesure de son contenu aléatoire. C'est ici que Chaitin intervient et soutient que l'aléatoire envahit même l'univers des nombres naturels en vertu de l'incompressible probabilité de la longueur de la suite avec sa constante Ω non calculable qui désigne la probabilité qu'un programme aléatoire s'arrête : c'est l'équivalent du problème de l'arrêt pour une machine de Turing, lui-même équivalent au théorème d'incomplétude de Gödel. Chaitin prétend qu'il s'agit là d'une généralisation optimale de l'incomplétude de Gödel, comme l'ont supposé aussi des commentateurs populaires du résultat. Mais des observateurs vigilants comme le logicien van Lambalgen ont montré les failles de la thèse de Chaitin inspiré entre autres par le paradoxe de Berry sur l'auto-référence d'une définition et la confusion entre langage et métalangage qui se réduit en dernière analyse à une diagonalisation sémantique comparable à la méthode diagonale et codiagonale de Cantor comme je l'ai décrite dans mon ouvrage *Logique et fondements des mathématiques* (Diderot, Paris, 1997). La diagonalisation entraine l'auto-référence : un ensemble infini dénombrable de listes finies ne peut être listé par une suite finie. Un bel exemple de la méthode diagonale se trouve chez Church qui montre dans son article de 1936 « An unsolvable problem in elementary number theory » qu'il n'y a pas de fonction récursivement énumérable qui énumère ou binumère l'ensemble des fonctions récursivement énumérables et le résultat s'applique aussi bien à la théorie de Chaitin. La méthode diagonale mène à l'auto-référence par codiagonalization dirai-je et ce n'est pas un accident, comme le pensait Gödel : « *gewissermassen zufällig* », disait-il. En réalité, pour les suites binaires infinies il s'agit d'une question logico-mathématique et elle n'a pas de rapport avec la physique classique ou quantique, simplement parce qu'il n'y a pas de quantités physiques (les observables) infinies en physique… Mais même en théorie des ensembles ZF ou en arithmétique de Peano AP, la théorie de Chaitin n'a pas plus d'effet que le théorème élémentaire du point fixe pour une fonction arbitraire $f(x) = x$. Point final.

C’est en effet un résultat du logicien R.M. Solovay qui donne le dernier mot sur la signification de l’oméga de Chaitin bien en deçà des prétentions de Chaitin. Solovay a donné la version finale du programme oméga en ayant recours à une théorie T qui est 1-consistante, c’est-à-dire une théorie correcte (*sound* en anglais) pour l’arithmétique de Peano (AP) interprétée dans la théorie des ensembles ZFC. Cette notion de 1-consistance valide les énoncés existentiels de la forme $\exists x\,(Px)$ et elle est due au logicien G. Kreisel qui a montré que la consistance oméga, la ω-consistance de Gödel, n’était pas nécessaire pour démontrer la validité des énoncés arithmétiques existentiels – une théorie correcte stipule qu’un énoncé démontrable est vrai, c’est la première partie du théorème de complétude qui exige qu’un énoncé vrai soit aussi démontrable, en symboles .

Or le résultat de Solovay stipule que si la théorie T interprétée dans ZFC est 1- consistante, alors ZFC est impuissante à déterminer un seul bit – on pourrait dire en anglais un seul *exhi-bit* dans la suite binaire (0,1) aléatoire de la « machine de Chaitin ». Ce résultat signifie que l’Oméga de Chaitin n’a aucune prise sur les mathématiques usuelles, en particulier la théorie des nombres – dont Chaitin croyait qu’elle était infestée par son chaotique Oméga ! En réalité, les nombres transcendants incalculables à la Chaitin n’ont de place que dans la population fort nombreuse des nombres transcendants, mais ils n’ont pas la même utilité que les quelques nombres transcendants *calculables* que nous connaissons comme π, e, $2^{\sqrt{2}}$ qui ont un rôle important en théorie des nombres ; les nombres oméga de Chaitin n’ont qu’une existence précaire, doublement négative parce qu’ils sont non algébriques comme tous les nombres transcendants et en plus ils sont non calculables. En fin de compte, l’Oméga de Chaitin rejoint l’Ω de Cantor, mais Cantor a eu la sagesse de considérer son Ω comme la pluralité absolument inconsistante (*absolut inkonsistente Vielheit*) de tous les ordinaux ; donc pas plus qu’il y ait un « ensemble Ω » de tous les ordinaux, il n’y a pas un seul bit du « nombre Ω ». Le problème de la décision (*Entscheidungsproblem)* de Hilbert est intact dans ce contexte – trouver un algorithme ou montrer qu’un tel algorithme ne se trouve pas – puisqu’il marque la séparation nette, le divorce *(Scheidung)* entre le décidable et l’indécidable, le calculable et l’incalculable, si l’on suppose d’abord que la théorie qu’on formalise est consistante, comme Gödel l'a fait. L'énoncé indécidable de Gödel est vrai par la 1- consistance. Le résultat de Solovay montre que l'énoncé Oméga de Chaitin n'est même pas vrai par la 1- consistance. Ce qui signifie que c'est un élément idéal (*ideal Element*) dans la terminologie de Hilbert, mais Hilbert désignait par là l'arithmétique transfinie de Cantor et il voulait éliminer ces éléments idéaux par une descente finie. Gentzen dans sa preuve de consistance de l'arithmétique de Peano a voulu utiliser une induction transfinie sous la forme d'une descente infinie en soutenant que la descente infinie de Fermat était une forme *déguisée* d'induction infinie ; c'est plutôt l'induction transfinie qui est une forme déguisée de la descente finie et certains ne sont pas dupes. L'important logicien S.C. Kleene a affirmé en 1950 que la preuve de Gentzen était une affaire d'appréciation psychologique, ce que Bourbaki a repris en 1970. En tout cas, la preuve de Gentzen a une certaine utilité en logique et mathématiques usuelles. Peut-on en dire autant de l'Oméga de Chaitin qui n'est pas un objet mathématique et n'a pas d'existence logique utile ? En définitive, c'est un objet de curiosité (réservé aux seuls informaticiens) en théorie de l'information algorithmique et ne change rien au problème de la décision. C'est ailleurs, dans la théorie des modèles sous l'impulsion de Tarski, que l'on trouve les théories décidables les plus intéressantes comme les théories algébriques (au premier ordre) des corps algébriquement clos et des corps réels clos.

Dans un contexte similaire, la théorie de suites aléatoires de Martin-Löf repose sur l'espace de Cantor 2^{ω} qui consiste en toutes les suites infinies de bits. Dans cet espace, une suite aléatoire est une suite qui n'appartient pas à un ensemble dénombrable récursivement énumérable, donc computable de tests non aléatoires. C'est donc par négation que l'on définit une suite aléatoire, comme en théorie des nombres transcendants où l'on dit qu'un nombre transcendant est un nombre qui n'est pas la solution d'une équation algébrique. Pour caricaturer, c'est comme si un accusé n'était déclaré innocent qu'après avoir passé avec succès une suite infinie de tests de culpabilité… Le mathématicien Edward Nelson parle alors en arithmétique imprédicative de citations à comparaitre de témoins, de témoins de témoins et de témoins de témoins *ad infinitum*… – voir *Predicative Arithmetic* (Mathematical Notes, Princeton University Press, p. 177). Il est évident que cette notion d'aléatoire n'a rien à voir avec la théorie de systèmes dynamiques en physique, comme le reconnait Peter Shor un spécialiste de la computation quantique.

La morale de cette histoire est que l'aléatoire est la marque ou la marche d'un observateur markovien qui gère les tests probabilitaires et statistiques comme des tests non alétoires dans l'ordonnancement du chaos, le seul interprète apte à mesurer le hasard qu'un coup de dés ne peut abolir selon le diktat de Mallarmé. La démarche de l'observateur local markovien qui est en même temps l'informateur principal en théorie de l'information est constructive et expérimentale (concrète) sans recourir à d'autres artifices que la mesure en un nombre fini d'étapes, comme la théorie de la mesure en mécanique quantique nous l'enseigne – je renvoie ici au commentaire de l'article « From the local Observer in QM to the Local Observer in RR ».

À la fin, le mythe d'un univers-ordinateur rejoint la machine de Turing universelle muni d'un ruban infini et d'une mémoire sans fin dont l'arrêt de ne peut être décrété que par un observateur fini…

The construction of chaos theory

SUMMARY

This paper aims at a logico-mathematical analysis of the concept of chaos from the point of view of a constructivist philosophy of physics. The idea of an internal logic of chaos theory is meant as an alternative to a realist conception of chaos. A brief historical overview of the theory of dynamical systems is provided in order to situate the philosophical problem in the context of probability theory. A finitary probabilistic account of chaos amounts to the theory of measurement in the line of a quantum-theoretical foundational perspective and the paper concludes on the non-classical internal logic of chaos theory. Finally, deterministic chaos points to a philosophy which asserts that chaotic systems are no less measurable than other physical systems where predictable and non – predictable phenomena intermingle in a constructive theory of measurement.

Key words : Chaos, dynamical systems, probability theory, constructivist philosophy

1. INTRODUCTION. THE CONSISTENCY OF PHYSICAL THEORIES

Let us start with a simple example : What we call now Kirchhoff's law on the equality between rates of emission and absorption of energy in thermal equilibrium is indeed a good example of a physical domain that should be investigated in view of the consistency of its axioms. One is reminded here that Hilbert had made of this question already in 1900 the sixth problem of his famous list of mathematical problems « The mathematical treatment of the axioms of physics ». Hilbert names probability theory and mechanics as the two privileged domains. The central problem in physical theories is still the consistency problem, because a fundamental physical theory proceeds like geometry from general axioms to more specific ones and the extension from the first principles to the secondary ones must preserve consistency. Consistency is not a matter of feeling or experimentation, but of logic, Hilbert insists, and the extension of the theory of thermal radiation to elementary optics is possible only on the grounds of consistency.

The problem area under discussion is of no particular interest for our purposes, nor are Hilbert's contributions to relativity theory (Hilbert 1965, III, 257-289) since they are mathematical elaborations and only partly foundationally illuminating – Hilbert had also worked on the foundations of the kinetic theory of gases and other occasional physical subjects. The work on (general) relativity theory in particular seems to have been inspired by the groundbreaking inquiries of Weyl, more than by Einstein's original work. Of greater interest to us is the paper written in collaboration with von Neumann and Nordheim on the foundations of quantum mechanics (Hilbert, von Neumann, Nordheim 1928).

In that paper we find the clear exhortation to make explicit the concept of probability in order to extract the mathematical content from its mystical (philosophical) gangue. But the main themes are, in my view, associated with the notions of "analytical apparatus" <*analytischer Apparat*> and "conditions of reality" <*Realitätsbedingungen*>. Which comes first, the analytical apparatus or conditions of reality, is a matter of foundational outlook and we shall see how Hilbert conceived of a so-called "physical axiomatics".

Probabilities and their relationships constitute the material we start from. The physical requirements a probability theory of physical phenomena has to fulfil represent the basis on which a "simple" analytical apparatus is defined ; then follows a physical interpretation of the analytical stucture and if the basis is fully determined, the analytical structure should be canonical. This is the axiomatic formulation already present in the Hilbertian foundations of geometry (1899) and the general argument leaves no doubt as to the permanence of the axiomatic ideal in Hilbert's work on the foundations of physics. What Hilbert seems to strive to is the conception of a categorical mathematical theory with a multiplicity of models ; however, not all models would be isomorphic. Non-standard models point rather to a complete first-order theory that generates a variety of interpretations. But the mathematical structure is generally not first-order. The dilemma of a physical axiomatics or of a "physical logic" opens up numerous avenues of research.

The analytical apparatus or the mathematical formalism is first conjectured and then tested through an interpretation in order to check its adequacy. The two components, analytical apparatus and its physical interpretation, must be sharply distinguished and that separation has the effect that the formalism is stable throughout the variations of its (physical) interpretations where some degree of freedom and arbitrariness cannot be eliminated. However, this is the price to pay for the axiomatization and vague concepts like probability will finally lose their fuzzy character. The conditions of reality for probability will prove to be intrinsically linked with the calculus of Hermitian operators and Hilbert's early theory of integral equations. Thus the fact that a probability measure is real positive depends on the finiteness of the sum

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots$$

for a linear function. Hilbert's result, which is a building-block of the Hilbert space formalism, was inspired by a similar result of Kronecker on linear forms. Kronecker's influence on Hilbert has also a conservative extension in the foundations of quantum mechanics and not only in the foundations of mathematics (see Gauthier 2002).

Hilbert's ideas of the foundations of *QM* have been made to work by von Neumann (1932 and 1961) in the Hilbert space formulation of quantum mechanics, which is the standard formulation of *QM*. We shall explore in the following the continuation of Hilbert's programme in the hands of his followers. I start with a notion which is not found in Hilbert.

2. CHAOS AND STATISTICAL MECHANICS

Chaos is among the privileged objects of study in contemporary science. Before being "à la mode", chaos was an important theme in philosophy and mathematics. The question of determinism is connected with the notion of chaos in more ways than one and nowadays the link between the two concepts can be summarized in the following thesis : chaos is deterministic and disorder is the ultimate end of an ordered world. In this paradoxical formulation a scientific theory is hidden, the theory of dynamical systems or physical systems with evolution in time. It is such a theory that will serve as the point of departure of a philosophical discussion that revolves around the internal logic of physical theories.

The theory of dynamical systems has evolved from the statistical mechanics of equilibrium – the non-equilibrium theory of Prigogine and others has not yet attained its maturity. Boltzmann and Gibbs have created statistical mechanics as a theory of measurement for heat, a concept which seemed to escape Newtonian (classical) mechanics and for which a special science was devised, thermodynamics. The concept of entropy, the second law of thermodynamics has been used to measure the loss of heat, an irreversible process. Let us note that irreversibility is not linked with any "arrow of time". Statistical mechanics as an atomic theory entertains only symmetrical processes (see Ruelle 1969), despite Boltzmann's assumption of a molecular chaos for the H-theorem which describes the increase in the entropy of an ideal gas in an irreversible process. Entropy grows in certain systems and it is a measure of disorder. One has a first measure of entropy S

$$S = k \log W$$

for W the number of complexions or configurations of atoms in the system and Boltzmann's universal constant k for a (perfect) gas. The ratio of energy E to entropy is the fundamental law of thermodynamics simply written

$$T = \frac{1}{k} \frac{\Delta E}{\Delta S}$$

and this formula defines the absolute temperature T. The absolute temperature (273,15 degrees Kelvin $\approx$ 0,01 degree Celsius) is an exact concept covering the perfect gas as well as black holes, which are at the same time white holes since they magnetically radiate. Let us remark that entropy has taken a new turn – entropy comes from the Greek «*entrôpê*» which means return – in quantum computer science where (invisible entropic) information is measured in qubits or quantum bits and is proportional to the number of bits registered by the microscopic state of a physical system. Boltzmann, who had wanted to have as an epigraph on his tomb the above formula for S would be delighted to know that even his ashes contribute to quantum information theory in the manner of a Maxwell's demon able to retrieve information from ash molecules bit by bit!

What is creeping in statistical mechanics and in the theory of dynamical systems is the notion of objective or a priori probability introduced by Laplace (see Laplace 1984). The first mathematical theory of probability was grounded on the law of large numbers (or Bernoulli's theorem) which is in fact a law of means or frequencies for random variables

$$y_n = (x_1 + \ldots + x_n) / n.$$

The probability for an event A in n trials is a proportion m/n of n occurrences of A which gives

$$\lim_{n \to \infty} \Pr(|m/n - p| < \varepsilon\ ) = 1 \ \ \forall \varepsilon.$$

Tchebichev's theorem takes over this notion from a statistical point of view: if f_i is the mean of a random sample a_i of i items in a given population, the probability that the mean of the sample diverges from the mean of the population by more than ε (for all ε) goes to zero as the size of the sample goes to infinity. The notion of standard deviation is given by the normalized sum

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_1 - \bar{x}) / n}$$

of independent random variables x and the mean $\bar{x}$ (the variance is σ^2). The concept of mean is fundamental and reaches up to the central limit theorem which stipulates that a sum of independent random variables $\sum_{i=1}^{n} x_i$ approximates a normal distribution when n goes to infinity with the normal distribution corresponding to the normal frequency (density) function

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$$

the concrete realisation of which is Gauss' curve. It is thus the concept of mean or frequency which is the core of the matter. In that context, expectation is mathematical and is simply expressed by the formula

$$E(x) = \bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx.$$

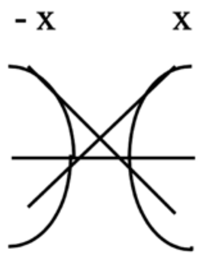
Here again, one can replace the infinite limit with a non-standard integer $a \cong \infty$ which is nearly equal to ∞ and one gets a finitary version of probability theory.

3. ERGODIC THEORY

A central theme is the concept of trajectory (period) and the variations it has known in the historical development of the theory of dynamical systems. A dynamical system with a continuous time evolution, for example, is a flow (vector field) defined by a family of differentiable transformations, that is diffeomorphisms which have the propriety of an additive group

$$f^{s+t} = f^s \circ f^t$$

where S and t are distinct times. A geodesic flow on a Riemannian variety V represents the frictionless motion of a point mass over the set of points of the tangent bundle – the sets of directions or vectors; those points belong to an hyperbolic plane



disjoint from a unitary circle (z: |z| = 1) – see Formenko 1987.Thus a Riemannian variety V with negative curvature (studied by Hadamard) is an Asonov flow. Trajectories are orbits in the case of periodic phenomena and celestial mechanics studies, among other things, the determination of planetary orbits governed by Kepler's laws. Newton, Lagrange, Laplace, Le Verrier have all been interested by the problem of the stability of the solar system, but Poincaré was the first to show that the three-body problem (e.g. Sun-Earth-Moon) does not have exact (convergent) solutions due to the small divisors (Le Verrier), then the KAM theorem (for Kolmogorov, Arnold and Moser) finds quasi-periodic solutions for small perturbations of the Hamiltonian describing initial conditions. In this line of attack, Arnold has found an approximate solution to the three-body problem, which he has generalised to the n-body problem in 1963. Small perturbations are sufficient to make the system hyperbolic (chaotic), but the temporal terms (or secular inequalities, after Laplace's terminology) have an extremely long effect, such that there is no immediate danger (a few billion years down to 100 million years) that the eccentric course of the Earth hits its elliptic centre, the Sun.

It is not however the history of chaos that I want to outline here but rather the internal logic of chaos theory. The recent history ot the theory of chaos derives from statistical mechanics (or thermodynamics) – see Ruelle 1979 – and ergodic theory as well as from (topological) measure theory and probability theory. Before we draw epistemological conclusions for chaos theory, I shall question two historical examples in order to exhibit the intersecting dialectics of order and disorder in scientific theory without paying any attention to the philosophical debates over determinism or the problem of complexity, which in my view are often either obsolete or sterile issues.

The ergodic theorem says, in first approximation, that the temporal mean (along a trajectory) is in general equal to the spatial mean of the entire trajectory ; this boils down to the mean of statistical observations (on sets of points). For classical or conservative dynamical systems, as opposed to dissipative ones, the temporal mean is defined on the phase space, that is, on the set of all possible states of a physical system

$$1 / T\int_0^T f(x_s)\, ds$$

where x is the position of a point or microstate at time s and this mean has a limit when T tends to infinity $T \to \infty$. Such a mean applies to stationary or non-ergodic systems. If one supposes that our microstate is described by generalized coordinates for the position and the velocity of a point mass in a mechanical (Hamiltonian) system (see Ruelle 1993) the total energy of a Hamiltonian system is an invariant, i.e. a constant. Temporal means are another invariant of stationary systems. An ergodic system is an unstable system where there is mixing (interaction) of the components of the system and the system is supposed to contain all the possible trajectories. The generalisation of the ergodic theorem allows to reach with Birkhoff (1931) all the invariants of the form

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi \;\; f^k x$$

for an integrable functional ϕ and a measurable map *f*. An invariant probability measure ρ is said to be ergodic if it does not have a trivial decomposition

$$\rho = \alpha\rho_1 + (1 - \alpha)\rho_2$$

for $\alpha \neq 0$ or 1 and $\rho_1 \neq \rho_2$ (see Ruelle 1978 and Ruelle 1989).

For the purpose of the present discussion, a dynamical system is defined formally as a quadruple (X, Σ, μ, τ) where X is a set, Σ a topology on X which make up a σ-algebra with a denumerable measure μ – we have thus a probability space – and τ is an automorphism on X which is measure-preserving as a time evolution map.

It is not only a theory of dynamical invariants, but the birth of deterministic chaos that we owe to measure theory. As a matter of fact, the general theory of dynamical systems covers both deterministic and probabilistic systems, since the data (X, μ, τ) of a topological space X, a measure μ on X and a transformation τ which preserves the measure, are sufficient for the definition of a large array of isomorphic systems. The ergodic theorem implies that one can decompose an invariant probability measure in subsets, some of which are negligible (of probability measure zero) and spectral decomposition allows for the passage from sets to functional spaces such as, for example, the Banach space. Thus, Smale's spectral decomposition provides a finite measure – finite union of disjoint subsets – for the geodesic flow we have defined above. With the help of the ergodic theorem, one can show that such a flow is ergodic (see Dalmedico, Chabert, Chemlo 1992, chap.2). In a similar fashion, Poincaré's recurrence theorem asserts that the future state of an isolated mechanical system will come back arbitrarily close to its initial state (in a vicinity of measure zero). However ergodic systems are only the first ladder in the so-called ergodic hierarchy which comprises weak mixing systems, strong mixing systems and what we can call Kolmogorov weak random mixtures and Bernoulli strong random mixtures – here mixing is a measure of randomness and probabilistic independence with Bernoulli systems exhibiting "pure" random behaviour. This is not to say that there is a continuous scale of dynamical systems, from ergodic to chaotic ones, as is stressed in classic texts (see Ornstein 1974 and Ott 1993, for example), nor that there are discrete degrees of unpredictability in passing from chaos to order or from order to chaos (see Belot and Earman 1997).

It is worth mentioning that the ergodic theorem is a physical hypothesis belonging to the analytical apparatus of the theory. The topological approach is but an ideal theory of measurement. That does not mean that the theory is not constructivizable to a large extent as is probability theory (see Bishop 1972 and Nelson 1987). One must remark though that Nelson's work on dynamical systems does not always obey the constructivist predicament. Nelson would insist, for example, on stochastic mechanics with Markov processes for transition probabilities as a theory equivalent to quantum dynamics with Schrödinger's wave equation. However, statistical predictions for spin correlations, as an example, are not equivalent and this remains a mystery for someone who forgets that Markov processes have no memory, while the apparatus in the measurement theory of quantum mechanics is the memory box of past experiments. In the idealized theory of Markovian stochastic mechanics, there seems to be no place for the interaction of the observed system with the observing system. But beyond or below such a constructivization, the fact that it applies to dynamical systems bestows a concrete status to the theory to the extent that there are physical theories involved and a probability theory for dynamical systems generates for all purposes a physical definition of randomness with the help of concepts like instability and sensitivity to initial conditions, which we shall now see.

4. BIFURCATIONS, TURBULENCES AND ATTRACTORS

Classical thermodynamics evolved into a mechanical (statistical) theory. Measure theory suggests, for example, that entropy is a measure of random content in the description of a system ; it is also a measure of invariance. One can remark here that Kolmogorov and Chaitin have extracted from the concept of entropy a definition of algorithmic complexity : a sequence is random if the algorithm of its definition is irreducible, i.e. its complexity is minimal and cannot be reduced by another algorithm, its proof for example. The length of its minimal definition is the measure of its algorithmic complexity or of its random content. A random phenomenon is therefore unpredictable (see Dalmedico, Chabert, Chemlo 1992, chap. 12). The concept of entropy originates with the theory of heat, goes over information theory and comes back to the probability theory of dynamical (ergodic) systems.

There is a correspondence between information and invariants ; there is no information available outside the system of invariants which encompasses all positions and velocities of a dynamical system in its time of evolution (see von Plato 1989). It is the very notion of an ergodic system which undergoes all possible states of the phase space. This bundle of questions poses the problem of measure theory as control of information.

Such phenomena as bifurcation and turbulence are not immediately subjected to control. As Bergé and Dubois (see Bergé, Pommeau, Vidal 1984, chap 6) say, it is when one varies progressively a control parameter that a system "bifurcates" from a regular (periodic or quasi-periodic) state to the chaotic state. There are three modes of bifurcation: intermittent when a signal goes through a slow regular (laminar) period before crashing in a turbulent "puff", doubling the product by a bifurcation where the base period is multiplied by two and non-linear interaction of 2 (or 3) oscillators (or vibrators). From a mathematical point of view, a dynamical system f_μ^t with a bifurcation parameter μ (a real variable) changes qualitatively at μ_0, the bifurcation point (see Ruelle 1978 and Bergé, Pommeau, Vidal 1984). Before bifurcating, the system is structurally stable, that is, there is a homeomorphism (continuous transformation) between two sufficiently closed points which preserves the order of the points on their trajectories (flow orbits). Bifurcation points constitute a set of points that are not structurally stable and a dynamical system bifurcates on entering such a set. In order to maintain structural stability, recurrent points are needed – it is Poincaré's dynamical recurrence – besides non-wandering points, that is, points that are not outside the immediate vicinity of the trajectory. Fixed points and periodic points are thus non-wandering points which allow for invariant probability measures.

Structurally stable dynamical systems are confined to a residual subset R, that is a denumerable intersection of dense open sets of the space D of all dynamical systems. Dense means here that every point of D is a point or a limit point of R – R is closed in D. Those restrictions indicate that structural stability is a more or less variable concept and that bifurcation is a general phenomenon. Moreover, it is far from the idea of bifurcation that Landau and Hopf in the forties had used to explain turbulence by supposing that thermodynamic turbulence emerges in a sequence of quasi-periodic bifurcations (or cascades). Ruelle and Takens have taken up this programme in 1971 when they have introduced the notion of strange attractor (see Ruelle and Takens 1971). The takeover has meant a major change in the direction of the enterprise, since the Landau modes did not survive: they were a kind of modulations and oscillations in superposition, an *ad hoc* explanation of turbulence. The strange attractor simplifies the situation by finding a set-theoretic location or a measure-theoretic topology for turbulence. The fact that a strange attractor has a fractal – a non-integral – dimension is not the primary source of interest; what counts is the sensitive dependence of deterministic chaos upon initial conditions. Here one should take into account that critical phenomena are not limited to turbulence; besides convection phenomena, there are also percolation processes – filtration or infiltration processes of a liquid or a viscous fluid – the phenomenon of superconductivity, the transition phases in quantum phenomena, etc.

Attractors and attraction basins are defined in simple set-theoretic terms: closed sets of (fixed or critical) points with a fundamental neighbourhood – an open set defined in an inverse mapping $(f^t)^{-1}$ on a fundamental neighbourhood is an attraction basin. Strange attractors are engendered by arbitrarily small fluctuations or perturbations of quasi-periodic orbits (as described by tori). A small perturbation grows exponentially with time and gives birth to deterministic chaos with sensitive dependence upon initial conditions.

I do not want to go into a philosophical analysis of deterministic chaos or its unpredictability, despite the deterministic description and the ramifications of the metaphor of chaos in dissipative dynamical systems. The first strange attractor, the Lorenz attractor, is a model for atmospheric convection which showed that the meteorologists could not predict long-term weather – the butterfly effect. Postdiction, as opposed to prediction, can be translated as a memory loss (suffered by archaeologists and historians!). Deterministic chaos has come to challenge non-equilibrium thermodynamics in the purgatory of ideas between time and eternity. But public opinion is not the ideal guide in epistemological foundations of chaos, if that notion has any meaning.

5. PROBABILITIES AND DYNAMICAL SYSTEMS

The theory of stochastic or random processes is a statistical theory of dynamical systems and probabilities and there probabilities are empirical; the only a *priori* probabilities belong to the subjective domain of decision theories (epistemic attitudes) or to the mathematical theory of probability. The mathematical theory goes back to the 1928 Kolmogorov's axiomatization of the probability calculus. The axiomatization is briefly described as a triple (Ω, Σ, μ) for μ a probability measure on the σ-algebra Σ of subsets or events A of a probability space Ω with the stipulations that

1) $A \in \Omega$

2) $\forall A \in \Omega \rightarrow \quad A_i \in \Omega$ for $i = 1,\ldots,n$

3) $A' = \Omega - A$ for A' the complement of A

with $0 \leq \mu(A) \leq 1$ for $A \in \Omega$ and $\mu(0) = 0$, $\mu(1) = 1$; countable or σ-additivity means

$$\mu(\ A_i) = \Sigma\mu(A_i)\ i = 1,\ldots,\infty$$

for $A_i \cap A_j = \varnothing$, if $i \neq j$. Properties of the Boolean complementation of the calculus of probabilities are summarized as follows:

$$(A')' = A,\ A \cup A' = \Omega,\ A \cap A' = \varnothing$$

and

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \text{ and } (A \cap B)' = A' \cup B'.$$

The Boolean complement is the absolute complement; we could introduce here the relative or local complement by

$$C = A \Rightarrow B = \mathrm{In}\ (X - A) \cup B$$

where In is the set of interior points and A, B, C are open subsets of a topological space X (C is the largest open subset distinct from A). This relative "pseudo-complement" is the main distinctive feature of a Brouwerian lattice and characterizes a different internal logic of probabilities.

The above statement about probabilities being empirical in dynamical systems could induce the belief that empirical properties are objective and that they alone have an ontological status as, for example, Popper's propensities or Gibb's virtual ensembles. But the frequentist theory has taught us that means and mean values (for frequency) with their relative weights are founded upon a calculus of repeated observations. Statistics is applied probability theory and it can be couched in a finitary framework of finite probability spaces (see Nelson 1987). By appealing to infinitesimals, one eliminates infinite sets in the same manner as one eliminates infinite terms in a renormalized physical theory. Is the theory of dynamical systems renormalizable? If we remember that the theory of dynamical systems continues into quantum field theory through quantum statistical mechanics in which systems have infinite degrees of freedom and limit theorems are a plenty (thermodynamic limit and limit conditions), we are maybe justified in doubting that the analytical apparatus is reducible. Nevertheless the formalism of dynamical systems might be separable into a finite and an infinite part, as F. Dyson (see Dyson 1949) has suggested for the scattering matrix S. The theory of the S matrix starts with the amplitude

$$\left\langle \beta \,|\, S \,|\, \alpha \right\rangle \equiv (\phi_\beta \psi_\alpha)$$

which describes the phase transition from a state α to a state β of a system of wave functions ψ_α and ψ_β (for heavy particles i.e. hadrons). Since the S matrix is finite, the separation of finite from infinite parts in the integral expressions is almost automatic, as Dyson remarks ; he adds that the Hamiltonian formalism does not have an immediate physical meaning. There are two possible descriptions as defined by Dyson, one by an ideal observer, the other by a real observer ; the former is capable of infinite precision, the latter is content with the finite. I call the latter observer the local observer. This observer measures local instability and by iteration, the global phenomenon ; he then measures dynamical motion over the total space or the universal Hamiltonian by partitioning it into phases in subspaces of decreasing dimension. Measure invariants are thus decomposable and there is a homomorphism between the analytical apparatus and the physical system. There is another homomorphism between the physical system and probability theory. One must add here independence of events which corresponds to a mixture (the local observer is the "mixer"). We end up with the result that the underlying topological space is not of set-theoretic nature, the logic and the probability theory are non-Boolean.

The space of the Hamiltonian is a symplectic space with exterior (or vector) product for the exterior differential form

$$\omega = \sum_{i<j} \omega_{ij} \ dx_i \wedge dx_j$$

of degree 2. The generalized coordinates for the Hamiltonian have the form

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dg_i.$$

A symplectic space is non-Riemannian or non-symmetrical (see Formenko 1987). The skew vector product induces a singular structure on the vector field (gradient). The internal logic of symplectic structures points to a logic of interaction and interlacing. It differs essentially from a logic of infinite symmetrical spaces (situations) which could well be Boolean. It is the logic of finite pointwise structures which is in question and as Hermann Weyl has put it:

> Each field of knowledge, when it crystallizes into a formal theory, seems to carry with it its intrinsic logic which is part of the formalized symbolic system and this logic will, generally speaking, differ in different fields (Weyl 1968, III, 705).

6. CONCLUSION. CHAOTIC ONTOLOGY OR TYCHISTIC PHILOSOPHY?

Deterministic chaos is sensitive to initial conditions and initial conditions even if they are supervised by the Laplacian all-knowing God of classical determinism cannot prevent unpredictability in a finite universe open to infinity in all directions, in F. Dyson's terms. From a local point of view though, if the ontology of chaos seems to be laden with a natural philosophy akin to realism, its internal logic reveals a more constructivist content since chaos theory appears as a theory of measurement. Not unlike quantum mechanics, the two ingredients of determinism and probability seem present in chaos theory. The evolution of a quantum-mechanical system follows the deterministic Schrödinger wave equation ψ while the measurement of canonical variables like momentum and position obeys Born's probability measure $|\psi|^2$ in accordance with Heisenberg's *indeterminacy* relations « *Unbestimmtheitsrelationen* ». The latter point also to a kind of unpredictability to the extent that the position of a particle cannot be predicted before a measurement takes place. Only deterministic theories, like David Bohm's hidden variable theory, need assume a definite position for every particle in the universe, a philosophical stance not unlike Laplace's universal observer who surveys the totality of initial conditions in a synopsis, that is at one glance. But if it is a local observer which is at play in chaos theory as in quantum mechanics (see Gauthier 1983 and Gauthier 2002, chap.6), one does not have to go into quantum chaos, still a chaotic subject matter as one might say, to understand that the analytical apparatus or the logico-mathematical formalism of chaos has not yet come to maturity and cannot provide a canonical model for chaotic phenomena. Fractals and other *strange* non –standard informal analogies should not detract attention from the classical features of chaos theory, that is the theory of dynamical systems with its inherent probability theory. It is that probability theory which is at the core of the internal logic of chaos theory. The formal ontology which can be derived from the internal logic is akin to a finitary constructivist, non-classical logic where the local observer occupies the central place in the measurement of chaotic systems.

Philosophers interested in chaos theory – I include here L. Sklar, J. Berkowitz, G. Belot and J. Earman among others – tend to advocate a general philosophy of tychism in a terminology introduced by C.S. Peirce, that is a more or less realist outlook on random processes which are supposed to be objective or natural to the extent that they are ingrained in physical systems. The very notion of chance has a connotation of objectivity and the *belief* in one's chance by contrast cannot be but a mere subjectivist notion. Those who adopt a Bayesian attitude about subjective or epistemic probability plead for the coherence of a rational agent who picks up a given a priori probability distribution and sticks to it, if one may say. The Bayesian rule states that

$$(\Pr (E_i/A) = (\Pr (E_i) \times \Pr (A/E_i)) / (\Sigma \Pr (E_j) \times \Pr (A/E_j))$$
$$\text{for } j = 1,\ldots,n$$

where $\Pr (E_i/A)$ is the conditional probability of event E given event A; Bayes'rule gives the inverse probability of event A given event E over the total probabilities

$$P(A) = \Sigma \Pr (A \cap E_i) \text{ for } i = 1,\ldots,n.$$

There is thus a regression to prior probabilities for an agent endowed with memory. But there are also objective Bayesians who, as L. Sklar puts it,

> maintain that there are indeed further constraints of rationality that can be imposed on an a priori probability distributition (Sklar 1993, 117).

The objective Bayesians would include J.M. Keynes, R. Carnap, H. Jeffreys and maybe H. Reichenbach among others. The objective Bayesians, following Sklar, share a common belief in the principle of indifference or symmetry of a priori probabilities. For them conditionalization provides for conservativity on initial probabilities and induces some degree of invariance on the agent's evolving beliefs.

But one need not be a Bayesian, subjective or objective, to hold on to a priori probability. Mathematical probabilists, from Bernoulli and Laplace on to Nelson, have defined an analytical apparatus for a probability calculus that may be classical or non-classical (or non-standard), but which does not rest on the shoulders of an epistemic agent ; it is grounded rather in what H. Weyl has called, after Kant and Husserl, transcendental subjectivity – the Dutch mathematician L.E.J. Brouwer would call it the creative subject. The theoretical construction of the world in Weyl's terms calls for a logico-mathematical formalism of a probability theory that is purely abstract. Take, for example, E. Nelson's finite probability theory (Nelson 1987) where a random variable on a finite set Ω is simply a function $x : \Omega \rightarrow$ where ∞ is the real numbers ; a stochastic process in that context is a function whose values are random variables. Stochastic processes like Markov processes (or Kolmogorov or Bernoulli processes) may be called forgetful functors in category-theoretic terms in the sense that they forget the past structure of a process. Martingales, Wiener processes, Ito's stochastic integral are all all limiting processes that do not take the past into account or when they do, they subtract it ! E. Nelson (Nelson 2001) emphasizes the fact that stochastic mechanics is inherently indeterministic, while quantum mechanics, a formally equivalent theory, needs a theory of measurement with a local observer – Nelson says consciousness – to make place for randomness and probability. One could reply here that quantum mechanics is a physical theory and that stochastic mechanics is more of a mathematical theory, but one could also maintain that the local observer is present in stochastic mechanics if only under the guise of the analytical apparatus as the constructor of the analytical apparatus, the « processor » of random processes, the mixer of the mixing processes, the measurer of measurable systems. Transcendental subjectivity is transcendental intersubjectivity, Husserl would say, and the local observer, unlike the Laplacian observer on Sirius or the Maxwellian demon among molecules, the Demiurge of Plato's *Timaieus* or even the Bayesian epistemic agent, is only responsible for repeatable experiments and repeated measurements. The couple observed system – observer system is a permanent one and pervades all fields of knowledge and experience. Physical theories, from cosmology to microphysics, make room for a local observer to the extent that they rely on experiment and measurement which require measurement apparatuses ; mathematical theories require an analytical apparatus of their own and here the creative subject plays the rôle of the local observer who in the final analysis is the intersubjective foundation of scientific knowledge. Dynamical systems, ergodic theory, random processes, stochastic mechanics, probability theory and chaos theory have in common a measure-theoretic analytical apparatus, which is already a fair amount of measure for an object, chaos, reputedly without measure on Plato's testimony in the *Timaeus*.

If we come back at the end to Plato's Demiurge, it is not to stress the limitations of Plato's invention of a divine world-maker. One can only admire the power of a creator who could organize the material world into geometrical figures that fit an armillary sphere and whose sole incapacity was to rule the chaos. Chaos in Plato meant the space or abyss between the heavens and the Earth, that in-between not amenable to measure or immune to any ruling. Nowadays, mathematical measure theory, from Lebesgue's integral to Ito's stochastic integral have provided for some measure of that « random real interval » of mixed celestial – terrestrial world. In Aristoteles' physics, the celestial sphere of fixed stars was governed by an eternal law, while the wandering stars, « planetês » or planets, including the Earth were subjected to the disorderly motions of mortal entities. That Ptolemaic order was overthrown by Copernicus and Kant in his own Copernican revolution has urged us to search for the fundamental laws of the motions of celestial bodies not in the celestial bodies themselves, but in the (local) observer who observes them (*Critique of Pure Reason,* B XXII). Thus the contemporary philosopher of chaos must find his way between determinism and indeterminism, predictable and unpredictable phenomena, maybe a mixture of these to be able to propose a good measure of a theory of measurement for an unmeasurable chaos.

REFERENCES

1. Belot, G. and Earman, J., 1997 : Chaos out of order : Quantum Mechanics, the correspondence principle and chaos. In : *Studies in the History and the Philosophy Modern Physics*, 28, 147-82.
2. Bergé, P., Pomeau, Y., Vidal, Ch.,1984 : *L'ordre dans le chaos*, Paris, Hermann.
3. Berkowitz, J., Frigg, R., and Kronz, F., : The Ergodic Hierarchy, Randomness and Hamiltonian Chaos. Forthcoming in *Studies in the History and Philosophy of Modern Physics.*

4. Bishop, E.,1972 : *Constructive Measure Theory*. Providence, R.I. American Mathematical Society.
5. Dahan Dalmedico, A., Chabert, J.-L., et Chemlo, K., 1992 : *Chaos et déterminisme*. Paris, Éditions du Seuil.
6. Dyson, F. J., 1949 : The S Matrix in Quantum Electrodynamics. In : *Phys. Rev.* 75, 1730-1743.
7. Formenko, A.T., 1987 : *Differential Geometry and Topology*. New York and London. Consultants Bureau.
8. Gauthier, Y., 1983 : Quantum Mechanics and the Local Observer. In : *International Journal of Theoretical Physics*, 22, 1141-1152.
9. Gauthier, Y., 1985 : Zeno's Paradox in Quantum Mechanics. In : *Lett. al Nuevo Cimento*, vol. 44 N., 687.
10. Gauthier, Y., 2002 : *Internal Logic. Foundations of Mathematics from Kronecker to Hilbert*. Dordrecht/Boston/London, Synthese Library, Kluwer.
11. Gauthier, Y., 2005 : Hermann Weyl on Minkowskian Space-Time and Riemannian Geometry. In : *International Studies in the Philosophy of Science,* 19(3), 261-269.
12. Hilbert, D. von Neumann, J., Nordheim L., « Über die Grundlagen der Quantenmechanik », *Math. Ann*. 98 (1928), pp. 1-30.
13. Laplace, P.S. de, 1984 : *Exposition du système du monde*, éd. 1835, Paris, Fayard.
14. Nelson, E., 1987 : *Radically Elementary Probability Theory*. Mathematical Notes, Princeton, N.J., Princeton University Press.
15. Nelson, E., 2001 : *Dynamical Theory of Brownian Motion.* Mathematical Notes, Princeton, N.J., Princeton University Press.
16. Ornstein, D.S., 1974 : *Ergodic theory, randomness and dynamical systems*. Yale University Press, New Haven, Conn.
17. Ott, E., 1993 : *Chaos in dynamical systems*. Cambridge, Cambridge University Press.
18. Ruelle, D.,1969 : *Statistical Mechanics*. Amsterdam, W.A. Benjamin Inc.
19. Ruelle, D. et Takens, F., 1971 : On the Nature of Turbulence. In : *Comm. in Math. Phys.*21, 167-192.
20. Ruelle, D., 1978 : *Thermodynamic Formalism*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Reading, Mass., Addison-Wesley.
21. Ruelle, D., 1989 : *Elements of Differentiable Dynamics and Bifurcation Theory*. New York, Academic Press Inc.
22. Ruelle, D., 1991 : *Hasard et chaos*.Coll. "Points", Paris, Odile Jacob.
23. Sklar, L., 1993 : *Physics and Chance*. Cambridge, Cambridge University Press.

24. Von Plato, J., 1989 : Probability in Dynamical Systems. In : J.E. Fenstad et al. eds., *Logic, Methodology and Philosophy of science VIII*, 427-443, Amsterdam, North-Holland.
25. Weyl, H., 1968 : *Gesammelte Abhandlungen*. Hrsg. v. K. Chandrasekharan, Berlin, Heidelberg, New York, Springer Verlag.

CHAPITRE 18

Commentaire de «A Note on the Internal Logic of Constructive Mathematics. The Gel'fond-Schneider Theorem in Transcendental Number Theory»

Cet article est d'abord paru dans *The Road to Universal logic,* Birkhäuser – Springer (2015), vol. 2., p. 297-307, puis repris dans mon ouvrage *Towards an Arithmetical logic*. *The Arithmetical Foundations of Logic*, Birkhäuser-Springer, Basel 2015, chapter 6, p. 117-132.

Le texte est une réponse à la question de Michael Dummett dans son ouvrage *Elements of Intuitionism*, Oxford, Clarendon Press, 2000. La question concerne la solution rationnelle ou irrationnelle de $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$; on sait déjà que la racine carrée de 2 est irrationnelle mais la racine carrée de la racine carrée de 2 l'est-elle ? Le problème est posé pour la logique classique avec le principe du tiers exclu qui ne peut décider de l'une ou l'autre solution, puisque on peut trouver en logique classique deux solutions rationnelles, mais on ne sait pas laquelle est la bonne ; des logiciens philosophes naïfs pensent que la solution est du côté de la logique intuitionniste puisque le tiers exclu n'y est pas admis et que la disjonction $A \vee \neg A$ n'est pas valide ; la logique intuitionniste exige que l'on ait identifié l'un des membres de la disjonction comme valide ou vrai pour que $A \vee B$ ait la valeur de vérité 1. De même pour le quantificateur existentiel faut-il avoir trouvé une instance *n* pour affirmer $\exists x\, Ax$. Tout ce que la logique intuitionniste peut faire dans le cas qui nous intéresse, c'est d'accorder la cote « indécidable » à une question non encore décidée comme l'était avant 1995 le dernier théorème de Fermat ou encore la question de Dummett décidée depuis 1936-1963. Le théorème de Gel'fond-Schneider démontre que $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$

est irrationnel et même transcendantal et c'est à tort que des logiciens philosophes attribuent une valeur de vérité à « indécidable » pour en faire une logique trivalente : la logique intuitionniste n'a que deux valeurs de vérité 0 et 1 comme la logique classique. Encore une fois la logique est tributaire ou à la remorque du résultat mathématique. Des mathématiciens intuitionnistes moins naïfs que les philosophes le reconnaissent, par exemple Ann S. Troelstra se contente de déclarer que la preuve de Gel'fond-Schneider est constructive sans plus. Elle ne l'est pas dans sa forme originale et il a fallu le travail de Gel'fond dans le texte *Elementary methods in analytic number theory* de 1965 pour « constructiviser » le résultat. J'y ai ajouté quelques détails tirés de Bishop et Kronecker pour conclure au caractère constructif de la preuve.

À mon sens, il s'agit là d'une leçon constructiviste pour les philosophes, logiciens et mathématiciens qui se contentent de peu en matière de constructivisme. La leçon à tirer de cet exercice, c'est que le constructivisme est plus difficile que la voie non constructive en logique et en mathématique, mais que le gain en information validée constructivement procure plus de certitude que la preuve non-constructive sans pour autant l'invalider.

C'est la leçon que tirent aussi le programme de « proof mining » ou extraction du contenu constructif mené par Ulrich Kohlenbach ou encore le programme de « reverse mathematics » de Friedman-Simpson que je traduis par mathématiques régressives par opposition à progressives sans y accoler une connotation péjorative. Il s'agir en dernière analyse d'énucléer le contenu constructif des mathématiques classiques tout en sauvegardant leur validité ou leur vérité, même quand elle est transcendante….

A Note on the Internal Logic of Constructive Mathematics. The Gel'fond-Schneider Theorem in Transcendental Number Theory

ABSTRACT

The question of an internal logic of mathematical practice is examined from a finitist point of view. The Gel'fond-Schneider theorem in transcendental number theory serves as an instance of a proof-theoretical investigation motivated and justified by constructivist foundations of logic and mathematics. Constructivist notions are emphasized by contrasting the arithmetical proof procedure of infinite descent with the principle of transfinite induction. It is argued that intuitionistic logic cannot alone provide secure foundations for constructivist mathematics and a finitist logic is briefly sketched in the framework of polynomial arithmetic.

Keywords. Constructivist mathematics, finitism, infinite descent, number theory.

1. INTRODUCTION. THE LOGICAL PROBLEM

To illustrate the excluded middle principle of classical logic, Dummett (2000 :6) cites the well-known example of a theorem in classical logic :

> There are solutions of $x^y = z$ with x and y irrational and z rational. Take $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ as either rational or irrational :
>
> If $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ is rational, take (as irrational) $x = \sqrt{2}$ and $y = \sqrt{2}$, so that $z = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ which by hypothesis is rational.

> If on the other hand $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ is irrational, put x = $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ and y = $\sqrt{2}$ so that z = $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2$, which is certainly rational.

Thus in either case a solution exists, but the excluded middle principle doesn't tell us anything about which one to choose. Intuitionistic logic requires that one of the disjuncts of a disjunction be proven or instantiated (as for the existential quantifier). Of course, we know now that $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ is irrational and even transcendental, due to the Gel'fond-Schneider theorem : here an intuitionist logician like A.S. Troelstra (see his *Constructivism and Proof Theory 2003*) is content to say that there is a constructive proof and simply refers to the Gel'fond-Schneider theorem without further comment ! It was certainly not constructive in the original proof and it is only after futher work by Gel'fond that progress towards constructivization has been achieved in the 1965 *Elementary methods in analytic number theory* by Linnik and Gel'fond, as noted in the references.

The Gel'fond-Schneider theorem (1934) is a solution to Hilbert's 7th problem :

> For α and β algebraic numbers with $\alpha \neq 0$, 1 and β irrational, α^β is transcendental.

Schneider (1934a) puts the problem in the form :

> For ω an algebraic number $\neq 0,1$ and θ irrational, ω^θ is transcendental with $\theta = \log \eta / \log \omega$ for $\eta = \omega^\theta$.

The proof proceeds by logarithmic approximations to algebraic numbers and concludes that any logarithm of an algebraic number with an algebraic base must be a transcendental or a rational number. By *reductio ad absurdum*, ω^θ is transcendental. With a similar procedure, Gel'fond (1934a) comes to the conclusion that the logarithms of algebraic numbers with an algebraic base are transcendental or rational numbers.

Both proofs are (partially) constructive in the sense that they extract arithmetical content (that is logarithmic approximations, minorizations and majorizations, effective bounds,etc.) from analytical methods (infinite series or power series, periodic functions, etc.) ; they use polynomial inequalities for the rational values of an analytic function $f(x)$ and end up by contradicting an assumption to the effect that finite values make it vanish identically $f(x) = 0$.

Baker (1975) extended and generalized those results in transcendental number theory using auxiliary functions or polynomials – which he calls fundamental polynomials –, linear forms and logarithms for approximations of algebraic numbers in order to establish algebraic independence by contradiction or *reductio ad absurdum.*

It is only in 1962 that Gel'fond produced an elementary (constructive) proof for real algebraic numbers ω, $a > 0$, b for e^{ω} and a^b (see *Gel'fond and Linnik 1965*, chapter 12). Gel'fond relates that he used only Rolle's theorem as an analytical tool – here a constructivist could mention that a constructive version of Rolle's theorem is to be found in Bishop (1967). Essentially, Rolle's theorem states classically that a continuous function of a real variable on $[a, b]$ with $f(a) = f(b)$ for $a < b$ has a derivative $f'(c) = 0$. Bishop's constructive version introduces $|f'(x)| \leq \varepsilon$ with $\varepsilon > 0$ for moduli of continuity of f' and differentiability of f. In other words, Bishop defines more precisely the limits of the real interval $[a, b]$ much in the manner of Kronecker for Bolzano's theorem on intermediate values (see *Gauthier 2002* and *Gauthier 2011*). Bishop has admitted (*Bishop 1970*) that his foundational project was closer to Kronecker's finitist programme than to Brouwer's intuitionism.

However, Gel'fond's work is in analytic number theory and constructive number theory, not in constructive analysis. His results in transcendental number theory are algebraic in nature. The main theorem in Gel'fond and Linnik (1965, chap. 12) states that « if $\omega \neq 0$ is an algebraic real, than e^{ω} is not algebraic » and is couched in the language of algebraic integers in finite fields. A finite field is also the arena for an another elementary proof (*Gel'fond and Linnik 1965*, chap. 10), Hasse's theorem on integral solutions for the equation :

$$y^2 \equiv x^3 + ax + b \pmod{p}$$

for integers a, b and a prime $p > 3$. Gel'fond formulates his solution in terms of an inequality

$$|N - p| < 2\sqrt{p}$$

where N is the number of integral solutions of the equation. Here, the language used is the language of polynomials and divisors with an algebro-geometric interpretation and Gel'fond quotes a major result of André Weil on Riemann's hypothesis in function fields (see *Weil 1941*). Weil's result is a special case of the Riemann hypothesis for quadratic finite fields (with a finite number of elements or points on a projective surface) and Weil claims that his result is free of the transcendental theory, that is of the analytic number theory. The main arithmetical tool here is the theory of forms or homogeneous polynomials. That theory has been developed first in great generality by Kronecker in his «*Allgemeine Arithmetik*» or General Arithmetic and Weil has repeatedly refered to Kronecker as the founding father of algebraic – arithmetic geometry on finite fields. Kronecker's theory of forms is equivalently a divisor theory (of modular systems) for which infinite descent works, since homogeneous polynomials are finite (integral and rational) functions with integer coefficients and indeterminates (variables). Fermat's infinite or indefinite descent, as Fermat qualified it is in fact a finite process.

Weil describes infinite descent in the following:

> Infinite descent *à la* Fermat depends ordinarily upon no more than the following simple observation: if the product $\alpha\beta$ of two ordinary integers (resp. two integers in an algebraic number-field) is equal to an m-th power, and if the g.c.d. of α and β can take its values only in a given finite set of integers (resp. of ideals), then both α and β are m-th powers, up to factors which take their values only in some assignable finite set. For ordinary integers this is obvious; it is so for algebraic number-fields provided one takes for granted the finiteness of the number of ideal-classes and Dirichlet's theorem about units. In the case of a quadratic numberfield $\mathbf{Q}(\sqrt{N})$, this can be replaced by equivalent statements about binary quadratic forms of discriminant N.
>
> (see Weil 1983, p. 335-336)

What interests us here in this modern terminology is the finiteness results and the character of *effectivity* that attaches to the proofs by infinite descent. In that context, Fermat's infinite descent is a generalized Euclidean algorithm or a division algorithm in finite number fields and in finite function fields. The original idea of Fermat's infinite or indefinite descent appears in his 1670 commentary on Diophantus:

> *Eodem ratiocinio dabitur et minor istâ inventa per viam prioris, et semper in infinitum minores invenientur numeri in integris idem praestantes. Quod impossibile est quia, dato numero quovis integro, non possunt dari infiniti in integris illo minores*
>
> (Fermat 1891).

I translate the last quotation as :

> « By the same calculation it is supposed that a smaller number is found in a descending procedure and that one can always find numbers smaller than the preceding one *ad infinitum*, which is impossible, since for an arbitrary integer there cannot be found an infinity of smaller ones in integers. »

Let us remark that the method of infinite descent can be applied to a variety of problems, starting with the proof of the irrationality of $\sqrt{2}$ or the impossibility of

$$x^4 + y^4 = z^2$$

for all $z > 0$ and and $x, y \neq 0$. Infinite or indefinite descent is, in fact, finite ; it does not transcend the finite and the *reductio ad absurdum* is innocuous here, since the ensuing double negation is finitary. The finiteness of the procedure is still more evident when it is applied to "positive" questions, as Fermat says. Take the theorem : « Any prime number which is greater than a multiple of 4 by one must be composed of two squares ». If there was such a prime number greater than a multiple of 4 by one, but which would not be composed of squares, there would be a smaller one of the same nature and still smaller ones till one reaches 5, which is the smallest number having the said property. One must then conclude that the theorem is true. What we have here is simply a generalization of Euclid's division algorithm, but it has been used variedly from Fermat to contemporary arithmetic geometry as a proof-theoretical device of reduction (Legendre's term), Kronecker's elimination theory or decomposition of forms (homogeneous polynomials) in divisor theory and diverse descent techniques as in Grothendieck's programme (see my forthcoming paper *Gauthier 2013* for details). Of course, not all those techniques are effective, even in number theory, that is, they do not necessarily provide calculations with explicit bounds. In some cases, like in n-category theory (infinity or ω-categories), descent can be encapsulated as a fly down escape from the ether of higher-dimensional categories, the totality of which live in the Ω-universe of all ordinals – described by Cantor as an absolutely inconsistent plurality « *eine absolut inkonsistente Vielheit* ». But even without the Ω totality of universes, categorical foundations still need an inaccessible cardinal of higher set theory, that is transfinite induction beyond ε_0, as V. Voevodsky admits in his univalent foundations for homotopy type theory (see *Voevotsky 2010*). The same is true for Martin-Löf intuitionistic (or so-called constructive) type theory with dependent or contextual types together with the program proof assistant Coq also needed in Voevotsky's categorical foundations. However, descent is still lurking in the background under the clothings of the axiom of foundation introduced by von Neumann for the cumulative rank structure of axiomatic set theory. S. Mochizuki (*2012*) is keen on keeping the axiom of foundation as a descent procedure in the set-theoretic foundations of his ambitious programme of inter-universal geometry for the putative proof of the so-called *ABC* conjecture in number theory.

I would qualify such foundational programmes as *descriptive* – like in descriptive set theory – as opposed to *reductive* foundational programmes ; I mean that foundations should incorporate a critical evaluation and a justification for mathematical practice hopefully within mathematics itself with a minimal (constructivist) philosophy, not just a unifying language, may it be mathematical, logical or philosophical. Although descriptive theories may have a computational or algorithmic intent, as in Voevedsky's univalent foundations or in Mochizuky inter-universal geometry, the abstract or general framework in higher category theory or higher topos theory, which both need transfinite induction (and recursion), is not constructive or so feebly constructive that the computational output seems to be a by-product, rather than a natural outcome of the theory – the algorithmic results are most of the time grounded on polynomial arithmetic as a basis for higher (alien) structures or creatures ! Note that the *abc* conjecture mentioned above has been demonstrated for polynomials constructively, that is by elementary (non-analytic) means.

2. THE INTERNAL LOGIC

The logical outcome of this can be stated in a few words : both disjuncts in number theory must have a number-theoretic content, while intuitionistic logic requires only that one of the disjuncts be instantiated in order that a disjunction may have a truth-value or rather a verification value – the same for the existential quantifier. What our example shows is that a constructivist logic must be dependent upon an external resource, a numerical content, in order to be effective in arithmetic. This means that the logic is derived and comes after or is posterior to what Hilbert called *inhaltliches logische Schliessen*, a terminology I have translated as « internal logic » (see Gauthier 2002 for details). Formal logic, in Hilbert's view, was an external metamathematical means *äusseres Handeln* to treat the internal logic of mathematical theories or the inferences pertaining to mathematics proper, not to the metamathematics or the proof theory of formal systems.

But if we follow Hilbert's lead, formal logic must depend upon mathematics' inner workings and Brouwer, who is not a Hilbertian mathematician by any means, would follow suit and concur by saying that the excluded middle principle is not admissible particularly in the mathematical analysis of infinite sequences or infinitely proceeding sequences (of natural numbers). Kolmogorov was well aware of the significance of intuitionistic logic which he interpreted as a logic of problems (and solutions) and he made a distinction between real mathematics and the classical mathematics of pseudo-truth (*pseudoistinosti*) where transfinite induction is operative. Problems, in Kolmogorov's mind, are essentially well-posed mathematical problems, since in the Hilbertian spirit, they must have a solution. We know that Brouwer was suspicious of logic and we could ask if intuitionidtic logic, following Heyting and his successors, is faithful to Brouwer's original intent. I give only one example or counterexample in line with Brouwer's practice, the attempt to confound Gentzen's transfinite induction with Fermat's infinite descent; the former is designed to provide a consistency proof for Peano arithmetic while the latter is a constructive method of proof in classical number theory, from Fermat, Euler, Gauss, Lagrange, Legendre, Kummer, Kronecker to contemporary number theory and algebraic-arithmetic geometry in the hands of Mordell, Hermann Weyl, André Weil, Gert Faltings among others.

3. DESCENT OR DESCENDING INDUCTION

Infinite descent in classical number theory from Fermat to Kronecker and Weil is not infinite descent in the set-theoretic setting of an infinite set of natural numbers. It is in fact a finite arithmetical procedure that has little to do with the transarithmetical process of transfinite induction.

As A. Baker explains in in his major work on transcendental number theory (*Baker 1975*), Gel'fond's and Schneider's proofs proceed by construction of auxiliairy functions and polynomials and they then derive their results by induction on an arbitrary (finite) large integer n by assuming that if the result holds for $n-1$, it holds for all

n. In the same vein, J.-P. Serre defines descending induction as « acting on two (positive) integers m and N with $m > N$ descending to N» (see *Serre 2009*).For integers or numerical predicates, the procedure looks like

$$\begin{gathered} Ax_n \\ Ax_{n-1} \\ . \\ . \\ . \\ Ax_{n-(n-1)} \\ Ax_0 = Ax_{n-n}. \end{gathered}$$

Ax_n is what Bourbaki has called a general term. While classical infinite descent works with the descending sequence of finite ordinals (natural numbers), designated as *weak* well-ordering by Kreisel, transfinite induction calls for the *strong* well-ordering of transfinite ordinals up to ε_0 of Cantor's second number class. This well-ordering has to deal with the subsets of N. Here the logician must pick up a certain quantifier-free subset of the ordinal ω hierarchy, because he knows that the set of all countable ordinals of the ω's including the ε's is the uncountable ω_1 corresponding to the cardinal $\aleph_1$ – Cantor suggested that the continuum c was $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$. The power set of the set of natural numbers is significant in that connexion, since the well-ordering principle says

$$\forall S \subseteq N \quad S \neq 0 \wedge Ax\,(x \in S) \quad \rightarrow (\exists y < x \wedge y \in S),$$

that is, there exists a strictly decreasing sequence for all elements of the subsets of the set N of natural numbers. This is the *strong strict* well-ordering of N requiring the excluded middle on the power set of $P\,(N) = 2^{\aleph_0}$! Transfinite induction runs along an initial segment of the ω – sequence *beyond* the first ω up to its limit ε_0, while infinite descent starts with an arbitrary integer *n below* the first ω. Here is one main cleavage between finitist and infinitist proof theory, but Gentzen wanted to believe that classical infinite descent was a disguised form of complete induction in order to justify transfinite induction over the denumerable ordinals (see *Gerhard Gentzen 1969*)

Polynomials as the finite support of infinite power series are a natural generalization of natural numbers and provide with a finitist alternative, Fermat-Kronecker arithmetic, to set-theoretic Peano-Dedekind arithmetic. For polynomials of the form

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

in decreasing powers for integer coefficients *a's* and indeterminates *x's,* one works with their degrees (exponents or powers) and heights (the maximum of the absolute values of the coefficients) and the idea is to come down to irreducible polynomials, i.e. polynomials that cannot be factorized over the integers.

I have emphasized the finitist character of infinite descent and I want now to contrast it with the infinitist dimension of transfinite induction.

4. TRANSFINITE INDUCTION

The transfinite induction principle says:

$$\forall\sigma \quad (\forall\tau)\,(\tau < \sigma)\, A(\tau,x) \rightarrow A(\sigma,x) \quad \rightarrow \forall\sigma A(\sigma,x)$$

for σ and τ as ordinals in the ε_0 segment of Cantor's second number class defined by

$$\lim \omega = \varepsilon_0$$

where epsilon naught is the limit ordinal of the omega hierarchy with n tending to ω, the limit of finite natural numbers n. Infinite descent with a universal quantifier on the infinite set of natural numbers boils down to

$$\forall x \quad Ax \rightarrow \exists y\,(y < x)\, Ay \quad \rightarrow \forall x \neg A.$$

By successive transformations (classical equivalences and tautologies), I get

$$\forall x \neg Ax \vee \ \exists y Ay$$

and

$$(\neg \forall x \neg Ax \wedge \neg \exists y Ay) \vee \forall x \neg Ax$$

and by

$$(\neg \forall x \neg Ax) \ \leftrightarrow \exists x Ax$$

I get

$$\forall x \neg Ax \vee \exists x Ax$$

which is the excluded middle. What we end up with is a derivation of the excluded middle obtained from a double negation operation on the infinite set of natural numbers. The excluded middle principle is prohibited in general and specifically in non-finite situations. Kolmogorov thought that the principles of excluded middle and double negation were involved in some forms of transfinite induction (*Kolmogorov 1925*, p. 666-667). The fact that intuitionists after Heyting (see Troelstra and van Dalen 1988) accept complete induction on the infinite set of natural numbers

$$\forall x \quad \forall y\,(y < x)\; Ay \rightarrow Ax \quad \rightarrow \forall x Ax$$

leads them naturally to accept transfinite induction, which is just complete induction on ordinals up to ε_0. A similar exercise can be made with the smallest number principle (equivalent to infinite descent as classically interpreted, but not intuitionistically valid)

$$\exists y\, Ay \rightarrow \exists y \quad Ay \wedge \forall z\,(z < y) \neg Az \quad .$$

By substituting $\neg$ *Ay* to *Ay*, we have

$$\neg \exists y \quad Ay \wedge \forall z\,(z < y) \rightarrow Az$$

and I obtain by classical equivalences and MP (*Modus Ponens*)

$$Ay \quad \neg Ay \wedge \forall z\,(z < y \rightarrow \neg Az)$$

and

$$\forall y \quad \forall z\,(z < y \rightarrow \neg Az) \quad \rightarrow Ay$$

and

$$\forall y\, \neg Ay$$

which is the consequent of infinite descent (on the set of natural numbers) derived from Peano's induction postulate

$$\forall y Ay \quad A0 \rightarrow (\forall y Ay \rightarrow ASy) \quad \rightarrow \forall y Ay$$

and the induction rule

$$A0 \text{ and } \forall y Ay \rightarrow Asy$$

by MP.

5. CONCLUSION : A FINITIST LOGIC FOR CONSTRUCTIVIST MATHEMATICS

A simple idea for the internal logic of finite arithmetic is that such a logic should be arithmetical, that is, it should represent or translate the logic of arithmetic in arithmetical terms. The idea is to interpret logical operators, expressions and formulas in arithmetic and that arithmetic is polynomial arithmetic. Logic can be embedded in polynomial arithmetic, since it is a larger arena than integral arithmetic with all the arithmetic operations and it constitutes a field, in particular a finite field where infinite (indefinite or finite descent) can be freely enacted. The main advantage of the polynomial translation is that it is not simply an assignment of integers to logical expressions (like Gödel numbers), but a direct interpretation of logic in a purely arithmetical syntax. Such a direct translation would look like the following :

$$
\begin{aligned}
a \quad b &: = a \times b \\
a \quad b &: = a + b \\
\neg\, a &: = \text{for } 1 - a \\
a \rightarrow b &: = 1 - a + b \\
\exists x &: = \textstyle\sum(a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots,\ a_\mathrm{n}) \\
\forall x &: = \textstyle\prod(a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots,\ a_\mathrm{n}) \\
\text{王} x &: = \textstyle\prod(a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots,\ a_\mathrm{n},\ \ldots)
\end{aligned}
$$

Remarks : The new quantifier $\text{王} x$ is meant to express quantification over the unlimited sequence of natural numbers or Brouwer's infinitely proceeding sequences beyond the finite sets subjected to the classical quantifiers. A way to formalize infinite descent in Fermat-Kronecker arithmetic would be to use the unlimited or « effinite quantifier » in the following formulation :

$$\text{王} x\ \{([Ax \quad \exists y\ (y < x)\ Ay] \rightarrow \exists y\ \text{王} z\ (z < y)\ Az\} \rightarrow \text{王} x\ \neg\ Ax$$

which is the « negative » version of infinite descent. This means unlimited or indefinite quantification on an arbitrary sequence (not an infinite set) of natural numbers. The positive formulation looks like this :

$$
\begin{gathered}
\text{王} x\ \{[Ax \quad \exists y\ (y < x)\ Ax] \rightarrow \exists y \forall z\ (z < y)\ Az) \rightarrow \\
\exists z\ (z = 0 \vee 1 \vee n)\ Az\} \rightarrow \text{王} x\ Ax
\end{gathered}
$$

and it means that a descent could stop at 0 or 1 or any positive integer (like 5) in order to give way to an unlimited number of solutions for diophantine equations, for example. This quantification is not bounded quantification, nor quantification in predicative arithmetic *à la* Nelson, it just reveals a formal contrast to Peano's induction postulate or complete induction on the (completed) infinite set of natural numbers.

The numerical expression '1' refers to the unlimited arithmetical universe. The arithmetical expression $1 - a$ stands for a *local* negation in stead of the set-theoretic topological relative complement. Such a logic could be called a modular polynomial logic if we add a *Modus Ponens* in the form of

$$1 - a_0x \equiv b_0x \pmod{a_0x}$$

where a_0x and b_0x are monomials (see *Gauthier 2010* for details) and from the point of view of Gentzen's sequent calculus, the cut rule equivalent to *MP* is innocuous, since it is *modular*, that is, taken into account and then discarded in a pure (cut-free) equational calculus. Such a calculus is a calculus of polynomial content and could be considered as an internal logic for for Kronecker's theory of forms in his general arithmetic.

The arithmetical logic I have sketched should be finitely decidable – the theory of finite fields is decidable. Of course, the arithmetic in question is not Peano arithmetic (or Dedekind-Peano) with its induction postulate on the denumerable set of natural numbers, but rather Fermat-Kronecker arithmetic with infinite descent substituting for infinite induction and acting on forms, that is the homogeneous polynomials with integer coefficients and indeterminates of Kronecker's general arithmetic (*allgemeine Arithmetik*).

After the arithmetization of analysis by Cauchy and Weierstrass – one can include also Dedekind and Cantor – and the arithmetization of algebra by Kronecker, my contention is that Hilbert has inaugurated the arithmetization of logic pursued in the work of Skolem, Gentzen and Gödel and particularly active in contemporary theoretical computer science after Turing.

As far as number theory is concerned, the Gel'fond-Schneider theorem is a revealing instance of constructive proofs. Liouville's and Lindemann's proofs on the existence of trancendental numbers were not constructive, Dirichlet's analytical proof on the infinity of prime numbers in arithmetic progressions had to wait for the 1949 Selberg's constructive proof. The French logician and number-theorist Jacques Herbrand, a follower of Hilbert, even formulated a general hypothesis to the effect that theorems in non-analytic (elementary) number theory must have a non-analytic. i.e. constructive proof (*Herbrand 1968*). It is an intrinsic feature of transcendental number theory that the existence of transcendental numbers is only negatively or indirectly demonstrated by *reductio ad absurdum*, but direct elementary proofs provide more information on the content of a theorem in the case of constructive mathematics and more so in finitist foundations. The emphasis is on what Hilbert called «*Sicherheit*» and «*Sicherung*», certainty or certification of the tools and means of the mathematician or the logician who wants to count on more information in order to rely on the concrete proof procedures at work in constructivist mathematics and its internal logic.

REFERENCES

1. Baker, A. 1975. *Transcendental Number Theory*, London : Cambridge University Press.
2. Dummett, M. 2000. *Elements of Intuitionism*, Oxford : Clarendon Press.
3. Fermat, P. de. 1894. *Oeuvres,* vol. 2, Paris : Gauthier-Villars.
4. Gauthier, Y. 1994. Hilbert and the Internal Logic of Mathematics, *Synthese*, 101 : 1-14,
5. Gauthier, Y. 2002. *Internal Logic. Foundations of Mathematiccs from Kronecker to Hilbert*, Dordrecht/Boston/London : Kluwer.
6. Gauthier, Y. 2010. *Logique arithmétique. L'arithmétisation de la logique*, Québec : Presses de l'Université Laval.
7. Gauthier, Y. 2011. Hilbert Programme and Applied Proof Theory, *Logique et Analyse,* 213 : 40-68.
8. Gauthier, Y. 2013. Kronecker in Contemporary Mathematics. General Arithmetic as a Foundational Programme, *Reports on Mathematical Logic*, vol. 48, (2013), 3765.
9. Gel'fond, A. O. 1934a. Sur le septième Problème de Hilbert, *Comptes Rendus Acad. Sci. URSS, Moscou* 2 : 1-6.
10. Gel'fond, A. O. 1934b. Sur le septième Problème de Hilbert, *Bull. Acad. Sci. URSS Leningrad* 7 : 623-634.
11. Gel'fond, A. O. and Linnik, Y. V. 1965. *Elementary Methods in Analytic Number Theory* : Rand McNally and Co.

12. Gentzen, G. 1969 *Collected Papers*, ed. by E. Szabo, Amsterdam : North-Holland.
13. Herbrand, J. 1968. *Écrits logiques*, ed. by J. van Heijenoort, Paris : PUF.
14. Kolmogorov, A. N. 1925. O Prinzipe tertium non datur, *Matematicheskii Sbornik,* 32 : 646 667.
15. Kreisel, G. 1960. Ordinal logics and the Characterization of Informal Concepts of Proof, *Proceedings of the 1958 International Congresss of Mathematicians*, Cambridge : Cambridge University Press : 289-299.
16. Kronecker, L. 1968. Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen, *Werke*, vol. III, ed. by K. Hensel, 5 vols., Chelsea, New York, 1968, p. 245-387.
17. Kronecker, L. 1968. Zur Theorie der Formen höherer Stufe, *Werke*, vol. II, ed. by K. Hensel, 5 vols., Chelsea, New York, p. 419-424.
18. Mochizuki, S. 2012. Inter-universal Teichmüller Theory IV. Log-volume Computations and Set-theoretic Foundations. *Homepage of S. Mochizuki,* August 2012.
19. Schneider, T. 1934a. Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen, *J. reine angew. Math.* 172 : 65-69.
20. Schneider, T. 1934b. Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen. II, *J. reine angew. Math.* 172 : 70-74.
21. Serre, J.-P. 2007. How to use finite fields for problems concerning infinite fields. *Proc. Conf. Marseille-Luminy*, *Cont. Math. Series, AMS.*
22. Troelstra, A.S. and van Dalen, D. 1988. *Constructivism in Mathematics. Vol. 1*, Amsterdam : North-Holland.
23. Troelstra, A. S. 2003. *Constructivism and Proof Theory,* ILLC, University van Amsterdam.
24. Voevodsky, V. 2010. Univalent Foundations Project. *A modified version of an NSF grant application. October 1, 2010.*
25. Weil, A. 1941. On the Riemann Hypothesis in Function Fields. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **27**(1941) : 345-347.
26. Weil, A. 1984. *Number Theory. An Approach Through History. From Hammourabi to Legendre*, Basel : Birkhaüser.

CHAPITRE 19

Commentaire de « On Cantor's Normal Form Theorem and Algebraic Number Theory »

Dans cet article technique publié dans *International Journal of Algebra*, vol. 12, 2018, no. 3 p. 133-140, j'ai voulu montrer les limites de la forme normale que Cantor introduit dans son article de 1874 sur « Une propriété de l'ensemble des nombres algébriques réels »

$$a_0\, \omega^{\,n} + a_0\, \omega^{\,n-1} + \ldots + a_n = 0$$

pour définir un polynôme sur les ordinaux transfinis de la deuxième classe de nombres

$$\alpha = \omega^{\alpha 0}\, x_0 + \omega^{\alpha 1}\, x_1 + \ldots + \omega^{\alpha t}\, x_t$$

avec des coefficients entiers x et les omégas avec leur limite

$$\lim \omega = \varepsilon_0.$$

Pour Cantor, il s'agissait de caractériser par un polynôme ordinal l'ensemble dénombrable (de cardinalité $\aleph_0$) de tous les nombres algébriques. La formule générale de ce polynôme serait

$$pr(\gamma) = pr\,(\alpha)^{\,pr(\beta)}$$

pour la représentation des puissances (exposants) du polynôme *pr* avec des nombres ou quantités algébriques indéfinies α, β, γ (comme aurait dit Kronecker).

J'utilise alors le théorème de Gel'fond-Schneider – exposé dans un autre article de ce recueil « A Note on the Internal Logic of Constructive Mathematics. The Gel'fond-Schneider Theorem in

Transcendental Number Theory » qui est une solution du $7^{\text{ième}}$ problème de Hilbert : pour deux nombres algébriques α et β avec $\alpha \neq 0, 1$ et β un nombre irrationnel, α^β est un nombre transcendant, ce qui contredit Cantor doublement, puisque la représentation en puissances du polynôme ordinal contient des nombres transcendants, donc non algébriques, qui en plus débordent le cadre dénombrable, puisque les nombres réels transcendants constituent un ensemble non dénombrable de cardinalité $2^{\aleph_0}$.

Dans un deuxième temps, j'ajoute un théorème de mon crû sur les nombres p-adiques qui ont été introduits par Kurt Hensel, un élève et disciple de Kronecker.

Théorème : Le nombre premier infini p^∞ ne peut être représenté dans le polynôme ordinal de la forme normale de Cantor pour les nombres transfinis de la seconde classe de nombres, les omégas avec la limite epsilon zéro

$$\lim \omega = \varepsilon_0.$$

La preuve repose sur le fait mathématique que le segment final $\{0, p^\infty\}$, comme l'est d'ailleurs le segment final $\{0, \omega\}$, n'est pas exprimable ou représentable par l'ordinal polynomial de Cantor, même si l'ensemble des nombres premiers infinis – on dit aussi *places* premières infinies – est dénombrable, et bien que l'anneau $\mathbf{Z}_p$ des nombres premiers p-adiques et que le corps $\mathbf{Q}_p$ des nombres premiers fractionnaires soient des ensembles non dénombrables, l'ensemble $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ est dénombrable en tant que corps des nombres algébriques $\mathbf{F}$, une extension finie de $\mathbf{Q}$.

Pour rendre la preuve plus concrète ou pour illustrer le théorème, considérons l'entier premier infini comme un ordinal premier infini (ou transfini), ce qui est parfaitement légitime en théorie des ensembles transfinis, puisque ω peut être vu comme un nombre premier ; allons plus loin et prenons l'entier premier infini $p^\infty = \varepsilon_0$ la limite des ω qui est aussi un ordinal dénombrable qui a la forme $\varepsilon = \omega^\varepsilon$; on peut donc écrire $\{0, p^{\varepsilon_0}\}$ comme segment final non représentable ou expressible dans l'ordinal polynomial de la forme normale de Cantor, puisque ε_0 n'est pas lui-même réductible à la forme normale. Il s'agit d'un point fixe où une fonction croissante stoppe f(x) = x, un phénomène bien connu en mathématiques et la logique en a hérité. On peut faire la comparaison avec l'ordinal dénombrable de Church-Kleene noté ω_1^{CK} qui est le plus petit ordinal non récursif, c'est-à-dire qu'il n'est pas défini par la récursion sur des ordinaux plus petits qu'on dit constructifs. Notons que cet ordinal dénombrable est plus *petit* que ω_1, le premier ordinal non dénombrable et qu'il sert essentiellement à la notation descriptive des ordinaux dits constructibles, les ordinaux plus grands sont par définition *indescriptibles* – les grands cardinaux correspondants sont eux aussi indescriptibles et même pour certains, ineffables ou indicibles[2]. D'autres nombres, comme les nombres surréels de Conway ne sont pas assujettis à la forme normale de Cantor selon l'application (fonction) exponentielle x ω^{x}, mais les nombres surréels (comme les nombres surnaturels de Steinitz) n'ont pas la même *présence* ou portée mathématique que les nombres p-adiques dans les mathématiques actuelles. Seuls les nombres hyperréels (infinitésimaux) de l'analyse non standard peuvent prétendre à un statut formel comparable à l'analyse p-adique qui partage d'ailleurs certains concepts avec l'analyse non standard comme une métrique ou ultramétrique non archimédienne. Il y a bien d'autres créatures exotiques en théorie des ensembles (et en théorie des catégories) ou dans la théorie des mondes possibles (logique modale qui n'ont pas de statut précis en mathématiques et qui sont en attente d'une possible actualisation après leur expulsion du ciel platonicien des entités transcendantes…

La conclusion de l'article souligne la différence fondamentale (et fondationnelle) de la théorie polynomiale de Kronecker et de la théorie arithmétique transfinie de Cantor. Kronecker s'est limité aux polynômes de degré fini dans son arithmétique générale, ce qui lui a permis d'*arithmétiser* la théorie des nombres algébriques. Cantor pensait contenir tous les nombres algébriques dans son arithmétique transfinie, alors que Kronecker a pu les générer dans sa théorie des formes (polynômes homogènes) d'ordre supérieur dans son texte de 1882 (cité en référence 11) et dans celui de 1883[2]. Et même si son disciple Hensel s'est permis de construire une théorie des polynômes de degré infini pour les nombres p-adiques, l'héritage de Kronecker en théorie algébrique des nombres limite radicalement la portée de la théorie des ensembles transfinis de Cantor.

NOTES

1. J'ai décrit cette escalade des grands cardinaux de la théorie des ensembles dans de nombreux travaux, le premier étant *Fondements des mathématiques. Introduction à une philosophie constructiviste* (PUM, Montréal, 1976).
2. Le texte de 1883 «Zur Theorie der Formen höherer Stufen» est cité dans l'article de ce recueil «The Use of Infinity in Pure Number Theory and Algebra», référence 12.

On Cantor's Normal Form Theorem and Algebraic Number Theory

Summary. Cantor introduced his normal form theorem as an ordinal polynomial for the countable ordinals of the second class up to the first epsilon number ε_0. Cantor believed that the normal form was a unique representation of real algebraic numbers. The Gel'fond-Schneider theorem is a counterexample to the normal form theorem, as it exhibits a transcendental number in the power representation of algebraic numbers. The theory of p-adic numbers provides another counterexample insofar as it comprises infinite p-adic numbers not expressible in the ordinal polynomial.

AMS Subject classification: 03E10, 11C08, 11D88, 11J04.

Keywords: Cantor's normal form, algebraic numbers, Gelfond-Schneider theorem, p-adic number theory.

1. INTRODUCTION

In his early set-theoretic paper of 1874 « On a property of the set of all real algebraic numbers » (*Über eine Eigenschaft des lnbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen*) – see (Cantor [3]115-118) – Cantor introduces the irreducible polynomial

$$a_0 \,\omega^{n} + a_1 \,\omega^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

for integers n, a_0, a_1, $\ldots$, a_n and real algebraic numbers ω and comes up with his own proof for the existence of transcendental numbers: since there is a bijection between algebraic numbers and natural numbers, the set of algebraic numbers is countable and since the set of real numbers is not (by the diagonal proof), there is an uncountable infinity of non-algebraic, i.e. transcendental numbers. This theorem, which he had discussed at length with Dedekind and to whom he is indebted, is for Cantor a new proof of the existence of transcendental numbers. But Cantor is satisfied with the "negative" existence of transcendental numbers : real numbers are more numerous than natural numbers and one can say that most reals are transcendental (see Baker [1]). In his last papers on transfinite set theory (*Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*), Cantor (see [3], 341) defines a normal form for the ordinals of the second class of numbers

$$\alpha = \omega^{\alpha 0}\, x_0 + \omega^{\alpha 1}\, x_1 + \ldots + \omega^{\alpha t}\, x_t$$

the ω*'s* being this time transfinite ordinals with

$$\lim \omega = \varepsilon_0.$$

Cantor claims for this normal form a unique representation of transfinite ordinals up to ε_0 which constitute a countable set as the set of (real) algebraic numbers. One can generalize Cantor's normal form in the formula

$$pr(\gamma) = pr\,(\alpha)^{\,pr(\beta)}$$

for *pr* meaning polynomial power representation and α, β, γ undefined algebraic quantities (algebraic numbers, real and complex). We then have the Gel'fond-Schneider theorem as a counterexample.

2. THE GEL'FOND-SCHNEIDER THEOREM

The Gel'fond-Schneider theorem is a solution to Hilbert's 7th problem

For α and β algebraic numbers with $\alpha \neq 0, 1$ and β irrational, α^β is transcendental.

In Schneider [13], it is put in the form :

Theorem 1. For ω an algebraic number $\neq 0,1$ and θ irrational, ω^θ is transcendental with $\theta = \log \eta / \log \omega$ for $\eta = \omega^\theta$.

Proof. The proof proceeds by logarithmic approximations to algebraic numbers and concludes that any logarithm of an algebraic number with an algebraic base must be a transcendental or a rational number. By *reductio ad absurdum*, ω^θ is transcendental. With a similar procedure, Gel'fond [9] comes to the conclusion that the logarithms of algebraic numbers with an algebraic base are transcendental or rational numbers. Both proofs are (partially) constructive in the sense that they extract arithmetical content (that is logarithmic approximations, minorizations and majorizations, effective bounds, etc.) from analytical methods (infinite series or power series, periodic functions, etc.); they use polynomial inequalities for the rational values of an analytic function $f(x)$ and end up by contradicting an assumption to the effect that finite values make it vanish identically $f(x) = 0$. K. Mahler [12] has applied the result in p-adic number theory on algebraic approximations to the exponential and logarithmic functions in the completion C_p of the algebraic closure of Q_p expressing p-functions in terms of polynomials and A. Baker [1] has extended and generalized those results in transcendental number theory using auxiliary functions or polynomials – which he calls fundamental polynomials –, linear forms and logarithms for approximations of algebraic numbers in Diophanitne equations in order to establish their algebraic independence by contradiction or *reductio ad absurdum.* Take for example the power expression for the algebraic number $\sqrt{2}$

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}} = \gamma$$

it is a transcendental number γ and therefore we have a counterexample to Cantor's normal form for an algebraic number

$$pr(\gamma) \neq pr(\beta)^{\,pr(\beta)}.$$

It is only in 1962 that Gel'fond produced an elementary (constructive) proof for real algebraic numbers ω, $a > 0$, b for c^{ω} and a^{b} (see Gel'fond and Linnik [10], chap. 12). Gel'fond relates that he used only Rolle's theorem as an analytical tool – here a constructivist mathematician could mention that a constructive version of Rolle's theorem is to be found in Bishop [2]. Essentially, Rolle's theorem states classically that a continuous function of a real variable on $[a, b]$ with $f(a) = f(b)$ for $a < b$ has a derivative $f'(c) = 0$. Bishop's constructive version introduces $|f'(x)| \leq \varepsilon$ with $\varepsilon > 0$ for moduli of continuity of f' and differentiability of f. In other words, Bishop defines more precisely the limits of the real interval $[a, b]$ much in the manner of Kronecker for Bolzano's theorem on intermediate values (see Gauthier [5] and [8]). However, Gel'fond's work is in analytic number theory and constructive number theory, not in constructive analysis. His results in transcendental number theory are algebraic in nature. The main theorem in Gel'fond and Linnik ([10] chap. 12) states that «if $\omega \neq 0$ is an algebraic real, than with e the base of natural logarithms

e^{ω} is not algebraic » and is couched in the language of algebraic integers in finite fields. A finite field is also the arena for an another elementary proof ([10] chap.10), Hasse's theorem on integral solutions for the equation :

$$y^2 \equiv x^3 + ax + b \ (\mathrm{mod}\ p)$$

for integers *a, b* and a prime $p > 3$. Gel'fond formulates his solution in terms of an inequality

$$|N - p\,| < 2\,\sqrt{\ } p$$

where N is the number of integral solutions of the equation. Here, the language used is the language of polynomials and divisors with an algebro-geometric interpretation and Gel'fond quotes a major result of André Weil on Riemann's hypothesis in function fields (see Weil [13]). Weil's result is a special case of the Riemann hypothesis for quadratic finite fields with a finite number of elements or points on a projective surface and Weil claims that his result is free of the transcendental theory, that is of analytic number theory. The main arithmetical tool here is the theory of forms or homogeneous polynomials. That theory has been developed first in great generality by Kronecker in his «*Allgemeine Arithmetik*» or general arithmetic (see Gauthier [7]) and Weil has repeatedly refered to Kronecker as the founding father of algebraic – arithmetic geometry on finite fields. Kronecker's theory of forms is equivalently a divisor theory (of modular systems) for which infinite descent works, since homogeneous polynomials are finite (integral and rational) functions with integer coefficients and indeterminates (variables).

3. HENSEL'S THEORY OF P-ADIC NUMBERS

Let us start with the well-known Hensel's lifting lemma.

Hensel's lemma simply states that if the polynomial $f(x) \in \mathbf{Z}p$ has a (simple) root $r \in \mathbf{Z}p$ which satisfies

$$f(r) \equiv 0 \ \mathrm{mod}\ p, f'(r) \quad 0 \ \mathrm{mod}\ p$$

where $f'(r)$is the arithmetic derivative $(r^n)' = r\ n'^{n-1}$, then there is a unique $s \in \mathbf{Z}\,/p\,\mathbf{Z}$ such that

$$f(s) \equiv 0 \ \mathrm{mod}\ p^{k+m} \text{ and } r \equiv s$$

for positive integers *k, m* with $k \leq m$.

One can now lift a root r of the polynomial $f(x)$ mod pk to the new root s mod $pk+1$ to the effect that the roots of mod pk are lifted to mod $pk+1$. For p-adic integers, one can write for the roots r and s the formula

$$s = r - f(r)/f'(r)$$

and the roots mod pk or higher powers of p are better and better approximations to a p-adic root. If we look at polynomials with integer coefficients a and indeterminates x

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

as *finite* formal power series with decreasing powers, we can see the indeterminate x becoming smaller and smaller meaning that it is the same modular process for the composition and the decomposition of approximations.

Hensel's lifting lemma is analogous to Newton's geometric (polygon) method for locating the real root of a differentiable function, but the algebraic approach with p-adic integers has the advantage of being constructive for it allows for a simple finite nonlinear calculus. The iterative process on powers constitutes progressively finer approximations since the initial congruence at level $k = 1$ is a linear approximation (of degree 1). The nonlinear ladder, quadratic $k = 2$ and higher degree polynomials in Kronecker's paper (see [11]) of algebraic integers can be ascended for the composition of congruences as in Hensel's lemma or descended in the decomposition of powers as in Kronecker's theory of forms. In both cases, a finite process of construction steps is of the essence, in Hensel's terms « a finite number of trials » (*eine endliche Anzahl von Versuchen*), an expression he used to characterize Kronecker's finitist programme.

In his 1897 paper on a new foundation of the theory of algebraic numbers (*Über eine neue Begründung der Theorie der algebraischen Zahlen*) [4], Hensel introduces his theory of p-adic numbers by emphasizing the analogy between the theory of algebraic functions of one variable and the theory of algebraic numbers following in the footsteps Kronecker's major work [11]. Hensel puts down two formulas as the foundations of his theory

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = a_0(x - x_1) \ldots (x - x_n)$$

and

$$F(x) \equiv 0 \pmod{p^M}$$

for M the power of prime p. His idea is to associate ramification points of an algebraic function to (rational) ramification places of a prime polynomial in a locally finite field. Hensel's intention was to use infinite power series in arithmetic while Kronecker insisted that one does not need the full formal power series beyond (homogeneous) polynomials of finite degree. However p-adic number theory involves infinite degree polynomials in an algebraic number field F, a finite extension of the rational field Q. We denote an infinite prime p as p^∞. In that context, we can formulate the following proposition

Theorem 2. *The infinite prime p^∞ cannot be represented in the ordinal polynomial of Cantor's normal form for transfinite numbers of the second class up to ε_0.*

Proof. An infinite prime p^∞ is a p-adic valuation

$$\mathrm{v}_p : \mathbf{Z} \rightarrow \infty$$

defined as

$$v_p\,(n) = \max : \{v \in \mathrm{N} : p^v/n\} \text{ if } n \neq 0, \text{ otherwise } \infty \text{ if } n = 0$$

where v is the highest exponent for p^v to divide n and Hensel lemma comes in to lift p to any finite power. From a set –theoretic point of view, the set

$$\{0\, p^\infty\}$$

is a final segment of the well-ordered set of the ω's in the second number class. Since there is a countably infinite set of infinite primes over p^∞ and although $\mathbf{Z}_p$, the ring of prime integers and $\mathbf{Q}_p$ the field of fractional prime numbers are both uncountable sets, the set $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ is countable and must be counted as belonging to Cantor's second class of ordinals up to ε_0, which itself contains a countably infinite set of primes in the sequence of the ω's. But the final segment $\{0, p^\infty\}$ is not expressible as an isomorphism type in that sequence since its order type is incomparable or irreducible to any n and is therefore not representable in Cantor's normal form.

4. CONCLUSION

The results of this paper show the limitations of the set-theoretic expressive power of Cantor's normal form. Kronecker, the harsh opponent to Cantor's transfinite arithmetic, seems to be vindicated here for he has a proposed a general arithmetic (*allgemeine Arithmetik*) of polynomials with integer coefficients and indeterminates in the form

$$\mathrm{P} = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1} + b_n$$

for a finite sum of finite powers

$$\Sigma\, b^n x_n$$

instead of the sum

$$\Sigma\, \omega^\alpha z_\alpha$$

for Cantor's transfinite ordinals. Kronecker's idea was to give an arithmetical foundation of algebraic quantities (*algebraische Grössen*) and his indeterminates were dummy variables to be replaced by real quantities. Kronecker had credited Gauss for the introduction of indeterminates (*indeterminatae*) and later usage has dubbed them *transcendentals* or *infinites* (see Weil [14]). Hensel, who was a student of Kronecker like Cantor (for a little while), has extended Kronecker's ideas into p-adic number theory in the same arithmetical-algebraic spirit. Hermann Weyl in his *Algebraic Number Theory* book of 1949 (see [16]) has stressed the foundational significance of Kronecker's algorithmic approach over Dedekind's ideal theory and Hensel points out that he has laid down his new foundation of algebraic number theory independent of ideal theory. André Weil on his side has made good of Kronecker's programme in his own work in number theory and algebraic geometry (see [15]). The morale of this story, if need be of any morale, might be an indication of the preeminence of algebraic number theory over transfinite set theory in the constructivist foundations of mathematics and mathematical logic. While the set-theoretical model theory and proof theory of classical logic uses profusely (see Gauthier [6]) transfinite induction on ordinals as being part and parcel of the Cantorian tradition, the more arithmetical and algebraic constructivist approach in mathematics and logic should profit from the Kroneckerian heirdom in the logico-arithmetical foundations of mathematics.

REFERENCES

[1] Baker, A.,*Transcendental Number Theory*, Cambridge University Press, London, 1987.

[2] Bishop, E., *Foundations of Constructive Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1968.

[3] Cantor, G., *Gesammelte Abhandlungen*, E. Zermelo (ed.), Georg Olms Verlag, Hildesheim, 1966.

[4] Hensel, K., « Über eine neue Begründung der Theorie der algebraischen Zahlen », *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **6** (3) : 83-88.

[5] Gauthier, Y., *Internal Logic. Foundations of Mathematics from Kronecker to Hilbert,* Kluwer, Dordrecht/Boston/London, 2002.

[6] Gauthier, Y. « Classical Function Theory and Applied Proof Theory », *International Journal of Pure and Applied Mathematics* », **56**, no.2 (2011) : 223-233.

[7] Gauthier, Y. « Kronecker in Contemporary Mathematics. General Arithmetic as a Foundational Programme », *Reports on Mathematical Logic*, **48** (2013) : 37-65.

[8] Gauthier, Y., *Towards an Arithmetical Logic. The Arithmetical Foundations of Logic*, Birkhäuser/Springer, Basel, 2015.

[9] Gel'fond, A. O., « Sur le Septième Problème de Hilbert », *Comptes Rendus Acad. Sci. URSS,* Moscou **2** (1934) : 1-6.

[10] Gel'fond, O. and Linnik, U. V. *Elementary Methods in Analytic Number Theory*, Rand McNally and Co., 1965.

[11] Kronecker, L., « Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen », in *Kroneckers Werke*, K. Hensel (ed.), vol. III (1968), Teubner, Leipzig.

[12] Mahler, K., «An interpolation series theorem for continuous functions of a *p*-adic variable », », *J. reine angew. Math.* **199** (1958) : 29-34.

[13] Schneider, T., « Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen », *J. reine angew. Math.* (i : 65-69) and (ii :70-74), **172** (1934).

[14] Weil, A., « L'arithmétique sur les courbes algébriques » in *Œuvres scientifiques*. *Collected Papers*, vol. I, 11-45, Springer-Verlag, New York, 1979.

[15] Weil, A., « Number Theory and Algebraic Geometry » in *Œuvres scientifiques*. *Collected Papers*, vol. III, 442-452, Springer-Verlag, New York, 1979._

[16] Weyl, H., *Algebraic Number Theory*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1940.

CHAPITRE 20

Commentaire de « Numerical Existence Property and Numerical Content. Intuitionistic Logic versus Arithmetical Logic »

Ce texte doit paraitre dans sa version *LaTeX* dans un prochain numéro de la revue brésilienne SAJL *South American Journal of Logic* (vol. 5, issue 1, July 2019, p. 1-19). L'article consiste en une comparaison ou confrontation entre la logique intuitionniste et la logique arithmétique que j'ai construite au fil des années dans le cadre de la logique interne de l'arithmétique. La logique intuitionniste a des exigences spéciales pour la disjonction $A \vee B$ et $\exists x A x$ pour le quantificateur existentiel : en l'absence du tiers exclu de la logique classique, il faut trouver lequel des membres de la disjonction a la valeur de vérité 1 ou est prouvable et pour le quantificateur existentiel, il fut aussi avoir trouvé une instance ou un exemplaire $A(t/x)$ pour asserter $\exists x A x$.

La logique et l'arithmétique intuitionnistes prétendent au contenu numérique pour la disjonction et le quantificateur existentiel, mais à quel prix et à quelles conditions ? Les conditions de réalisabilité comme S.C. Kleene les a formulées font appel à des témoins numériques n et m dans les nombres naturels pour la validation des énoncés. C'est dans l'arithmétique formalisée qu'on introduit les fonctions récursives à la suite de Gödel (et de Herbrand). Dans le cas de Gödel et de son premier théorème d'incomplétude les numéraux ou nombres naturels pour le codage des formules de l'arithmétique de Peano (AP arithmétique ensembliste de cardinalité infinie dénombrable $\aleph_0$) requièrent évidemment les fonctions récursives énumérables. Mais la notion de réalisabilité de Kleene n'est pas exprimable dans l'arithmétique de Heyting (AH^{ω} avec oméga le premier ordinal infini), puisque est en jeu l'ensemble des fonctions récursives partielles ou des fonctionnelles de type fini comme dans l'interprétation *Dalectica* de Gödel. Cette situation rappelle la situation de la forme normale de Cantor dans laquelle le segment final $(0, \omega)$ n'est pas exprimable ou représentable – voir mon article article *Cantor's Normal Form Theorem and Algebraic Number Theory* dans ce volume. Cela signifie que la propriété d'existence numérique n'est pas suffisante pour produire un contenu numérique concret en vertu de la multiplication des témoins propriétaires d'indices récursifs jusqu'à l'ordinal ω_1^{CK} de Church-Kleene qui comprend l'ensemble infini dénombrable des ordinaux récursifs dans le cadre ensembliste de AP et de AH (qui admet ω et sa suite…).

En contrepartie, je montre que la notion de négation locale est une notion plus forte que la fausseté constructible de D. Nelson, J'utilise ici la version de Y. Gurevich qui avec son signe *moins* permet une interprétation du faux constructible de D. Nelson avec la notion de réalisabilité de Kleene pour la négation

$$\neg A \supset 1 = 0$$

et

$$— A \supset (A \supset B)$$

comme théorème de déduction ; la propriété de d'existence numérique n'est que postulée ici faute de témoins directs. La logique arithmétique fournit des témoins directs à congruence près, pourrait-on dire. La logique modulaire donne en effet un sens concret au phénomène de résiduation des logiques structurales et sous-structurales en appliquant une relation de congruence ne laissant aucun résidu comme dans la formule

$$C \equiv B \pmod{0} \text{ implique } C = B,$$

la relation de congruence arithmétique avec la relation d'égalité ayant priorité sur la relation d'équivalence ensembliste et sur le biconditionnel logique. La morale de cette histoire pourrait se résumer à la remarque d'Edward Nelson dans sa *Predicative Arithmetic* : la logique imprédicative comme l'arithmétique imprédicative avec un postulat d'induction complète sur les nombres naturels ne peut produire qu'une suite de témoins, de témoins de témoins *ad infinitum* sans témoignage direct ou immédiat, c'est-à-dire sans contenu numérique concret.

Numerical Existence Property and Numerical Content. Intuitionistic Logic versus Arithmetical Logic

Abstract. I examine claims of numerical existence for the intuitionistic disjunction and existential quantifier. I argue that those claims do not secure numerical content and that a polynomial translation of logical constants comes closer to a numerical language for mathematics in the framework of a "contentual" or internal logic of arithmetic.

Keywords. Intuitionistic disjunction and existential quantifier, numerical existence, numerical content, Kronecker's general arithmetic, modular polynomial logic.

1. INTRODUCTION

Intuitionistic logic and intuitionistic number theory have the disjunction property and the numerical existence property. The question is to what extent these properties imply a notion of numerical content. The objective of this paper is to evaluate the claims about the realizability conditions of numerical existence and offer an alternative to intuitionistic logic and number theory in terms of a modular polynomial logic exhibiting a direct translation of logical formulas into an arithmetical logic internal to classical arithmetic. The term classical arithmetic is meant here to be contrasted to the set-theoretical Dedekind-Peano arithmetic formalized as Peano Arithmetic (PA). Classical arithmetic is designated as Fermat-Kronecker (F-K) arithmetic for classical number theory from Fermat to Gauss to Kummer to Kronecker and beyond (see Gauthier [5]).

2. THE DISJUNCTION AND NUMERICAL EXISTENCE PROPERTIES

The disjunction and numerical existence properties are easy to formulate. For a disjunction $A \vee B$, intuitionistic logic requires that one of the disjuncts be true or provable and for an existential quantifier $\exists x\, Ax$, it requires to exhibit a term t free for x in $A\,[x/t]$ denoting an instantiating element or object not otherwise specified in the BHK (Brouwer-Heyting-Kolmogorov) interpretation of intuitionistic logic. S.C. Kleene ([11] [12]) had the idea of calling such an object a *realizer*, an arbitrary witness or numerical instance in a given coding system. Kleene's realizability interpretation of intuitionistic logic adjoins a number n to a *realizer* such that the disjunction $A \vee B$ needs a pair (n,m) with values in $\{0,1\}$ (for $0 = F$ and $1 = T$); for the existential quantifier, $\exists x\, Ax$ is realized by a pair (n,m), iff m is a realizer for $A(n)$.

The general setting of Kleene's realizability is the theory of partial recursive functions with recursive enumerability for which a partial recursive function is recursively realizable, iff some natural number n realizes it. This amounts to recursive enumerability for realized formulas in intuitionistic logic. For example, $\exists x\, Ax$ is proven, iff there is proof of Ax for some numeral x as in Gödel numbering. G. Kreisel has introduced a modified realizability interpretation, a typed variant with continuous functionals with the specific aim of reintroducing the notion of proof of a realized formula. H. Friedman ([3]) has shown in line with Kleene's work that realizability conditions allow to derive the numerical existence property in the set of axioms of a recursively enumerable extension T of Peano arithmetic where for the intuitionistic disjunction $A \vee B$, either A is a consequence of T or B is a consequence of T; for the existential quantifier, the numerical existence property stipulates that for each closed consequence $\exists x\,(Con(x))$ of T where x is a numerical variable, there is natural number n such that $Con(\tilde{n})$ is a consequence of T. All this is done within Peano arithmetic (extensions and fragments or substructures included) with the usual resources of recursive enumerability and set-theoretic machinery. However the realizability notion is not expressible in intuitionistic arithmetic HA^{ω} since it involves all recursive (partial) functions or functionals (of finite type). The situation is similar to the second number class in Cantorian set-theory for the sequence of natural numbers where the final segment $(0, \omega)$ is not expressible as an isomorphism type for its order type is incomparable or irreducible to any n in the ordinal polynomial of Cantor's normal form (see Gauthier [7]). All this means that the numerical existence property is not enough to produce numerical content, simply because logic is not arithmetic and that general computable functions do not generate feasible arithmetic or polynomial arithmetic the results of which can be computed in polynomial time.

3. THE NOTION OF NUMERICAL CONTENT

E. Bishop ([1]) has advocated the idea of mathematics as a numerical language. Here the author of the classic *Foundations of Constructive Analysis* deplores the fact that intuitionistic logic and mathematics are not constructive enough and a strict numerical interpretation of implication is needed simply because the usual

$$A \to B$$

amounts simply to the data of a proof of $A \to B$ effected by a construction which outputs a proof of A into a proof of B plus a proof of the said transformation wanting of any constructive information. It seems that Bishop was aiming at an existential instantiation for implication, but has been unable to provide with the right formulation and resorted finally to an appeal to Kronecker whom he considered closer to his foundational standpoint than was Brouwer. The proof-theorist U. Kohlenbach ([13]) claims that Gödel's functional interpretation of intuitionistic logic in Gödel ([8]) comes close to numerical content by the employment of primitive recursive functionals of finite type. Kohlenbach acknowledges though that the notion was already present in Hilbert's paper (Hilbert [10]), but he doesn't go back to Kronecker. I have shown that Hilbert was certainly inspired by Kronecker's own construction in (Kronecker [14]) and I have given the details of such a construction in (Gauthier [5], chap. 4).

4. LOCAL NEGATION

Negation is interpreted "negatively" in intuitionistic logic as Bishop would say:

$$\neg A \equiv A \to 0 = 1 \text{ (absurdity)}$$

and here he would lament the lack of numerical content. Gödel's interpretation in (Gödel [8]) comes to the same when he writes

$$\neg p \equiv p \supset \times 0 = 1.$$

The *Dialectica* interpretation can have a direct polynomial interpretation (see Gauthier [5], chap. 7.9) and negation could be defined as 1 – a on the pattern of relative complementation

$$a \to b = In\,((\mathrm{X} - a) \quad b$$

for a topological space X, its Interior of open sets and b. Now, one can translate this in a combinatorial formula

$$a \to b = C\,((2^n - a) + b$$

where C stands for combinations of integer coefficients a, b of the polynomial $(a_0x + b_0x)^n$ with a_0x standing for $2^n - a$ (2^n is here the finite arithmetical universe as the power set of n integers).

The minus sign also appears in Y. Gurevich's treatment (Gurevich [9]) of Nelson's constructible falsity (Nelson [15]) which is expressed in terms of Kleene's realizability notion

$$\neg\, A \supset 1 = 0.$$

For Gurevich's minus sign, one has

$$— (A \supset B) \equiv A \quad — B$$

$$— \neg\, (A) \equiv A$$

$$— A \supset \neg\, A$$

and a deduction theorem stating

$$— A \supset A \supset B.$$

Local negation in (Gauthier [4]) could be seen as a still stronger notion, the minus sign in a congruence relation being arithmetical while Gurevich's strong negation is logical and set in a Kripke model for Nelson's notion of constructible falsity couched in Kleene's recursive realizability style. There again numerical content is only postulated under an *apriori* numerical existence property. I present in the following a scheme inspired by Kronecker's theory of forms, his divisor theory for homogeneous polynomials. Such a scheme is intended to procure a direct access to numerical content in an arithmetical (modular polynomial) logic as the internal logic of arithmetic.

5. MODULAR POLYNOMIAL LOGIC

For the Kroneckerian background, I refer the reader to (Gauthier [5], chap.4). Here I only want to show how is effected a direct polynomial *eliminative* translation of logical constants by rewriting intelim rules of Gentzen's natural deduction system into a polynomial language. The unique identity axiom becomes the equality axiom $A = A$. There are also intelim rules and a polynomial translation for the *effinite* quantifier $\text{Ŧ}xAx$ as a quantification over an unlimited sequence of natural numbers.

Remark. In structural and substructural logics, the deduction theorem

$$A, B \mid- C, \text{ iff } A \mid- B \to C$$

Is also called *residuation* in the sense that A is a residue in

$$A + B = C, \text{ iff } A = C - B.$$

In those logics, the linear combinations of the premises are subjected to various complex rules to handle the residues. But in modular polynomial logic, the residue A is associated to a positive integer multiple n (An) via a congruence relation

$$C \equiv B \pmod{n}$$

meaning that $C - B$ is divisible by n, thus adding a direct numerical content to the notion of residuation. In the first three cases above (I$\wedge$), (E$\wedge$) and (I$\vee$), we could have added (mod 0) showing that the congruence relation leaves no residue or remainder, that is

$$C \equiv B \pmod{0} \text{ implies } C = B.$$

Our notion of congruence is arithmetical for modular polynomial arithmetic with integer coefficients in line with Gauss (who invented the concept) and Kronecker. The algebraic notion of congruence in structural algebraic logics does not subsume any numerical content. We show now how to eliminate logical constants in polynomial modular logic

5.1 The elimination of logical constants

The connectives of negation, disjunction, conjunction are directly eliminable by translation into the arithmetic interpretation since they can be viewed as difference, sum and product of polynomials in a finite number of terms (constants and indeterminates or variables). We have then

Proposition 1. Connectives are eliminable through direct translation in the polynomial interpretation.

Proof. Rewrite the logical rules as follows for the sequent calculus with Γ the antecedent and Δ the (single) consequent, both consisting of polynomials (monomials); we write for negation

$$\frac{\Gamma \cdot (a_0 x + \Delta)}{\Gamma \cdot \big((a_0 x + b_0 x) + \Delta\big)} \qquad \frac{\Gamma \cdot (b_0 x + \Delta)}{\Gamma \cdot \big((a_0 x + b_0 x) + \Delta\big)}$$

with Δ empty *i.e.* “without content” in this case, or multiplication by zero and the understanding that the line has the meaning simply of an ordered sequence of sequents (consisting of sequences of formulas themselves). It should be obvious that we have replaced the sign ∞ by the operation $>$ in order to have polynomial uniformization which does not alter the meaning of the rules;
for disjunction:

$$\frac{\Gamma \cdot (a_0 x + \Delta)}{\Gamma \cdot \big((a_0 x + b_0 x) + \Delta\big)} \qquad \frac{\Gamma \cdot (b_0 x + \Delta)}{\Gamma \cdot \big((a_0 x + b_0 x) + \Delta\big)}$$

and also

$$\frac{(\Gamma \cdot a_0 x) \cdot \Delta \quad (\Gamma \cdot b_0 x) \cdot \Delta}{\big(\Gamma \cdot (a_0 x + b_0 x)\big) \cdot \Delta}$$

for conjunction:

$$\frac{(\Gamma \cdot a_0 x) \cdot \Delta}{\big(\Gamma \cdot (a_0 x \cdot b_0 x)\big) \cdot \Delta} \qquad \frac{(\Gamma \cdot b_0 x) \cdot \Delta}{\big(\Gamma \cdot (a_0 x \cdot b_0 x)\big) \cdot \Delta}$$

and also

$$\frac{\Gamma \cdot (a_0 x + \Delta) \quad \Gamma \cdot (b_0 x + \Delta)}{\Gamma \cdot \big((a_0 x + b_0 x) + \Delta\big)} \quad .$$

Remarks: We can treat implication as

$$\frac{\Gamma \cdot a_0 x \cdot b_0 x + \Delta}{\Gamma \cdot \big((1 - a_0 x) + b_0 x\big) + \Delta} \qquad \frac{\Gamma \cdot (a_0 x \cdot \Delta_1) \quad (\Gamma \cdot b_0 x) \cdot \Delta_2}{\Gamma \cdot \big((1 - a_0 x) \cdot b_0 x\big) + \Delta_1 + \Delta_2}$$

where Δ_1 and Δ_2 are two different sequences. There is some artificiality in the symmetrical treatment of intelim rules – the sagittal correspondence – in natural deduction systems (or in the sequent calculus). The symmetry induced by the inversion principle is not derived from the content (of symmetric polynomials), but from a formal duality which is not intrinsic or internal. Negation is generally not involutive – except in finite dual (Boolean) situations – and we could also introduce non-commuting variables in polynomials or in power series, while it is precluded by the double (dual) negation. In intuitionistic logic, this global symmetry is absent and the more complex situations that are reflected in the logic are an indication of more genetic, less structural features. Internal logic is an analysis of content. Here logical content = polynomial content. Finally, the detachment or elimination rule is equivalent to *Modus Ponens* and the polynomial translation should make manifest the content of the sequential character of inference. Gentzen's linear logic – Gentzen used the phrase "*lineares Räsonieren*" – is by itself a surface phenomenon of the polynomial content.

The existential quantifier and the universal quantifier over finite sets interpreted as iterated (finite) sum and iterated (finite) product are also directly eliminable. We have

Proposition 2. The existential and universal quantifiers are eliminable through direct translation in the polynomial interpretation.

Proof. The universal quantifier can be rendered by

$$\frac{\Gamma \cdot (a_0 x + \Delta)}{\Gamma \cdot \big(\prod_i (a_i x^i) + \Delta\big)} \; (*) \qquad \frac{(\Gamma \cdot a_0 x) \cdot \Delta}{\big(\Gamma \cdot \prod_n (a_n x^n)\big) \cdot \Delta}$$

where (∗) means that x is an indeterminate not appearing in Γ and (∗∗) means that x is an arbitrary term in the polynomial.

The existential quantifier is translated as

$$\frac{\Gamma \cdot (ax + \Delta)}{\Gamma \cdot \left(\Sigma_n (a_n x^n) + \Delta\right)} \ (**) \qquad \frac{(\Gamma \cdot ax) \cdot \Delta}{\left(\Gamma \cdot \Sigma_i (a_i x^i)\right) \cdot \Delta} \ (*)$$

Remarks: The terms $a_i x^i$ are arbitrary. Since we deal with polynomials (with integer coefficients), the existence property for the existential quantifier is immediately garanteed and since the (classical) universal quantifier is limited to finite domains, its scope is always well-defined.

5.2 The elimination of implication

We want to arithmetize (local) implication. We put $1-a=\bar{a}$ for local negation. We have $(\bar{a}_0 x + b_0 x)^n$ and we want to exhaust the content of implication – in Gentzenian terms, this would correspond to the exhibition of subformulas (the subformula property). We just expand the binomial by decreasing powers

$$(\bar{a}_0 x + b_0 x)^n = \bar{a}_0^n x + n\bar{a}^{n-1} x b_0 x + \ n\ (n-1)/2!\ \bar{a}^{n-2} x b^2 x + \ldots \bar{b}_0^n x$$

where the companion indeterminate x shares the same power expansion. By an easy calculation (on homogeneous polynomials that are symmetric *i.e.* with a symmetric function $f(x,y) = f(y,x)$ of the coefficients)

$$\begin{aligned}
(\bar{a}_0 x + b_0 x)^n &= \bar{a}_0^n x + \sum_{k=1}^{n-1} (n-1/k-1)\ \bar{a}_0^{k-1} x + (n-1/k)\ a_0^k x b_0^{n-k} x + b_0^n x \\
&= \sum_{k=1}^{n} (n/k-1)\ a_0^k x b_0^{n-k}\ x + \sum_{k=0}^{n-1} (n-1/k)\ a_0^k x b_0^{n-k}\ x \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (n-1/k)\ a_0^{k+1}\ x b_0^{n-1} x + \sum_{k=0}^{n-1} (n/k-1)\ a_0^k x b_0^{n-k} x \\
&= \bar{a}_0 \sum_{k=0}^{n-1} (n-1/k)\ (\bar{a}_0 - 1)^k b_0^{n-1-k} x + \sum_{k=0}^{n-1} (n-1/k)\ \bar{a}_0^k x (b_0 - 1)^{n-1-k}\ x \\
&= (\bar{a}_1 x + b_1 x)(\bar{a}_1 x + b_1 x - 1)^{n-1}
\end{aligned}$$

and continuing by descent and omitting the x's, we have

$$(\bar{a}_2 + b_2)(\bar{a}_2 + b_2 - 2)^{n-2}$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$
$$(\bar{a}_{n-2} + b_{n-2} + \bar{a}_{n-2} +_{n-2} - (n-2))^{n-(n-2)}$$
$$(\bar{a}_{n-1} + b_{n-1} + \bar{a}_{n-1} +_{n-1} - (n-1))^{n-(n-1)}$$
$$(\bar{a}_n + b_n)(\bar{a}_n + b_n)^{n-n}.$$

Applying descent again,we obtain

$$(\bar{a}_0 + b_0)$$

or, reinstating the x's

$$(\bar{a}_0 x + b_0 x).$$

Remembering that

$$(\bar{a}x + bx)^{n}_{k<n} = \sum_{k+m=n} (k + m/k)\, \bar{a}^k b^m x^n$$

we have

$$(\bar{a}x + bx)^{n+m=n}_{k<n} = \prod_{k+m=n} (k, m) = 2^n$$

or more explicitly

$$\sum_{i=0}^{m+n} c_1 x^{n+n-1} = \bar{a}_0 x \cdot b_0 x \prod_{i=1}^{m+n} (1 + c_i x) = 2^n$$

where the product is over the coefficients (with indeterminates) of convolution of the two polynomials (monomials) a_0 and b_0. We could of course calculate the generalized formula for polynomials

$$(a_0 x + b_0 x + c_0 x + \ldots + k_0 x)^{n} = \sum_{p,q,r,\ldots s} a^p b^q c^r \ldots k^s$$

in the same manner, but we shall postpone the general case till we come to the effinite quantifier for a unified treatment.

The combinatorial content of the polynomial is expressed by the power set 2^n of the n coefficients of the binomial. I contend that this combinatorial content expresses also the meaning of local (iterated) implication. Convolution exhibits the arithmetic connectedness that serves to render the logical relation of implication. Implication is seen here as a power of polynomials, a^k and b^m with $k<m$ having their powers summed up and expanded in the binomial expansion. Some other formula may be used for the product, but it is essential to the constructive interpretation that the arithmetic universe be bounded by 2^n. One way to make things concrete is to analyse $a \to b$ in terms of

$$a \to b = C \quad (2^n - a) + b$$

where C can stand for combinations or coefficients. The formula is an arithmetical analogue of the topological interpretation of intuitionistic implication.

Theorem.1 Local implication $a \to b$ can be eliminated by interpreting it as $(1 - a + b)^n$.

Proof. By the above construction.

5.3 Elimination of the effinite quantifier ?

If we try to translate the *effinite* quantifier back into our logical rules, we meet with some difficulties. We may try 王$^{(*)}$ and 王$^{(**)}$ for right and left eliminations

$$\frac{\Gamma \cdot (a_n x^n) + \Delta}{\Gamma \cdot \left(\prod_{i\ldots} (a_i x^i) + \Delta\right)}\ r \qquad\qquad \frac{\left(\Gamma \cdot (a_n x^n)\right) + \Delta}{\Gamma \cdot \left(\prod_{n\ldots} (a_n x^n)\right) \cdot \Delta}\ l$$

but then, we haven't made much progress. The point is that (universal) effinite quantification amounts to an existential quantification which says simply "There is an effinite (infinitely proceeding) sequence of prime numbers", for example. It is manifest that the symbol 王 is not directly eliminable. Still, the constructive procedure of infinite descent in the cumulative degree structure of polynomials will enable us to discharge the 王$^{(**)}$ symbol in a finite number of steps, much in the same way as the ε-symbol is eliminated in Ackermann's proof. But the ε-symbol required transfinite induction for its elimination since it is a transfinite choice function and the reduction of global substitutions of true formulas for ε-formulas had to depend on the (transfinite) ordinal hierarchy of the second number class, as in Gentzen's proof.

By replacing the rank of a formula by the degree of the corresponding polynomial, we obtain a reduction by unique factorization, that is a finiteness result for arithmetic with infinite descent.

5.4 Divisibility

The method of descent we have used in 4.3.1 and which is most common could also be called the method of decomposition, as Weil has called it. The decomposition process necessarily stops and this form of the descent is the one most commonly used for the positive solutions of Diophantine equations. After Fermat, Legendre used the method and it is the way it is used by most contemporary authors from Mordell and Weil on[2]. Local decomposition of forms in a descent corresponds to a division process as in the Euclidean algorithm. Kronecker has outlined in (1968, II, 419-424) the most general setting for the decomposition of polynomial content. His notion of inclusion or content is expressed in terms of the convolution product. The general form of the convolution product of two polynomials (forms) encloses or contains higher-order forms and the substitution-elimination method enables one to remain within the confines of integral forms. The product of forms

$$\sum_{h=0}^{m} M_h U_h \cdot \sum_{i=1}^{m+1} M_{m+2} U_{m+1}$$

satisfies an algebraic equation of order r which defines a form containing the product of forms

$$\prod_{h=1}^{r} M_k U_{hk}.$$

Hence, the notions of inclusion and of equivalence (reciprocal inclusion) of forms are valid generally, *i.e.* for both forms and divisors. Factor decomposition – which we may call devolution – is a descending technique perfectly similar to the division algorithm for integers or the Euclidean algorithm for polynomials. The notion of greatest common divisor of a finite set of elements is an equivalence class of polynomials and Kronecker's main result says as stated above[3] "Every integral algebraic form is canonically representable as a product of irreducible (prime) forms". For this unique decomposition (devolution) of polynomials, descent is used to arrive at irreducible polynomials, much in the same way as in Euclid's proof of the divisibility of composite numbers by primes. Take a polynomial

$$f(x) = a_0 n^x + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n$$

of degree n. Suppose that n is not prime, then it must divisible by two factors i and j one of which, say j, must be prime; if not, j must be divisible by two factors, h and g, one of which, say g, must be prime; if not, we go on in that process, until we reach an a which is necessary prime, since there is no infinite descent and we must stop at 1, that is linear (and irreducible) polynomials. Formally,

$$\mp x \quad Ax \wedge \exists y\,(y < x)\,Ay \;\rightarrow \exists y \mp z\,(z < y)\,Az \;\rightarrow \mp x\,\neg Ax.$$

By *reductio ad absurdum*, there are irreducible polynomials. Now the fact (Gauss lemma) that the product of two primitive polynomials (with 1 as the greatest common divisor of their respective coefficients) is primitive can also be had with infinite descent and *reductio ad absurdum*. This fact combined with the fact that there is unique decomposition into irreducible (= prime) polynomials, we obtain unique prime factorization. Kronecker's version of unique decomposition rests on the formula quoted above

$$\prod_{h=1}^{r} M_k U_{hk}$$

and

$$\prod_{i=j+k} c_i = \sum_{j+k=i} a_j b_k$$

We shall read it in the form (remembering that from a divisibility point of view)

$$\prod_{i=1}^{m+n} (1 + c_i x_i) = \sum_{i=0}^{m+n} (c_i x^{m+n-1}) = \sum_{m+n=1} (a_m b_n)$$

to prove the eliminability of the effinite quantifier. The procedure is quite similar to the process of elimination of implication which now appears as a decomposition of content – the notion of inclusion <*Enthalten-Sein*> which has been translated by "content". With the elimination of the effinite quantifier by infinite descent, we shall be done.

5.5 The elimination of the effinite quantifier through infinite descent

There is an intimate connection between implication as inclusion (filling a content) and effinite quantification as an iterated product. We have introduced the effinite quantifier in the form

$$\text{Ŧ}xAx)\ [n \times m \times l\ldots] = \prod_{0\ldots} (a_0 x b_0 x c_0 x)_n$$

and this can be translated in sequents as

$$\frac{(\Gamma \cdot (a_n x^n)) \cdot \Delta}{\Gamma \cdot (\prod_{n\ldots} (a_n x^n)) \cdot \Delta}.$$

We can see this product as an iterated product

$$\prod \ldots \prod (a_n x^m)\,(a_n x^n)$$

which we write as

$$\prod_{i=1}^{m} a_i \quad \prod_{j=1}^{n} \ldots a_{m+j} \quad \ldots = \prod_{i=1}^{n+1} a_i = \prod_{i=1}^{n} \ldots a_i \quad a_{n+1}$$

$$\vdots$$

$$= \prod_{i=1}^{n+m} a_i = \prod_{i=1}^{n} \ldots a_i \quad a_{n+n}$$

which we calculate by descending. We set

$$\prod_{i=1}^{m+n} (c_i) = a_m \cdot b_n \prod_{i=1}^{m+b} (1 + c_i x)_1 \ldots (1 + c_i)_n.$$

The lower index is the height of the polynomial. We take up again our calculations of coefficients. We indicate that we have a product of monomials

$$(a_0 x \cdot b_0 x)^n = ((a_0 x \cdot b_0 x))^n$$

$$= \begin{bmatrix} a_0^n x + \prod_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-1/k-1)_1\, a_0^{k-1} x + (n-1/k)_1 + b_0^n x_1 \\ \vdots \\ a_0^n x + \prod_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n-1} (n-1/k-1)\, n a_0^{k-1} x + (n-1/k)_n + b_0^n x_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \prod_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n} \right) (n/k-1)_1 \left(a_0^k x b_0^{n-k} x\right)_1 + \sum_{k=0}^{n-1} (n-1/k-1)_1 \left(a_0^k x b_0^{n-k} x\right)_1 \\ \vdots \\ \prod_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n} \right) (n/k-1)_n \left(a_0^k x b_0^{n-k} x\right)_n + \sum_{k=0}^{n-1} (n-1/k-1)_n \left(a_0^k x b_0^{n-k} x\right)_n \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\right)(n/k-1)_1\left(a_0^{k+1}xb_0^{n-1-k}x\right)_1+\sum_{k=0}^{n-1}(n-1/k)_1\left(a_0^kxb_0^{n-k}x\right)_1\\ \vdots\\ \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\right)(n/k-1)n\left(a_0^{k+1}xb_0^{n-1-k}x\right)_n+\sum_{k=0}^{n-1}(n-1/k)_n\left(a_0^kxb_0^{n-k}x\right)_n\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a_n\prod_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{n-1}(n-1/k)_1\left((a_0-k)^kx\right)_1\left(b^{n-1-k}x\right)_1+b_n\sum_{k=0}^{n-1}(n-1/k)_1\left(a_0^kx\right)\right.\\ \qquad\left.+b_n\sum_{k=0}^{n-1}(n-1/k)_1\left(a_0^kx\right)_1\left(\left(b_0-1^{n-1-k}x\right)_1\right)\right]\\ \vdots\\ a_n\prod_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{n-1}(n-1/k)_n\left((a_0-k)^kx\right)_n\left(b^{n-1-k}x\right)_n\right.\\ \qquad+b_n\sum_{k=0}^{n-1}(n-1/k)_1\left(a_0^kx\right)_n\left(\left(b_0-1^{n-1-k}x\right)_n\right)\end{bmatrix}$$

$$=\left(a_0x+b_1\right)_1\left(a_1x+b_1x-1\right)_1^{n-1}$$

$$\dots\quad\dots\quad\dots$$

$$=\left(a_1x+b_1\right)_n\left(a_1x+b_1x-1\right)_n^{n-1}$$

and continuing by descent we have (again omitting the x's)

$$=\begin{bmatrix}(a_2+b_2)_1(a_2+b_2-2)_1^{n-2}\\ \vdots\\ (a_2+b_2)_n(a_2+b_2-2)_n^{n-2}\end{bmatrix}$$

$$\dots\quad\dots\quad\dots$$

$$=\begin{bmatrix}(a_{n-2}+b_{n-2})_1(a_{n-2}+b_{n-2}-n-2)_1^{n-(n-2)}\\ \vdots\\ (a_{n-2}+b_{n-2})_n(a_{n-2}+b_{n-2}-n-2)_1^{n-(n-2)}\end{bmatrix}$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$= \begin{bmatrix} (a_{n-1} + b_{n-1})_1 (a_{n-1} + b_{n-1} - n - 1)_1^{n-(n-1)} \\ \vdots \\ (a_{n-1} + b_{n-1})_n (a_{n-1} + b_{n-1} - n - 1)_n^{n-(n-1)} \end{bmatrix}$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$= \begin{bmatrix} (a_n + b_n)_1 (a_n + b_n)_1^{n-n} \\ \vdots \\ (a_n + b_2)_n (a_n + b_n)_n^{n-n} \end{bmatrix}$$

which is

$$= \begin{bmatrix} (a_0 + b_0)_1 \\ \vdots \\ (a_0 + b_0)_n \end{bmatrix}$$

which is just

$$(a_0 \cdot b_0) = \prod_0^n (a_0 + b_0).$$

6. CONCLUDING REMARKS

As I mentioned earlier, it is the Fermat-Kronecker number theory, that is Kronecker's polynomial arithmetic with Fermat's infinite descent, which constitutes the foundational background of my work. Obviously, the foundational motive is alien to set-theoretical foundations and one could quote H.M. Edwards ([2] p. 97) on *numerical extensions*:

> It is usual in algebraic geometry to consider function fields over an *algebraically closed field* – the field of complex numbers or the field of algebraic numbers rather than over **Q** (the field of rational numbers). In the Kroneckerian approach, the transfinite construction of algebraically closed fields is avoided by the simple expedient of adjoining new algebraic numbers to **Q** as needed.

By transfinite construction, Edwards means clearly the use of set-theoretical devices like Zorn's lemma and model-theoretic tools like the ultrafilter lemma which are equivalent to the axiom of choice *de facto* absent of Kronecker's general arithmetic (*allgemeine Arithmetik*) of polynomials. Algebraic extensions cannot be constructively defined in general, except in finite fields with explicit numerical extensions. For example, infinite models of set theory have elementary (first-order) extensions, e.g. generic sets of Cohen's forcing relation (including its Boolean-valued models) which by the way mimicks the method of field extensions, the accessibility relation on possible worlds in a Kripke model mimicking in turn a timelike forcing relation. Such set-theoretical and logical techniques do not have any potential for concrete numerical content and could be defined as transcendental constructions over infinite sets from a Kroneckerian point of view. One could add that Peano arithmetic, Heyting arithmetic with transfinite induction and their subtheories or extensions, such as Gödel's *Dialectica* interpretation with induction on all finite types, could not be made to have direct access to numerical content and numerical extensions in virtue of their lack in concrete constructive procedures and elementary arithmetical operations.

NOTES

1. Mordell (1922) says that you start with an arbitrary n – an arbitrary choice made once and for all – and descend finitely. Hasse's principle of local solvability implying global solvability for quadratic forms relies on the same principle and is related to Legendre's "positive" infinite descent for the equation
$$ax^2 + by^2 = cz^2.$$
2. My emphasis is different from Edwards' (1987) who has chosen to look at divisor theory rather than the theory of forms which is, in my view, the encompassing theory.
3. See Kronecker (1882). Edwards (1987) rightly says that Dedekind's Prague theorem – a generalization of Gauss lemma to the algebraic case – is but a consequence of Kronecker's result.

BIBLIOGRAPHY

[1] E. Bishop "Mathematics as a Numerical Language", in *Intuitionism and Proof Theory*, 53–71, North-Holland, Amsterdam and New-York, 1970.

[2] H.M. Edwards, *Divisor Theory*, Birkhäuser, Basel, 1987.

[3] H. Friedman, "The disjunction property implies the numerical existence property", *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, Vol. **72**, No. 8, pp. 2877-2878, August 1975.

[4] Y. Gauthier, "A theory of local negation : the model and some applications", *Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung*, Vol. **25**. Nos 3-4 (1985) : 127-143.

[5] Y. Gauthier. *Towards an Arithmetical Logic. The Arithmetical Foundations of Logic*, Birkhäuser/Springer, Basel, 2015.

[6] Y. Gauthier, "A quadratic reciprocity theorem for arithmetical logic" to appear in *International Journal of Algebra*, Vol.**13**, no. 8 (2019) : 445-455.

[7] Y. Gauthier, "Cantor's normal form theorem and algebraic number theory", *International Journal of algebra*, Vol. **12**, no. 3 (2018) : 133-140.

[8] K. Gödel, "Über eine noch nicht benütze Erweiterung des finiten Standpunktes", *Dialectica*, **12** (1958) : 230-237.

[9] Y. Gurevich, "Intuitionistic logic with strong negation", *Studia Logica*, Vol. 36, Nos 1-2 (1977) : 49-59.

[10] D. Hilbert, "Über das Unendliche", *Mathematische Annalen*, **95** (1926) :161-190.

[11] S. C. Kleene, "On the Interpretation of intuitionistic number theory", *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. **10** (1945) **:** 109-124.

[12] S. C. Kleene, "Disjunction and existence under implication in elementary intuitionistic formalisms", *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. **27** (1962) :11-18.

[13] U. Kohlenbach, *Applied Proof Theory* : *Proof Interpretations and their Use in Mathematics*, Springer, Heidelberg, 2008.

[14] L. Kronecker, "Zur Theorie der Formen höherer Stufen", in *Werke* II, K. Hensel, ed., Teubner, Leipzig, 1968 : 419-424.

[15] D. Nelson, "Constructible falsity", *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. **14**, no. 1, March 1949 :16-26.

[16] E. Nelson, *Predicative Arithmetic*, Mathematical Notes, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1987.

CHAPITRE 21

Commentaire de «A Quadratic Reciprocity Theorem for Arithmetical Logic»

Ce texte paru dans *International Journal of Algebra* (Vol. **13**, no. 8, 2019 : 445-455) est un résultat technique pour la logique arithmétique que j'ai élaborée depuis une trentaine d'années et qui a trouvé son point culminant dans deux ouvrages, *Logique arithmétique. L'arithmétisation de la logique* (Québec, PUL, 2010) et *Towards an Arithmetical Logic* (Bâle, Birkhäuser/Springer, 2015). Ce nouvel élément technique est d'origine mathématique et remonte à Gauss et à son «théorème d'or» *aureum theorema* dans son ouvrage de 1801 *Disquisitiones arithmeticae* qui utilise la descente infinie de Fermat sur les indéterminées (variables) et les coefficients d'expressions polynomiales. C'est véritablement la voie royale de la théorie des nombres, reine des mathématiques servie par le prince des mathématiques, comme on a déjà désigné Gauss. Cette voie royale a été pavée par de nombreux résultats de réciprocité depuis Gauss, non seulement en théorie des nombres algébriques mais jusqu'à la géométrie algébrique et arithmétique contemporaine en passant par Kummer, Kronecker, Artin, Weil, Langlands et récemment Peter Scholze (pour les espaces perfectoïdes). Il était naturel de suivre Kronecker dans cette voie, lui qui a suivi Gauss si fidèlement dans son arithmétique générale puisqu'il a produit un théorème de réciprocité pour des puissances ou degrés d'ordre supérieur dans sa théorie des formes (polynômes homogènes) ; ce théorème de Kronecker est une généralisation du théorème de Gauss et ouvre une voie encore plus large pour les mathématiques contemporaines.

Le gain d'une loi de réciprocité pour la logique polynomiale modulaire consiste en une garantie de consistance syntaxique associée à un calcul complet purement arithmétique. Ce calcul a des applications directes dans la logique mathématique interprétée comme arithmétique polynomiale modulaire. Ainsi, l'énoncé conditionnel a → b de la logique classique et intuitionniste peut être interprété dans sa forme polynomiale comme un contenu numérique

$$(1 - a) + b$$

de la même manière que le calcul des probabilités conditionnelles qui se prête au formalisme polynomial. La descente infinie de Fermat y opère librement dans les polynômes homogènes de l'arithmétique FK de Fermat-Kronecker.

Le *calculus ratiocinator* qu'envisageait Leibniz pour sa caractéristique universelle (*characteristica universalis*) trouve peut-être sa légitimité logique, mathématique et philosophique et sa justification fondationnelle dans une logique arithmétique, si l'on entend bien son mot d'ordre ou son injonction « *Calculemus* ! ».

A Quadratic Reciprocity Theorem for Arithmetical Logic

ABSTRACT

I have introduced in (Gauthier 2015, see [5]) an interpretation of a logical calculus in terms of congruent arithmetic for a modular polynomial logic. The motive was to develop a purely syntactical approach to the internal consistency of arithmetic. Such an arithmetic was defined as classical Fermat-Kronecker (F-K) arithmetic, that is the general theory of homogeneous polynomials (forms) with infinite descent as a proof procedure. In particular, I treated logical implication (the conditional) as a congruence relation that is interpreted by infinite descent on the binomial expansion. The objective was to endow theorems and proofs in logic with a numerical content.

AMS Subject Classification : 11A15,11R09, 03F03, 03F35

Keywords : Quadratic reciprocity, divisor theory, polynomials, infinite descent

1. QUADRATIC RECIPROCITY.

The history of the theorem in number theory is well known. Euler had proven **it** using infinite descent for Fermat's minor theorem in congruent arithmetic :

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$$

i.e. if p is a prime and a is a prime relative to p, a^p is divisible by p. This important theorem, despite its name, has been instrumental in the recent Agrawal-Kayal-Saxena test (see [1]) for primality in polynomial time. Euler went on calculating quadratic residues for congruences, e.g. $x^2 \equiv q \pmod p$ – if it has a solution, q is a quadratic residue $(\mathrm{mod}\, p)$, if not, it is a quadratic residue – in the form that Legendre codified later (the Legendre symbol):

$$(p/q) = \begin{cases} 1, & \text{if } p \text{ is a quadratic residue of } q \\ -1, & \text{if } p \text{ is a quadratic nonresidue of } q \\ 0, & \text{if } p \text{ divides } q \text{ exactly (no residue).} \end{cases}$$

For distinct odd primes p and q, the law of quadratic reciprocity states:

$$(p/q)(q/p) = (-1)^{(p-1/2)(q-1/2)}$$

with an even exponent for (–1), p and q have reciprocal quadratic residues or they don't. Euler didn't prove this and Legendre had an incomplete proof till Gauss proved the quadratic reciprocity theorem, the golden theorem (*aureum theorema*) as he called it, in his 1801 *Disquisitiones arithmeticae* using infinite descent on indeterminates (*indeterminatae*) or unknown quantities accompanying integral coefficients in polynomials – for the history of quadratic reciprocity, one can consult (Weil [9]), (Davenport [2]) or (Ireland and Rosen [6]). Kronecker who credited Gauss with the introduction of indeterminates will exploit fully the notion in his general arithmetic (*allgemeine Arithmetik*) of polynomials. Gauss has provided many proofs of his theorem from his adolescence on and there are now two hundred proofs of the theorem in different clothes, but it has also far-reaching generalizations up to E. Artin's reciprocity law for global fields in finite field theory where Artin builds on the Kronecker-Weber theorem originally conjectured by Kronecker for finite abelian extensions of **Q**, the field of rational numbers (Hilbert's tenth problem) – for this, see (H. Weyl [10]) for an authoritative work on algebraic number theory in which Weyl privileges Kronecker's constructive theory of rationality domains over Dedekind's set-theoretic treatment of the field theory of ideals.

Kronecker had early a version of the quadratic reciprocity law involving the monic polynomial (with leading coefficient 1 and prime p):

$$1 + x + \ldots + x^{p-1}$$

which is irreducible in $\mathbf{Q}[x]$, the field of rational numbers and Kronecker went on to elaborate a theory of the content (*Inhalt* or *Enthalten-Sein* in German) of homogeneous polynomials, divisor theory (*Modulsyteme*) and elimination theory which I briefly expose.

The general theory of elimination for polynomial equations proceeds alon the lines of a general arithmetic of rational functions with integer coefficients and indeterminates. Forms (polynomials) can contain <*enthalten*> other forms or be contained in other forms and two forms are said to be "absolutely equivalent" when they contain each other. Definitions of primitive, prime, irreducible forms follow. It is useful to quote in full proposition IX (Kronecker [7], p. 345):

When a homogeneous linear form F is contained in another form F_0 the latter can be transformed in the former provided that forms of the domain (of rationality) are substituted for the indeterminates of F_0; those forms are linear if F_0 is itself a linear form. In such a case the contained linear form F is transformed into the containing form through a linear substitution with integral coefficients and this is a sufficient condition for the containment <*Enthalten-Sein*> of in F_0.

Kronecker explains that the linear substitution refers to the indeterminates and the integer coefficients are the entire rational functions or integral quantities of the domain of rationality R, R', R''. Proposition X then ensues:

> Equivalent homogeneous linear forms can be transformed one into the other through substitution with integral coefficients (*ibid*.). Divisibility properties are easily deducible *e.g.* absolutely equivalent forms have the same divisors and the final conclusion is reached with the statement XIII (and XIII°) on the unique factorization of integral algebraic forms as products of irreducible (prime) forms. What this shows, Kronecker maintains, is that the fundamental laws of ordinary arithmetic are preserved in the encompassing sphere of algebraic quantities by the process of association of algebraic forms. The association of integral algebraic forms, Kronecker continues, is shown by the result on unique factorization to conserve the conceptual determinations and the laws (of arithmetic) in the extension of the rational to the algebraic; still further, it provides the simplest apparatus, which is also necessary and sufficient, capable to fully exhibit the arithmetical properties of the most general algebraic quantities (Kronecker [7], p 353).

Now, the fundamental theorem of arihmetic states that every positive integer can be represented uniquely as a product of prime powers:

$$n = p_1{}^{a}{}_1\, p_2{}^{a}{}_2 \cdots p_k{}^{a}{}_k = \prod_{h=0}^{m} p_1{}^{a_1}$$

and Kronecker ends up with his fundamental result on the unique factorization of integral algebraic forms (homogeneous polynomials with integer coefficients) as product of prime forms:

> Every integral form is representable as a product of irreducible (prime) forms in a unique way.
>
> (Kronecker [7], p. 352)

And in his 1883 paper, Kronecker [8] proceeds to formulate a theory of higher-order forms that amounts to a proof of quadratic reciprocity for higher powers or degrees of polynomials. It is this proof that I want to adapt for the following theorem for two *polynomial functionals* P_L and Q_L representing logical propositional functions in $F[x]$, the ring of polynomials.

2. A QUADRATIC RECIPROCITY THEOREM FOR MODULAR POLYNOMIAL LOGIC.

Theorem 1 : In the ring of polynomials $F[x]$ with one indeterminate x and integer coefficients in the finite field F with p^n elements – p an odd prime and n a positive integer – P_L and $Q_L \in F[x]$ with Q_L an irreducible monic polynomial of positive degree, then:

$$(P_L/Q_L)(Q_L/P_L) = (-1)^{\deg(P_L - 1)/2 \deg(Q_L - 1)/2}.$$

Proof of the theorem.

Since we work with polynomials in the sense of Kronecker, we shall use essentially Kronecker's notion of the content of polynomials con(P_L) and con(Q_L) in our proof for which I reconstruct Kronecker's argument (see Gauthier [4]). Remembering that the content of a polynomial with integer coefficients is condensed in the greatest common divisor of its coefficients, we shall exhaust the content in the canonical decomposition of polynomials where descent is effected to arrive at irreducible polynomials, much in the same way as in Euclid's proof of the divisibility of composite numbers by primes. Now the fact (Gauss's lemma) that the product of two primitive polynomials (with the g.c.d. of their respective coefficients = 1) is primitive can also be had with infinite descent and *reductio ad absurdum*. From this fact combined with the fact that there is unique decomposition into irreducible (= prime) polynomials, we obtain unique prime factorization. Kronecker's version of unique decomposition rests on the formulas

$$\prod_{h=1}^{r} M_k U_{hk}$$

and

$$\prod_{i=j+k} c_i = \sum_{j+k=i} a_j b_k$$

where the M's are integral forms, the U' indeterminates and the c's with integral $j = (0,\ldots,m)$ and $k = (0,\ldots,n)$. We shall read it in the following form remembering that $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ from a divisibility point of view

$$\prod_{i=1}^{m+n} (1 + c_i x_i) = \sum_{i=0}^{m+n} (c_i x^{m+n-1}) = \sum_{m+n=1} (a_m b_n)$$

Kronecker's generalization uses the convolution product for polynomials

$$\sum_h M_h U_h \cdot \sum_i M_{m+i} U^{i-1} = \sum_k M'_k U^k$$

so that the product mentioned above

$$\prod_h \sum_k M_k U_{hk}$$

is "contained" in the resulting form and the product can be expressed as

$$\sum_k M'_k U^k = (M_k M_{m+1})^k + (M_k M_{m+1})^{k-1} + (M_k M_{m+1})^{k-2} + \ldots + (M_k M_{m+1})$$

in the decreasing order of the rank k of the polynomial sum. This linear combination obtained by the convolution product and the finite descent of powers shows simply that integral rational forms generate integral algebraic forms, i.e. algebraic integers. One can see this decomposition of forms as a generalization of Gauss's lemma (*Disquisitiones Arithmeticae*, art. 42) which states (following Edwards [3], p. 1):

Let f and g be monic polynomials in one indeterminate with rational coefficients. If the coefficients of f and g are not all integers, then the coefficients of fg cannot all be integers.

Remembering that a simple form of Gauss's lemma is that the product of two primitive polynomial is primitive and a primitive polynomial being a polynomial having 1 for the g.c.d. of all its coefficients, one sees immediately that Kronecker's theory of content is a vast generalization of Gauss's result. As shown above, the Kronecker's notion of content or inclusion «*Enthalten-Sein*», that the coefficients of one form can be included in another and mutual inclusion results in an equivalence relation; a further generalization is afforded by passing to forms of higher order «*Stufe*» where forms and divisor systems or modular systems coincide. Relying finally on Kronecker's notion of content for our polynomial functionals, we can assert the equivalence:

$$con((P_L)(Q_L)) \equiv con(P_L)\ con(Q_L)$$

which satisfies the equation:

$$(P_L/Q_L)(Q_L/P_L) = (-1)^{\deg(P_L - 1)/2\ (\deg(Q_L - 1)/2}.$$

What does this theorem mean for what I call modular polynomial logic? Quadratic reciprocity is a kind of syntactic consistency and arithmetic completeness and I want to exploit briefly a logical calculus for logical implication or conditional together with the connectives of local negation and local disjunction. The conditional is our best candidate since we have the inclusion:

$$a \supset b \text{ (for } a \rightarrow b) \text{ and } b \supset a \text{ (for } b \rightarrow a) \rightarrow a \equiv b.$$

I mean by local the strongest logical strength for the connectives (and quantifiers) in the sense that they have an arithmetical content which is susceptible of computation in a finite (polynomial) calculus. I take for example the derivation of the polynomially interpreted conditional

$$a \rightarrow b = (\bar{a}_0 x + b_0 x)$$

Remark that the translation is on $a \rightarrow b = \neg\, a \vee b$ for $\bar{a} = 1 - a$ and it is constructive since it supports a numerical content which supports in its turn the topological interpretation of the intuitionistic conditional on the relative complement on the open sets of a topological space X

$$a \rightarrow b = \mathrm{In}\left((X - a) + b\right)$$

for In the interior of X; this has also a combinatorial interpretation in the following derivation of decomposition or binomial expansion (see Gauthier [5], chap. 7. 7):

3. THE ELIMINATION OF IMPLICATION

We want to arithmetize (local) implication. We put $1 - a = \bar{a}$ for local negation. We have $(\bar{a}_0 x + b_0 x)^n$ and we want to exhaust the content of implication – in Gentzenian terms, this would correspond to the exhibition of subformulas (the subformula property). We just expand the binomial by decreasing powers

$$(\bar{a}_0 x + b_0 x)^n = \bar{a}_0^n x + n\bar{a}^{n-1} x b_0 x + \; n(n-1)/2! \; \bar{a}^{n-2} x b^2 x + \ldots + b_0^n x$$

where the companion indeterminate x shares the same power expansion. By an easy calculation (on homogeneous polynomials that are symmetric *i.e.* with a symmetric function $f(x,y) = f(y,x)$ of the coefficients)

$$\begin{aligned}
(\bar{a}_0 x + b_0 x)^n &= \bar{a}_0^n x + \sum_{k=1}^{n-1} (n-1/k-1)\, \bar{a}_0^{k-1} x + (n-1/k)\, a_0^k x b_0^{n-k} x + b_0^n x \\
&= \sum_{k=1}^{n} (n/k-1)\, a_0^k x b_0^{n-k} x + \sum_{k=0}^{n-1} (n-1/k)\, a_0^k x b_0^{n-k} x \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (n-1/k)\, a_0^{k+1} x b_0^{n-1} x + \sum_{k=0}^{n-1} (n/k-1)\, a_0^k x b_0^{n-k} x \\
&= \bar{a}_0 \sum_{k=0}^{n-1} (n-1/k)\, (\bar{a}_0 - 1)^k b_0^{n-1-k} x + \sum_{k=0}^{n-1} (n-1/k)\, \bar{a}_0^k x (b_0 - 1)^{n-1-k} x \\
&= (\bar{a}_1 x + b_1 x)(\bar{a}_1 x + b_1 x - 1)^{n-1}
\end{aligned}$$

and continuing by descent and omitting the x‘s, we have

$$\begin{gathered}
(\bar{a}_2 + b_2)(\bar{a}_2 + b_2 - 2)^{n-2} \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
(\bar{a}_{n-2} + b_{n-2} + \bar{a}_{n-2} +_{n-2} -(n-2))^{n-(n-2)} \\
(\bar{a}_{n-1} + b_{n-1} + \bar{a}_{n-1} +_{n-1} -(n-1))^{n-(n-1)} \\
(\bar{a}_n + b_n)(\bar{a}_n + b_n)^{n-n}.
\end{gathered}$$

Applying descent again, we obtain

$$(\bar{a}_0 + b_0)$$

or, reinstating the x‘s

$$(\bar{a}_0 x + b_0 x).$$

Remembering that

$$(\bar{a}x + bx)^n_{k<n} = \sum_{k+m=n} (k + m/k)\, \bar{a}^k b^m x^n$$

we have

$$(\bar{a}x + bx)^{n+m=n}_{k<n} = \prod_{k+m=n} (k, m) = 2^n$$

or more explicitly

$$\sum_{i=0}^{m+n} c_1 x^{m+n=1} = \bar{a}_0 x \cdot b_0 x \prod_{i=1}^{m+n} (1 + c_i x) = 2^n$$

where the product is over the coefficients (with indeterminates) of convolution of the two polynomials (monomials) a_0 and b_0. We could of course calculate the generalized formula for polynomials

$$(a_0 x + b_0 x + c_0 x + \ldots + k_0 x)^n = \sum_{p,q,r,\ldots s} a^p b^q c^r \ldots k^s.$$

The combinatorial content of the polynomial is expressed by the power set 2^n of the n coefficients of the binomial. I contend that this combinatorial content expresses also the meaning of local (iterated) implication. Convolution exhibits the arithmetic connectedness that serves to render the logical relation of implication. Implication is seen here as a power of polynomials, a^k and b^m with $k < m$ having their powers summed up and expanded in the binomial expansion. Some other formula may be used for the product, but it is essential to the constructive interpretation that the arithmetic universe be bounded by 2^n. One way to make things concrete is to analyse $a \to b$ in terms of

$$a \to b = C\left((2^n - a) + b\right)$$

where C can stand for combinations or coefficients. The formula is an arithmetical analogue of the topological interpretation of intuitionistic implication.

Theorem 2. Local implication $a \to b$ can be eliminated by interpreting it as $(\bar{a} + b)^n$

Proof. By the above construction.

The derivation has been effected here on a binary form of higher order n in the spirit of Kronecker's theory, but it applies easily to a quadratic form with numerical content.

4. LOGIC

The proof theory involved in the modular polynomial interpretation is purely syntactic and doesn't need any semantics either in set-theoretic terms for the (first-order) logic of Peano arithmetic or for the possible worlds semantics (Kripke) of intuitionistic logic. This means that logical truths and truth values can be dispensed with or that logical truth is only an approximation to arithmetical truth – logical truths are essentially tautologies as L. Wittgenstein would say –. The fundamental relation is congruence for arithmetical logic and the logical or set-theoretical equivalence relation are only surface phenomena of arithmetical facts.

Finally, I give a few more illustrations of the polynomial translation. Take for example the implicational fragment of classical logic:

1. $A \to (B \to A)$, 2. $(A \to B) \to (B \to C) \to (A \to C)$, 3. $(A \to B) \to A) \to A$.

that is easily translated as:

1* $(\bar{a}_0x + (b_0x + \bar{a}_0x)$, 2* $((\bar{a}_0x + b_0x) + (b_0x + c_0x) + (\bar{a}_0x + c_0x))$,
3* $((\bar{a}_0x + b_0x) + a_0x) + a_0x$.

For the intuitionistic conditional with:

1. $(A \to \neg A) \to \neg A$ and 2. $A \to (A \to B)$ interpreted again as $\bar{a}_0x \equiv 1 - a_0x$, we have

1*. $(\bar{a}_0x + \bar{a}_0x) + \bar{a}_0x$ and 2*. $\bar{a}_0x + (\bar{a}_0x + b_0x)$.

Residual polynomial logic versus non-residual logic for implication supposes again that logical truth is trivial compared to the arithmetical logical calculus since attributing a numerical content to a sentence or closed formula and its terms or to a propositional function (*à la* Russell) will always give a residue according to the inclusion structure of the condition or logical implication. The fundamental arithmetic congruence relation is basic to all logical calculi from combinatorial logic to algebraic logic and categorical logic, including the probability calculus. Following Kolmogorov, we have:

$$P(A/B) = P(AB)/P(B)$$

the conditional probability of A given B gives:

$$P(\bar{a}_0 x + b_0 x) = P(\bar{a}_0 x + b_0 x)/P(\bar{a}_0 x)$$

and Bayes theorem stating:

$$P(A/B) = P(A)/P(B)/\ P(B)$$

gives:

$$P(\bar{a}_0 x + b_0 x) = P(b_0 x + \bar{a}_0 x)P(\bar{a}_0 x)\ /\ P(b_0 x)$$

and for the inverse probability

$$P(E_i\ /A) = P(E_i)P(A/E_i)\ /\sum_{j=1}^{n} P(E_j)P(A/E_j)$$

we have

$$P(e_i x + \bar{a}_0 x) = P(e_i x)P(\bar{a}_0 x/e_i x)\ /\sum_{j=1}^{n} P(e_j x)P(\bar{a}_0 x/e_i x)$$

5. CONCLUSION

Leibniz who knew about Fermat's work and the fundamental theorem of arithmetic had the idea of a « *calculus ratiocinator* » in his universal characteristics « *characteristica universalis* », a kind of universal logic assigning prime numbers to all concepts starting with God (God = 1). The idea was to calculate everything as he exclaimed « *Calculemus* ! » Leibniz' dream was not realized by Leibniz, but many logicians have thought after the advent of symbolic logic with Boole's logic and Frege's *Begriffsschrift* or « the writing of concepts » that formal logic was such a realization. But Frege had asked in his *Grundlagen der Arithmetik* « How far can one go in arithmetic with logic alone ? » and , as we know, he stopped short of polynomial arithmetic with the paradoxical unlimited comprehension principle. The polynomial interpretation is not foreign to Gödel's arithmetization of syntax for first-order logic, but Gödel's numbering of formulas and their content is an « external » association of the sequence of integers to obtain ω-consistency for the infinitary Peano arithmetic –ω-consistency is reducible to simple consistency or 1-consistency, but the set-theoretical setting of Peano arithmetic is still infinitary. Kronecker's theory of forms or homogeneous polynomials with *finite* descent is rather a polynomialization of content aimed at a finite computation of any logical calculus, from combinatorial logic, type theory, typed λ-calculus to algebraic logic (including categorical logic which is essentially algebraic) to the extent that modular polynomial logics as the internal logic of arithmetic encompasses the arithmetical content of all logics with the goal of reducing logic to arithmetic in the perspective of constructive mathematics.

REFERENCES

[1] M. Agrawal, N. Kayal and N. Saxena (2004) : PRIMES is in P. *Annals of Mathematics*.160 : 781-793.

[2] A. Davenport (1968) : *The Higher Arithmetic.* Hutchison University Library, London.

[3] H.M. Edwards (1987) : *Divisor Theory*. Birkhäuser, Basel.

[4] Y. Gauthier (2013) : Kronecker in Contemporary Mathematics. General Arithmetic as a Foundational Programme. *Reports on Mathematical Logic*, 48 : 37-65.

[5] Y. Gauthier (2015) : *Towards an Arithmetical Logic. The arithmetical Foundations of Logic.* Birkhäuser, Basel.

[6] K. Ireland and M. Rosen : *A Classical Introduction to Modern Number Theory* Springer, New York/Heidelberg/Berlin.

[7] L. Kronecker (1968) : *Grundzüge einer arithmetischen Theorie algebraischer Grössen.* In *Werke*, vol.2 : 237-387, ed. K. Hensel. Teubner, Leipzig.

[8] L. Kronecker (1968) : Zur Theorie der Formen höherer Stufen. In *Werke*, vol. 2, 429-430, ed. K. Hensel. Teubner, Leipzig

[9] A. Weil (1984) : *Number Theory. An Approach through History. From Hammurabi* to *Legendre.* Birkhaüser, Basel.

[10] H. Weyl (1940) : *Algebraic Theory of Numbers.* Princeton University Press, Princeton.

CHAPITRE 22

Commentaire de « The Use of Infinity in Pure Number Theory and Algebra »

Cet article est paru dans *International Journal of Algebra*, vol, 13, no.1(2019) : 17-27. Je m'inspire ici des travaux d'André Weil en théorie des nombres et en géométrie algébrique arithmétique. Weil a toujours mis l'accent sur l'arithmétique de Fermat à Kronecker en appliquant la descente infinie de Fermat en théorie algébrique des corps et en attirant l'attention sur la l'arithmétique générale des systèmes modulaires de Kronecker. Il considère d'ailleurs ce dernier comme le pionnier de la théorie arithmétique des fonctions elliptiques devenues depuis les courbes elliptiques de la géométrie algébrique actuelle. J'ai montré ailleurs (référence [4] dans l'article) comment Kronecker a inspiré aussi bien les programmes de Grothendieck et de Langlands en ce domaine.

Le logicien Georg Kreisel[1] a déjà reproché à Weil de ne pas reconnaître la méthode diagonale de Cantor comme un procédé légitime en théorie des nombres et j'estime que Weil avait raison de rejeter la recette ensembliste : la méthode diagonale de Cantor mène directement à l'autoréférence qui est le lot de la logique depuis Russell, Gödel, Richard, Church et toute une suite de paradoxologues jusqu'à Chaitin.

L'idée de la méthode diagonale est assez simple comme le pense d'ailleurs Cantor dans son texte de 1891 « *Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre* » (sur une question élémentaire de la théorie des multiplicités) – voir mon ouvrage *Logique arithmétique. L'arithmétisation de la logique* (PUL, Québec, 2010, p. 23-27). La méthode diagonale semble être une méthode constructive de prime abord, mais il ne faut pas s'y méprendre. Cantor commence avec un système infini M de coordonnées dont les éléments $(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ n'ont que deux « caractères » m et w ou « bits » (0,1) comme on dit maintenant et il imagine une matrice infinie de suites E de ces éléments :

$$E^{I} = (m, m, m, m, \dots)$$
$$E^{II} = (w, w, w, w, \dots)$$
$$E^{III} = (m, w, m, w, \dots).$$

Cantor suppose alors que la totalité de ces suites, leur liste infinie n'est pas en bijection avec la liste des infinie des nombres naturels, donc n'est pas dénombrablement infinie. On n'a qu'à démontrer que la matrice infinie des suites représentant les nombres naturels :

$$E_1 = (a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,\nu}, \dots)$$
$$E_2 = (a_{2,1}, a_{2,2}, \dots, a_{2,\nu}, \dots)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$E_\mu = (a_{\mu,1}, a_{\mu,2}, \dots, a_{\mu,\nu}, \dots)$$

n'épuise pas M, l'ensemble des nombres réels dans l'intervalle (m, w) ou (0, 1) puisque la suite :

$$E_\nu = (b_1, b_2, b_3, \dots)$$

définie par $b_\nu \neq a_{\nu,\nu}$ ne s'y trouve pas, l'élément b_ν étant différent de tout élément a_ν dans la diagonale de E_1 à E_μ. Les éléments extradiagonaux b_i sont pris sur la codiagonale pour complément de la diagonale, puisqu'ils sont tirés librement du complément **R** de **N** qui doit contenir la liste infinie tous les nombres naturels, l'ensemble de cardinalité $\aleph_0$, n'épuise pas le système ou l'ensemble **M** de cardinalité > **N**, donc $2^{\aleph_0}$, la cardinalité de **R** des nombres réels dans l'intervalle (0,1). Le procédé de diagonalisation est constructif, le procédé complémentaire de la diagonalisation ne l'est plus, puisqu'il puise dans le réservoir des réels pour ajouter une suite dans le liste infinie complète (ensemble infini complété $\aleph_0$) : cette suite n'a plus de nombre naturel pour la désigner, mais un ordinal $\omega + 1$ dans la suite dénombrable des ordinaux jusqu'à la limite $lim\ \omega = \varepsilon_0$ de la deuxième classe de nombres dans la théorie cantorienne des ensembles. C'est ce passage ou ce saut dans le dénombrable transfini qui est suspect aux yeux de Weil qui veut s'en tenir au dénombrable de l'arithmétique finie avec descente infinie[2]. Le dénombrable dans ce sens a été aussi le souci d'autres membres de Bourbaki comme Jean Dieudonné qui n'a pas hésité à écrire dans la préface de

1969 de la seconde édition de son ouvrage *Foundations of Modern Analysis*, d'abord paru en 1960, le motto «*Only the countable exists at infinity*» (Seul le dénombrable existe à l'infini), mais Dieudonné s'est converti depuis à une vision plus large et sans doute moins rigoureuse d'un Grothendieck en géométrie algébrique, vision pourtant inspirée par Kronecker, comme Grothendieck et Dieudonné le reconnaissent.

Weil en tant que père fondateur du groupe Bourbaki est l'auteur d'une *Théorie des ensembles* dès 1939 et le principal acteur du premier tome de l'entreprise bourbachique dans l'architectonique des mathématiques – j'ai fait un compte-rendu de cette *Théorie des ensembles* (Hermann, Paris, 1970) dans le *Bulletin canadien de mathématiques*, vol. 15, (no. 4), 1972 : 623-626.

On sait que c'est le théorie des espèces de structures, structures ensemblistes, structures d'ordre et structures topologiques (les structures-mères) qui constituent l'armature de ces fondements, mais ce qui nous importe dans le présent contexte, c'est que Weil a toujours privilégié la théorie élémentaire des nombres et la théorie algébrique des nombres (corps finis) sans pour autant rejeter la théorie analytique des nombres à l'exemple de Kronecker qui a dégagé le contenu arithmétique et algébrique des fonctions elliptiques devenues les courbes elliptiques de la théorie de la modularité qui a donné les conjectures de Weil (démontrées par Deligne et autres) au centre nerveux de la géométrie algébrique contemporaine ; Weil a aussi contribué à la preuve de Wiles du dernier théorème de Fermat en fournissant un élément important sur la question de la modularité et en la proposant comme exercice pour un étudiant doué qui s'est avéré être Wiles ![3]

André Weil dans une lettre à sa sœur Simone Weil en 1940 dit qu'il a bien inventé et non découvert la notion d'espace uniforme – une généralisation de la notion d'espace métrique qui permet la continuité uniforme. Mais Weil ne se prive pas d'outils classiques comme le concept de corps algébriquement clos, l'arène de cardinalité dénombrable de tous les polynômes à coefficients entiers avec au moins une racine ou solution, mais c'est cette arène qui permet les extensions finies comme les corps finis, terre d'accueil de l'arithmétique modulaire avec l'anneau quotient Z/nZ des entiers relatifs (positifs et négatifs). Tout anneau commutatif est le quotient de l'anneau des polynômes $Z[(X_a)]$ pour a appartenant à A l'anneau des polynômes à coefficients entiers qui ouvre la passage aux corps finis, l'arène privilégiée de Weil. Il importe de noter dans ce contexte que la notion de variété algébrique, un autre objet d'études privilégié de Weil, peut être défini comme l'ensemble des racines d'un nombre fini de polynômes à plusieurs indéterminées. Si l'on assoit cet univers polynomial dans un espace topologique (avec ensembles ouverts), on obtient les fondements de la géométrie algébrique contemporaine. Le concept de schéma chez Grothendieck inspiré par la notion de système modulaire de Kronecker n'a pas d'autre origine, puisque un schéma de type fini est un espace topologique muni d'un anneau de polynômes à un nombre fini d'indéterminées. Le dernier avatar de la notion kroneckerienne est celui d'espace perfectoïde (dû à Peter Scholze), une généralisation de la notion de schéma. Une autre invention de Grothendieck, la notion de topos *étale* d'un schéma repose sur un site étale qui est une généralisation de la notion d'espace topologique en version *locale* dans un topologie sans points. La notion d'espace se réduit en fin de compte aux structures topologiques qu'on asseoit sur les assises polynomiales d'une arithmétique modulaire comme dans le cas de l'arithmétique p-adique et l-adique des théories cohomologiques contemporaines en géométrie algébrique et arithmétique. La tradition mathématique de l'arithmétique p-adique, une création de Hensel élève de Kronecker, jusqu'à l'arithmétique l-adique (pour un nombre premier fixé $l \neq p$) et de système modulaire (*Modulsystem*) de Kronecker jusqu'à la notion de schéma (avec la notion de topos étale d'un schéma sur un site étale) chez Grothendieck et celle d'espace perfectoïde de Peter Scholze peut être considérée l'héritière naturelle du programme kroneckerien de l'arithmétique générale (*allgemeine Arithmetik*) comme l'ont reconnu Grothendieck et Langlands dans leurs programmes respectifs à la suite d'un André Weil qui a vu en Kronecker le véritable initiateur de la géométrie algébrique – voir là-dessus mon article "Kronecker in Contemporary Mathematics. General Arithmetic as a Foundational Programme", *Reports on Mathematical Logic*, 48 (2013) : 37-65.

NOTES

1. Weil se garde bien de la logique formelle, de la théorie des ensembles cantorienne et de la théorie des catégories, comme je le dis dans une note finale de l'article. Kreisel a même qualifié Weil de grand mathématicien et de nain logique (*logical dwarf*), ce dont Weil s'est moqué royalement, lui qui confinait la logique au rôle adventice d'hygiène des mathématiques dans le meilleur des cas. Pour la théorie

cantorienne, Weil ne peut tolérer l'arithmétique transfinie, lui qui a toujours insisté sur l'arithmétique finie jusqu'à la limite de l'infini dénombrable. Quant à la théorie des catégories, Weil et Henri Cartan se sont opposés à son introduction dans le programme de Bourbaki, malgré les souhaits de Eilenberg et Mac Lane à l'époque. Certains pourraient penser que c'est avec vengeance que la théorie des catégories contemporaine s'est appropriée (en l'élargissant) la notion de structure, la pierre de fondation de l'édifice Bourbaki : cet élargissement va jusqu'à *l'axiome d'univalence* de Voevodsky qui stipule que l'identité pour objets mathématiques quelconques est équivalente à l'équivalence, i.e. $(A = B) \cong (A \cong B)$. C'est là le principe du nouveau structuralisme, comme le dit Awodey. Il est intéressant de noter à ce sujet que Bourbaki aux mains d'André Weil a redéfini la notion d'isomorphisme (parmi bien d'autres) et définit une théorie axiomatique *univalente* pour deux structures qui sont *nécessairement* isomorphes – voir *Théorie des ensembles*, N. Bourbaki, Hermann, 1970, E.R. 37. Serait-ce là l'ancêtre bourbachique de l'axiome d'univalence et *nécessairement isomorphe* veut-il dire égalité ? On admettra que la notion première d'égalité est celle d'égalité numérique pour la théorie univalente des entiers et des réels. Il y a bien sûr plusieurs relations d'équivalence à part l'égalité numérique, relation de congruence, classes d'équivalence, etc. Sans doute veut-on un axiome d'univalence pour les théories multivalentes comme la topologie ou sa généralisation dans la notion grothendieckienne de topos dont la logique interne est intuitionniste, héritant ainsi de l'interprétation naturelle des ouverts d'un espace topologique en termes d'une algèbre de Heyting. Il n'est pas étonnant à ce compte que la théorie de l'homotopie de Voevodsky ait trouvé un allié naturel dans la théorie intuitionniste des types de Martin-Löf – c'est aussi une théorie intuitionniste au sens large ! Sur la notion de structure, voir aussi mes articles « La notion théorétique de structure » dans *Dialectica*, vol. 23 (1969), 217-227 où je m'inspire de la première édition de la *Théorie des ensembles* de 1939 et « Constructivisme et structuralisme dans les fondements des mathématiques », *Philosophiques*, vol.1, no.1(1974), p. 83-105. On pourra consulter aussi mes comptes rendus de *Théorie des ensembles* de N. Bourbaki, édition de 1970 dans le *Bulletin canadien de mathématiques*, vol. 15, no. 4 (1972), p. 623-626 et de *Théorie axiomatique des ensembles* de J. L. Krivine (P.U.F.,1972) dans le même *Bulletin canadien de mathématiques*, vol. 15, no. 3 (1972), 463-465. Pour ce qui est de la théorie des nombres proprement dite, voir mon article « Foundational Problems of Number Theory », *Notre-Dame Journal of Formal Logic*, vol. 19 (1978), 92-100.

2. C'est le titre de mon article de 1989 dans *Dialectica* 43 (4) : 329-337 « Finite Arithmetic with Infinite Descent » dont j'avais envoyé le manuscrit à Weil ; il m'avait répondu dans une lettre du 23 mars 1988 du Princeton Institute for Advanced Study qu'il approuvait mon usage de la descente infinie, mais qu'il était « trop peu logicien » pour commenter ma tentative de formalisation.

3. À propos de l'attitude quelque peu hostile de Weil à l'égard de Grothendieck qui semble refléter celle de Kronecker vis-à-vis Cantor, comme je le note à la fin de l'article, on peut penser que l'important mathématicien Jean-Pierre Serre aurait pu servir de médiateur entre Weil et Grothendieck. En effet, Serre confie dans son eulogie de Weil « La vie et l'œuvre d'André Weil » dans *L'enseignement mathématique* (vol. 45, 1999, p. 5-16) que ses nombreux échanges avec Weil ont été parmi les plus fructueux de sa carrière. Par ailleurs, on sait que Grothendieck a consulté fréquemment Serre sur des questions mathématiques dans de longues conversations téléphoniques ! et qu'il n'a jamais désavoué son estime pour Serre. En tout cas, le texte de Serre met en relief les contributions majeures de Weil en théorie des nombres où il parle de résultats

effectifs c'est-à-dire computables – Serre dit plutôt explicitables – en analyse et en géométrie algébrique où les conjectures de Weil ont orienté tout le développement de la géométrie algébrique contemporaine en plus du rôle majeur que Weil a joué dans la conjecture de Tanyama-Shimura-Weil qui a mené à la preuve de Wiles du dernier théorème de Fermat. Par ailleurs, Weil a souvent adopté une attitude critique à l'endroit d'autres mathématiciens qui utilisent des subterfuges, trucs ou astuces pour obtenir des preuves par méthodes *indirectes* et lorsqu'il doit utiliser une méthode non constructive, il lui suffit parfois d'invoquer «un facile passage à la limite» pour justifier l'emploi de méthodes transcendantes plus élégantes, comme dirait Hermann Weyl, le grand mathématicien allemand qui a lui-même privilégié l'approche constructiviste en mathématiques. Il faut garder à l'esprit que les résultats de finitude en théorie des nombres ou de comptage de points en géométrie arithmétique ne sont pas toujours *de facto* constructivisables ou explicitables, selon l'expression de Jean-Pierre Serre. Le constructivisme mathématique s'avère plus laborieux et donc moins élégant…

Un bel exemple des styles contrastés de Weil et Grothendieck est la théorie de la descente. La descente au sens de Fermat est une méthode privilégiée dans les travaux de Weil en théorie des nombres et en géométrie algébrique, alors que Grothendieck pratique un «yoga général intuitif» dans un langage catégorique, comme il l'écrit dans son texte *Techniques de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique* (Sém. Bourbaki 12, 1959/1960, p. 369-390). À l'évidence, les théorèmes d'existence (non constructive, par définition) résultant de ces techniques de descente n'ont rien à voir avec l'arithmétique fermatienne dans le style rigoureux de Weil que certains jugent aride. À la fin, il faut peut-être se montrer indulgent vis-à-vis Grothendieck qui, dans son texte *Récoltes et semailles* de 1985 (en quelque sorte son testament mathématique), revient sur la notion de topos qu'il décrit comme le lit ou la rivière profonde où viennent s'épouser géométrie et algèbre, topologie et arithmétique, logique mathématique et théorie des catégories, structures continues et structures discrètes dans une union aux accents poétiques d'une vieille chanson française du 17^{e} siècle, *Aux marches du palais.* C'est à cette rivière profonde que tous les chevaux du roi s'abreuveront, comme le dit encore un Grothendieck toujours inspiré par la balade enfantine. Si l'on en juge par la fécondité de son œuvre, il faut accorder à Grothendieck une place sur les marches du palais des mathématiques contemporaines. Peut-être que le palais lui-même est u-topique, si l'on pense que les U-topoi de Grothendieck logent dans des univers au-delà d'un cardinal inaccessible dans la hiérarchie cumulative des rangs de la théorie axiomatique des ensembles; la structure ascendante des rangs représente-t-elle les marches du palais inaccessible dans un ciel idéal, dernier refuge des poètes et des mystiques? À la limite, peut-être que ce sont eux qui ont le dernier mot dans la nuit sidérale, le silence éternel de ces espaces infinis qui ne les effraient plus…

The Use of Infinity in Pure Number Theory and Algebra

1. INTRODUCTION

I want to emphasize in this critical foundational note two central uses of infinities in contemporary number theory, the theory of *p-adic* numbers and the notion of infinite prime places in arithmetic geometry. K. Hensel introduced *p-adic* integers in his new foundations of the theory of algebraic numbers stating explicitly that his (valuation-theoretic) endeavour was independent of ideal theory (Hensel 1897) while E. Steinitz published his algebraic theory of fields in the Dedekindian spirit (Steinitz 1910). Dedekind's ideal theory is the set-theoretic counterpart of Kronecker's theory of domains of rationality (*Rationalitätsbereiche*). Finally, André Weil, the founder of modern algebraic geometry has initiated his work on the arithmetic of algebraic curves avoiding ideal theory like Hensel in the line of Kronecker's general arithmetic (*allgemeine Arithmetik*). Weil's foundational viewpoint is alive in contemporary arithmetic geometry up to Grothendieck's and Langland's programs while Kronecker is still present in Grothendieck's notion of scheme as a generalization of Kronecker's modular systems *Modulsyteme* (see Dieudonné 1974, pp. 59-61) and in Langlands' idea of functoriality or transfer principle from arithmetic information to analytic data in the footsteps of Weil's cohomology theory. One could even venture to say that Grothendieck's general motivic program of correspondences between arithmetic, algebra and analysis is inspired by Kronecker's *Jugendtraum* – Langland's program explicitly refers to it (see Gauthier 2013, chap. 4). In that connection Kronecker expresses himself unequivocally in his treatment of complex multiplication – over imaginary quadratic fields – as he says that its object is taken from analysis, i.e. elliptic functions, but the motive is given by algebra and the direction and goal are defined by arithmetic (see Gauthier 2015, p. 63). Hilbert, in his famous 1900 list, emphasizes the significance of the 12th problem of his list concerning Kronecker's proposition on abelian fields over an arbitrary algebraic domain of rationality, which he considers as one of the deepest and far-reaching problems at the internal junction of number theory, algebra and the theory of functions (analysis). It is in that context that I examine the role of infinities in number theory.

2. HENSEL'S THEORY OF P-ADIC NUMBERS

In his 1897 paper on a new foundation of the theory of algebraic numbers (*Über eine neue Begründung der Theorie der algebraischen Zahlen*), Hensel introduces his theory of *p-adic* numbers by emphasizing the analogy between the theory of algebraic functions of one variable and the theory of algebraic numbers following in the footsteps Kronecker's major work (see Kronecker 1882). Hensel puts down two formulas as the foundations of his theory

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = a_0 (x - x_1) \dots (x - x_n) \qquad (1)$$

and

$$\mathbf{F}(x) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p^M) \qquad (2)$$

for M the power of prime p. His idea is to associate ramification points of an algebraic function to (rational) ramification places of a prime polynomial in a locally finite field. Hensel's intention was to use infinite power series in arithmetic while Kronecker insisted that one does not need the full formal power series beyond (homogeneous) polynomials of finite degree. However *p-adic* number theory involves infinite degree polynomials in an algebraic number field **F**, a finite extension of the rational field **Q.** We denote an infinite prime p as p^∞. An infinite prime p^∞ is a *p-adic* valuation

$$v_p : \mathbf{Z} \rightarrow \mathrm{N} \qquad (3)$$

defined as

$$v_p\,(n) = max : \{v \in \mathrm{N} : p^v/n\} \text{ if } n \neq 0, \text{ otherwise } \infty \text{ if } n = 0 \qquad (4)$$

where v is the highest exponent for p^v to divide n and Hensel lemma comes in to lift p to any finite power. From a set –theoretic point of view, the set

$$\{0, p^\infty\} \tag{5}$$

is a final segment of the well-ordered set of the ω's in Cantor's second number class. Since there is a countably infinite set of infinite primes over p^∞ and although $\mathbf{Z}_p$, the ring of prime integers and $\mathbf{Q}_p$ the field of fractional prime numbers are both uncountable sets, the set $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ is countable and must be counted as belonging to Cantor's second class of ordinals up to ε_0, which itself contains a countably infinite set of primes in the sequence of the ω's. But the final segment $\{0, p^\infty\}$ is not expressible as an isomorphism type in that sequence since its order type is incomparable or irreducible to any n and is therefore not representable in Cantor's normal form which has the status of an infinite ordinal polynomial (see Gauthier 2018, Theorem 2).

However, Kronecker's ideas extended into Hensel's *p-adic* number theory are in the arithmetical-algebraic spirit. Steinitz' extension goes a little further…

3. STEINITZ' ALGEBRAIC THEORY OF FIELDS

Steinitz published his *Algebraische Theorie der Körper* (Steinitz 1910) in which he explicitly says that he extends Kronecker's notion of indeterminates into the infinite in order to define the notion of the algebraic closure for any field with *supernatural* numbers as a generalization of the natural numbers in the formal product

$$\omega = \prod p^n{}_{\boldsymbol{p}} \tag{6}$$

over all primes p with $n_p = \infty$ for infinite primes or places. Steinitz numbers are alien to *p-adic* numbers, since their absolute value is archimedean while *p-adic* numbers live in complete ultrametric non-archimedean space. Ostrowski's theorem establishes though the equivalence of their absolute values over $\mathbf{Q}$

$$|\cdot|_\infty \leftrightarrow |\cdot|_p, \tag{7}$$

but Steinitz' main point was to extend Kronecker's domains of rationality (*Rationalitätsbereiche*), the effect of which was to translate Dedekind's fields (*Körper*) into a full set-theoretic framework using the axiom of choice or Zorn's lemma – Steinitz says axiom of Zermelo – in order to obtain the completion of every field (real numbers, complex numbers, valued fields), thus extending or replacing Kronecker's indeterminates by what Steinitz calls transcendentals or infinites. One could conclude here that Steinitz achieved a set-theoretic continuation (akin to analytic continuation in complex analysis) of Kronecker's general arithmetic of forms (homogeneous polynomials).

The notion of algebraic closure for an arbitrary algebraic extension **K**' of a commutative field **K** implies that any polynomial ≥ 1 has at least one root in **R** or **C**, as if we had a transfinite version (in any cardinality $\aleph_0$, $2^{\aleph_0}$ or even $2^{\aleph_0}$ et $2\uparrow2^{\aleph_0}$) of Gauss' fundamental existence theorem of algebra. Needless to say that contemporary algebraic geometry in the *toposical* landscape of Grothendieck's universes requiring an uncountable (strongly) inaccessible cardinal transcends the territory of the algebraically closed fields and ascends to a Platonic realm of *indeterminate* ideal entities as if embedded in a set-theoretic *meta-universe* rejected by Kronecker and finally repudiated by Hilbert (see Gauthier 2013). It is not disputable that Dedekind's ideal-theoretic enterprise with Steinitz completion has met with a great success in the hands of Hilbert, Emmy Noether, van der Waerden as a main object of abstract algebra, algebraic geometry and also mathematical logic, especially model theory from Tarski to A. Robinson. Still, arithmetic algebraic geometry strives for finiteness results with infinite means that lead ultimately to finite arithmetic. Let us notice, for example, that Arakelov's theory of Diophantine equations in higher dimensions has made fruitful use of infinite primes not without recourse to the method of descent inspired by A. Weil's work on isogeny heights active in Falting's proof of Mordell's conjecture. However, let us have a closer look at Kronecker's finitistic theory of forms or modular systems in the background of a large part of contemporary arithmetic theory.

4. KRONECKER'S THEORY OF ALGEBRAIC INTEGERS

Kronecker's arithmetic program of algebraic quantities (*algebraïsche Grössen*) is essentially contained in two papers (Kronecker 1882 and 1883). Since we are dealing with polynomials in the sense of Kronecker, I shall use essentially Kronecker's notion of the content of polynomials $con(P_L)$ and $con(Q_L)$ for which I reconstruct Kronecker's argument (see Gauthier 2013). Remembering that the content of a polynomial with integer coefficients is condensed in the greatest common divisor of its coefficients, we shall exhaust the content in the canonical decomposition of polynomials where descent is effected to arrive at irreducible polynomials, much in the same way as in Euclid's proof of the divisibility of composite numbers by primes. Now the fact (Gauss's lemma) states that the product of two primitive polynomials (with the g.c.d. of their respective coefficients = 1) is primitive can also be had with infinite descent and *reductio ad absurdum*. From this fact combined with the fact that there is unique decomposition into irreducible (=prime) polynomials, we obtain unique prime factorization. Kronecker's version of unique decomposition rests on the formulas

$$\prod_{h=1}^{r} M_k U_{hk}$$

and

$$\prod_{i=j+k} c_i = \sum_{j+k=i} a_j b_k$$

where the M's are integral forms, the U' indeterminates and the c's as integral coefficients

$$j = (0,\ldots, m) \text{ and } j = (0,\ldots, n).$$

We shall read it in the form of

$$\prod_{i=1}^{m+n} (1 + c_i x_i) = \sum_{i=0}^{m+n} (c_i x^{m+n-1}) = \sum_{m+n=1} (a_m b_n).$$

Kronecker's generalization uses the convolution product for polynomials

$$\sum_h M_h U_h \cdot \sum_i M_{m+i} U^{i-1} = \sum_k M'_k U^k$$

so that the product mentioned above

$$\prod_h \sum_k M_k' V_{hk}$$

is "contained" in the resulting form and the product can be expressed as

$$\sum_k M_k' U^k = M_k M_{m+1}{}^{k} + M_k M_{m+1}{}^{k-1} + M_k M_{m+1}$$

in the decreasing order of the rank *k* of the polynomial sum. This linear combination obtained by the convolution product and the finite descent of powers shows simply that integral rational forms generate integral algebraic forms, i.e. algebraic integers. One can see this decomposition of forms as a generalization of Gauss's lemma (*Disquisitiones Arithmeticae*, art. 42) which states (see Edwards 1990, p. 1):

Let *f* and *g* be monic polynomials in one indeterminate with rational coefficients. If the coefficients of *f* and *g* are not all integers, then the coefficients of *fg* cannot all be integers.

Remembering that a simple form of Gauss's lemma is that the product of two primitive polynomial is primitive and a primitive polynomial being a polynomial having 1 for the g.c.d. of all its coefficients, one sees immediately that Kronecker's theory of content is a vast generalization of Gauss's result. As shown above, the Kronecker's notion of content or inclusion «*Enthalten-Sein*», that the coefficients of one form can be included in another and mutual inclusion, results in an equivalence relation; a further generalization is afforded by passing to forms of higher order «*Stufe*» where forms and divisor systems or modular systems coincide.

5. WEIL'S ARITHMETIC OF FINITE FIELDS

Already in his doctoral dissertation "L'arithmétique sur les courbes algébriques" (see Weil 1929), Weil adopts the method of infinite descent in the wake of Mordell's work on finiteness results in the number field **Q** inspired by Poincaré's pioneering paper (see Poincaré 1901) on the arithmetical properties of algebraic curves – Poincaré used the expression "a finite number of hypotheses" to define infinite descent –. In that early work, Weil insists that his arithmetical orientation is independent of any ideal theory and Steinitz transcendentals or infinites are called infinite systems of points as they are simply discarded to the profit of a finite calculus, the arithmetic of counting points. Faltings' proof of Mordell's conjecture on the finite number of rational points for an algebraic curve of genus ≥ 2 uses also a generalized descent on heights under isogeny a notion developed by Arakelov and Faltings, but originally owed to Weil who in his work on algebraic varieties searched to connect arithmetic, algebra (abelian varieties) and analysis (Riemann surfaces) much in the manner of Kronecker's *Jugendtraum.*

In order to emphasize the purely arithmetical side of infinite descent, let me quote Weil (see Weil 1983) on Fermat's descent. Weil describes infinite descent in terms of contemporary algebraic number theory :

> Infinite descent à la Fermat depends ordinarily upon no more than the following simple observation : if the product $\alpha\beta$ of two ordinary integers (resp. two integers in an algebraic number-field) is equal to an m-th power, and if the g.c.d. of α and β can take its values only in a given finite set of integers (resp. of ideals), then both α and β are m-th powers, up to factors which take their values only in some assignable finite set. For ordinary integers this is obvious ; it is so for algebraic number-fields provided one takes for granted the finiteness of the number of ideal-classes and Dirichlet's theorem about units. In the case of a quadratic number-field $\mathbf{Q}\sqrt{(N)}$, this can be replaced by equivalent statements about binary quadratic forms of discriminant N.
>
> (see Weil 1984, pp. 335-336).

The important fact about algebraic number fields is that they are not algebraically closed and the Steinitz' desideratum with the axiom of choice is totally alien to Kronecker's domains of rationality as H. Edwards puts it for numerical extensions of a function field **K** :

> It is usual in algebraic geometry to consider function fields over an *algebraically closed field* – the field of complex numbers or the field of algebraic numbers rather than over **Q** (the field of rational numbers). In the Kroneckerian approach, the transfinite construction of algebraically closed fields is avoided by the simple expedient of adjoining new algebraic numbers to **Q** as needed.
>
> (see Edwards 1990, p. 97).

The other major aspect of Weil's arithmetical spirit is indeed the finite arithmetic of polynomials with integer coefficients and indeterminates of Gaussian and Kroneckerian heritage. In his seminal work "Number of solutions of equations in finite fields" (see Weil 1949) where appear the famous Weil conjectures, there is no place for Steinitz infinites or transcendentals, nor for infinite systems of points. Rather, Weil starts from the last entry of Gauss' *Tagebuch* on congruences and biquadratic residues. This was the birth place of the generalized Riemann hypothesis according to Weil and it concerns the number of solutions of equations in $\mathbf{Q}(\sqrt{N})$ which is the firm ground of descent, as Weil states in his description of Fermat's infinite descent. As a matter of fact, Weil begins his paper with (polynomial) equations in the form

$$a_0 x_0{}^n{}_0 + a_1 x_1{}^n{}_1 + \ldots + a_r x_r{}^n{}_r = b \qquad (14)$$

and

$$a_0\, x_0{}^n + \ldots + a_r x_r{}^n r = 0 \qquad (15)$$

to end up with the rational function of an alternating product of polynomials with integer coefficients

$$\frac{F(X) = (X^{m+1} - 1)(X^{m+1} - X)\ldots\ (X^{m+1} - X^m)}{(X^{r+1} - 1)(X^{r+1} - X)\ldots\ (X^{r+1} - X^r)} \qquad (16)$$

which determines the number of rational points of $\mathbf{F}(q)$ in a finite field of q elements. That is the polynomial foundation or the ground field of the Riemann rational zeta function in a Kroneckerian context (see Weil 1949) which Weil emphasizes in (Weil 1950). In that context, Weil (1976) also offers an appraisal of Kronecker's work on elliptic functions with complex multiplication in (imaginary) quadratic fields

$$\mathbf{K} = \mathbf{Q}\sqrt{}-d.$$

Kronecker makes use of infinite descent when he describes the decomposition procedure of homogeneous polynomials down to irreducible polynomials (see chapter 4. above). For Weil's conjectures, B. Dwork succeeded in proving that the zeta function on any algebraic set is rational with the help of *p-adic* analysis, but S.A. Stepanov gave an elementary proof without the help of *p-adic* analysis and finally E. Bombieri still improved on it with a short proof on counting the number of rational points over finite fields. Deligne's final proof of Weil's conjectures follows diverse routes, generalized descent and decomposition procedures which are not (yet !) part of elementary or pure number theory, but remain a testimony to Weil's arithmetic program on finite fields up to the Taniyama-Weil or Taniyama-Shimura-Weil conjecture (including Fermat's Last Theorem proved by A. Wiles) to which Weil contributed essential conceptual developments or evidence as Wiles says (see Wiles 1995), for example the functional equations for Dirichlet's L-series (see Weil 1967). The Taniyama-Weil conjecture states that "Every elliptic curve over **Q** is modular" and Weil would not hesitate to trace its arithmetic-geometric ancestry to Kronecker's work on the arithmetic of elliptic functions (see Weil 1949). A further indication of Kronecker's influence or program (Weil coined the term), is Weil's reference in (Weil 1967) to a paper by J.I. Igusa on the Kroneckerian model of fields of elliptic modular curves (Igusa 1959).

6. CONCLUDING REMARKS. ARITHMETICAL FOUNDATIONS

The internal arithmetic of algebraic quantities which Kronecker called general arithmetic is part and parcel of pure number theory as is Fermat's infinite or indefinite descent. This Fermat-Kronecker arithmetic is the mathematical historical background of André Weil's work in number theory and algebraic geometry. One could declare that infinities are banished in elementary number theory, only potential infinity "denumerable at infinity", as the arithmetician would say, could resist banishment. Constructive mathematics extracts the elementary (non-analytic) content of mathematical statements and theories in order to gain more information. More information means more certainty, as Hilbert would claim in the finitist Kroneckerian viewpoint he finally endorsed after having appropriated many fundamental ideas of Kronecker not without criticizing the opponent to Cantor's paradise. Hilbert created a metamathematical proof theory by arithmetizing mathematical proofs in formal logical systems in order to uncover what he called "*das inhaltiche logische Schliessen*" or the internal logic of mathematical theories. Hilbert did introduce ideal entities "*ideale Elemente*", as detours "*Umwege*" to entertain infinites or transcendentals as Steinitz dubbed them, but only to eliminate them afterwards by a process of infinite descent (see Gauthier 2015, chap. 3). All this militates for a constructivist standpoint in the foundations of mathematics, particularly in number theory and in contemporary arithmetic geometry with the wealth of finiteness results and for an arithmetical logic as the internal logic of the F-K arithmetic on finite fields with Fermat's descent and Kronecker's modular systems. It is in order though to admit that the legacy of the F-K arithmetic with Kronecker's program from Poincaré, Mordell to Weil, Grothendieck, Deligne, Faltings, Langlands, Scholze, the recent Fields medalist in arithmetic geometry, extends from the finitistic standpoint to an explicit infinitistic perspective opened by Kronecker's descendents Hensel and his *p-adic* number theory enlarged to *p-adic* analysis (nowadays to *l-adic* and *adic* arithmetic geometry**)** and Steinitz' algebraic theory of fields, but the original inspiration remains the same insofar as the ultimate goal is finiteness results unreachable in the set-theoretic Cantorian transfinite arithmetic or in the set-theoretic infinite Dedekind-Peano arithmetic. After all, Kronecker did not stop investigating elliptic functions in order to enucleate their algebraic arithmetic core.

* **A Personal Note.** André Weil, in a letter – dated March 23, 1988 from Princeton Institute for Advanced Study – approved of my cogent use of the method of infinite descent in the preprint of my *Dialectica* paper (see Gauthier 1989), but declined any comment on my attempted formalization of the notion, pledging that he was not enough of a logician (*trop peu logicien*). It is well known though that Weil was no friend of mathematical logic, transfinite set theory or category theory. In the Foreword of his *Basic Number Theory* (1974), Weil seems to launch an attack in the style of Kronecker vis-a-vis Cantor against useless generalizations of basic results like the Riemann-Roch **t**heorem saying that they border on theology – the attack is presumably directed at Grothendieck's categorical version of the Riemann-Roch theorem **–.** My book on the arithmetical foundations of logic (see Gauthier 2015) is dedicated to the memory of the great arithmetician André Weil.

REFERENCES

1. Dieudonné, J. (1974), *Cours de Géométrie Algébrique* I, PUF, Paris.
2. Edwards, H.M. (1990), *Divisor Theory*, Birkhäuser, Boston.
3. Gauthier, Y. (1989), "Finite Arithmetic with Infinite Descent", *Dialectica*, **43**, 4, 329-337.
4. Gauthier, Y. (2013), "Kronecker in Contemporary Mathematics. General Arithmetic as a Foundational Programme", *Reports on Mathematical Logic*, **48** : 37-65.
5. Gauthier, Y. (2015), *Towards an Arithmetical Logic. Arithmetical Foundations of Logic*, Birkhäuser, Basel.
6. Gauthier, Y. (2018), "On Cantor's Normal Form Theorem and Algebraic Number Theory", *International Journal of Algebra*, vol.**12**, no. 3 : 133-140.
7. Grothendieck, A. and Raynaud, M. (1971), *Revêtements étales et Groupe fondamental* (*SGA1*), *Séminaire de Géométrie algébrique du Bois-Marie 1960-1961.* Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag.
8. Hensel, K. (1897),"Über eine neue Begründung der Theorie der algebraischen Zahlen", *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, **6**(3) : 83-88.
9. Igusa, J. I. (I959), "Kroneckerian Model of Fields of Elliptic Modular Functions", *American Journal of Mathematics*, Vol. 81, no. 3 : 561-577.
10. Ireland, K. and Rosen, M. (1982), *A Classical Introduction to Modern Number Theory*, Springer-Verlag, New York.
11. Kronecker, L. (1882), "Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen", in *Werke*, ed. by K. Hensel, 5 vols., Chelsea, New York, vol. III : 245-387.
12. Kronecker, L. (1883), "Zur Theorie der Formen höherer Stufen", *Werke,* vol. II : 419-424.

13. Steinitz, E. (1910), "Algebraische Theorie der Körper", *J. reine angewandte Math*. vol. **37** : 167-309.
14. Weil, A. (1941), "On the Riemann Hypothesis in Function Fields", *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **27** : 345-347.
15. Weil, A. (1949), "Number of solutions of equations in finite fields", *Bull. Amer. Math. Soc*. **55** : 497-508.
16. Weil, A., (1950), "Number Theory and Algebraic Geometry", *Oeuvres scientifiques. Collected Papers*, vol. I : 442-452.
17. Weil, A. (1967), "Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen", *Math. Ann.,* Vol. **149 :** 165-172.
18. Weil, A. (1974), *Basic Number Theory*, 3rd edition, Springer-Verlag, Berlin.
19. Weil, A. (1976), *Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker*, Springer, Berlin.
20. Weil, A., (1984), *Number Theory. An Approach through History. From Hammourabi to Legendre*, Birkhäuser, Basel.
21. Wiles, A. "Modular Elliptic Curves and Fermat's Last Theorem", *Annals of Mathematics*, **141** (3) : 443-551.

CHAPITRE 23

Commentaire de “Hilbert and von Neumann on the Mathematical Foundations of Quantum Mechanics”

Ce texte est issu d’une conférence que j’ai donnée à l’Université d’Édimbourg en 1996 dans le cadre du congrès de la *British Society for the History of Science* sur le thème « *Crossing the boundaries* » (Traverser les frontières). J’ai corrigé plusieurs fautes d’impression dans un texte qui est apparu sans ma permission sur *Researchgate* et qui a été lu plus de 3,000 fois…

Quoi qu’il en soit, ce texte contient les prémices de mon article « Hilbert’s idea of a physical axiomatics : the analytical apparatus of quantum mechanics » reproduit dans le présent ouvrage. On se souviendra que Hilbert avait déjà provoqué les physiciens en soutenant que la physique était trop difficile pour les physiciens et qu’il fallait confier la tâche des fondements de la physique aux mathématiciens… C’est dans le même sens que m’avait apostrophé dans sa langue un physicien japonais qui défendait Dirac contre von Neumann dont j’avais cité les propos critiques touchant les fondements de la MQ chez Dirac. Je rappelle que Dirac dans son ouvrage de 1930 *Principles of Quantum Mechanics* utilisait un fonction delta δ qui n’a pas de statut fondationnel bien défini :

$$\delta(x) = \{ +\infty, \text{ si } x = 0 \text{ et zéro, si } x \neq 0\} ;$$

pour l’intégrale sur la droite réelle, la fonctionnelle assigne la valeur 1 – on dit fonctionnelle (on dira plus tard une distribution) puisqu’elle est une une fonction de fonction. C’est d’ailleurs dans ce sens qu’elle inspirera l’intégrale de chemins de Feynman, véritable fonctionnelle définie sur tous les chemins intégraux. La fonctionnelle de Dirac est une sorte de version continue de la fonction delta de Kronecker pour des variables discrètes (entiers finis) :

$$\delta_{ij} = \{ 0, \text{ si } i \neq j \text{ et } 1, \text{ si } i = j\}.$$

C'est là une ironie du sort où Kronecker s'immisce *discrètement* dans les fondements mathématiques de la MQ, puisque Hilbert est l'héritier du constructivisme kroneckerien dans sa théorie finitiste des probabilités en MQ, théorie qu'endossera von Neumann. Von Neumann a par ailleurs beau jeu dans son ouvrage de 1932 *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, puisqu'il s'appuie sur la théorie mathématique de l'espace de Hilbert (le terme vient de lui) pour sa formulation classique des fondements mathématiques de la MQ. Il n'est pas question ici d'une querelle de priorité Dirac-von Neumann comme dans le cas Einstein-Hilbert (Einstein n'est pas dans le coup en MQ !), mais plutôt de la solidité fondationnelle de la MQ. On doit quand même la notation bra-ket < | > de Dirac pour les vecteurs d'état dans le formalisme de la MQ…

Pour en revenir à la dispute avec le physicien japonais (ce n'était pas un prix Nobel), j'avais calmé le jeu avec d'autres participants en disant qu'il s'agissait de cultures scientifiques différentes et qu'il fallait dans ce cas aussi traverser les frontières[1].

NOTE

1. À ma courte honte, j'avais servi le même argument à Alfred Landé lors du congrès mondial de philosophie de Vienne en 1968. Landé, qui avait émigré aux Etats-Unis, défendait une position réaliste fondée sur les expériences concrètes du physicien. J'ignorais à ce moment-là que Landé avait déjà soutenu l'interprétation de Copenhague de la MQ et qu'il avait simplement changé son fusil de bord. Mais c'est avec son regard qu'il m'avait fusillé, puisque c'est lui qui avait traversé la frontière !

Hilbert And Von Neumann on the Mathematical Foundations of Quantum Mechanics

1. INTRODUCTION

Mathematical physics can hardly be denied the status of a cross-discipline and mathematical physicists (or physical mathematicians, if I may say) have constantly crossed the boundaries between physics and mathematics. In its very essence, physics is mathematical and the work of Newton, Laplace, Fourier, Maxwell, Helmholtz and Poincaré, to name only a few, can be seen as belonging to mathematical physics. But it is only with the advent of Quantum Mechanics that the fusion of physics and mathematics has been attempted on a grand scale, with maybe the exception of General Relativity (in the work of H. Weyl, [8] especially). The physical theory of QM was borne by the efforts of such men as Born, Dirac, Jordan, Pauli, Schrödinger and Heisenberg. And although Schrödinger's wave formulation, Heisenberg's matrix formulation and Dirac's transformation theory are physico-mathematical constructions on their own right, my thesis is that Hilbert and von Neumann made a breakthrough in their work of 1926 and 1927 together with Nordheim "Über die Grundlagen der Quantenmechanik" [3] – as a point of biographical interest, von Neumann and Nordheim were Hilbert's assistants at the time. Not only did they introduce the sharp separation between the mathematical formalism – what Hilbert called "der analytische Apparat", the analytical apparatus – and its physical interpretation, but they also gave a firm mathematical foundation to the concept of probability and it is this theme that I shall develop in the following.

2. THE AXIOMATIC METHOD IN PHYSICS

It is clear that the notion of analytical apparatus is drawn from the general structure of an axiomatic system and Hilbert makes no mystery of his intention to provide physics with the same kind of axiomatic foundations as geometry. Physical situations must be mirrored in an analytical apparatus, physical quantities are represented by mathematical constructs which are translated back into the language of physics in order to give real meaning to empirical statements. The analytical apparatus is not subjected to change while its physical interpretation has a variable degree of freedom or arbitrariness. What this means is that the mathematical formalism of a physical theory is a syntactical structure which does not possess a canonical interpretation, the analytical apparatus does not generate a unique model. At the same time, axiomatization helps in clarifying a concept like probability which is thus rescued from its mystical state. It is noteworthy that another pair of renowned mathematicians, Hardy and Littlewood, expressed the same opinion at about the same time: "Probability is not a notion of pure mathematics, but of philosophy or physics" [2]. What then is so special about the notion of probability?

3. PROBABILITIES

Probabilities had, long before Quantum Mechanics, been knocking at the door of physics, but Laplace had entitled his work *Essai philosophique sur les probabilités* (1814) after having called it *Théorie analytique des probabilités* (1812). Statistical mechanics can certainly count as a forerunner of QM as far as the statistical behavior of a large number of particles is an essential ingredient in the probability theory of quantum-mechanical systems. But even in the work of pioneers like Born and Pauli, probability has entered QM somehow through the backdoor and it seems that it is only reluctantly that Born, for example, has

admitted the idea of probability (cf. M. Jammer [4]). Later work by Kolmogorov on the axiomatic foundations of elementary probability theory or von Mises and Reichenbach [5] on the frequentist interpretation of probability will achieve some measure of success, but it is the historical event of a rigorous formalization of the notion of probability as it occurs in quantum physics which has not been sufficiently stressed, in my opinion. In line with what I have said at the beginning, I would like now to draw the attention to the mathematical origin of quantum-mechanical probabilities.

4. MATHEMATICAL FOUNDATIONS

If probability has evidently a multiple application in QM, it remains that it is mainly a mathematical notion. Von Neumann's work in 1927-1932 (see [6] and [7]) focuses on what is called the finiteness of the eigenvalue problem. The point here is that any calculation is finite and since we have only finite results, these must be the products of finite calculation which is itself made possible only if the analytical apparatus contains the mathematical structures which enable such calculations. Such a formalism is the complex Hilbert space with

$$|\psi|^2 \in L^2(\mu)$$

where μ is a real positive measure on the functional space L^2 (*i.e.* the equivalence class of square-integrable functions). The integral

$$\int |\psi|^2 \, d\mu$$

is finite, which is equivalent to the fact that, in the theory of bounded quadratic forms, the sum

$$K(x,x) = \sum_{p,\, q=1}^{\infty} k_{pq} \, x_p \, x_q$$

of all sequences $x_1, x_2, \ldots$ (of complex numbers) is finite in an orthonormal system of vectors. That mathematical fact, which Hilbert derived in the theory of integral equations in 1907, states that a linear expression

$$k_1 \, x_1 + k_2 x_2 + \ldots$$

is a linear function, if and only if the sum of the squares of the coefficients in the linear expression $k_1 \, k_2, \ldots$ is *finite*. The theorem, inspired by Kronecker's result on linear forms (homogeneous polynomials), is the very basis of the Hilbert space formulation of QM.

Notice that on the probabilistic or statistical interpretation, the "acausal" interaction between an observed system and an observing system takes place in a given experimental situation and produces a univocal result of finite statistics for real or realized measurements.

In order for real measurements to have real positive probability values, the analytical apparatus must satisfy certain realizability conditions, <*Realitätsbedingungen*>, as Hilbert and von Neumann put it. For example, orthogonality for vectors, linearity and hermiticity for functional operators and the finiteness of the eigenvalue problem for Hermitean operators, as in von Neumann's further work *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* are such constraints of realizability. I do not want to insist upon this, but I link all those constraints to a finitist or a constructivist point of view that ultimately reaches back to Kronecker's arithmetical constructivism in the second half of the 19th century, which required that all mathematics be founded on finite or effective arithmetic. The foundational import of Kronecker's influence can only be sketched here (see my [1]).

Although many people have contributed to the theory of functional analysis, among them Banach, Weyl, Wiener, the mathematician with the greatest influence on von Neumann was certainly Hilbert. Hilbert's foundational attitude is generally described as "finitism" <*finite Einstellung*>. As one of the foremost mathematicians of his time, Hilbert has expressed himself on the foundations of mathematics at various stages of his career. His philosophy of mathematics was supposed to be formalist at one time, but his mature views on the subject are summarized in a 1930 acknowledgement:

> Kronecker has clearly formulated a conception which he has made explicit in numerous examples: his conception corresponds essentially to our finitist viewpoint.

What are the finitist foundations of mathematics? In Kronecker's terminology, finistist foundations correspond to what he called <*allgemeine Arithmetik*> or general arithmetic. General arithmetic is the arithmetic of natural numbers with its algebraic extensions, that is the arithmetical theory of algebraic numbers. General arithmetic seems to exclude transcendental numbers for indeterminate numbers ("*die Unbestimmte*") as Kronecker would say, but Kronecker is more interested in the arithmetical core of transcendental quantities and he would try to extract some determinate relationship from transcendental functions, for example. Arithmetic is then the ultimate foundation on which the whole edifice of mathematics must rest. Hilbert conceives the finitary ideal of arithmetic in the same manner, but he also wants to make room for non-finitary means. Arithmetization of analysis is a desideratum for him as much as it is for Kronecker and Hilbert will even say that arithmetization of geometry is achieved in non-Euclidean geometry through the direct introduction of the number concept. Number means natural, rational and algebraic numbers and Kronecker had shown how to reduce the various concepts of number to the "natural" field, that is the field of natural numbers and its algebraic extensions. As we know, Hilbert will attempt a purely axiomatic justification of transfinite arithmetic with the help of ideal elements in order to rescue the paradise Cantor has created for us, as he says. But his metamathematics or theory of formal systems was meant to continue beyond arithmetic and into analysis by other means. Those means were logical. The intuitiveness of finite arithmetic was relayed by logical laws supposed to be as evident as arithmetic.

When Hilbert explains in his conference of 1925 "*Ueber das Unendliche*" "On the Infinite", that from a finitary point of view <*finiter Standpunkt*>, there are two kinds of formulas in mathematics, the first ones corresponding to finitary statements and the second ones to ideal structures – which are deprived of meaning, "*sinnlos*" – he simply translates Kronecker's language of a pure arithmetic and its indeterminate extensions (with ideal

elements) into the metamathematics or proof theory he hopes to build. Logic must insure the passage from finite arithmetic to transfinite arithmetic and analysis and Hilbert devised a logical (transfinite) choice function (named epsilon) to bridge the gap between the finite and the infinite. The problem of consistency called for the final legitimation of classical mathematics, but, as we know, that goal could not be achieved.

It seemed to me important to delineate Hilbert's stance in the foundations of mathematics, since it helps explain central features of his contribution to mathematical physics – one should note that Hilbert has contributed to other topics in mathematical physics including his work co-authored with Richard Courant on *Mathematical Methods in Physics*. Undoubtedly, Hilbert's influence is noticeable in von Neumann's contributions to set theory and logic, but these remain scarce and von Neumann has not developed a position of his own on that matter, although he has contributed to many other subjects besides Quantum Mechanics, to mention only the theory of automata and quantum logic. Von Neumann's well-known proof of the impossibility of hidden variables – as reworked with Birkhoff in 1936 – can be seen as the birthday of the subject. Von Neumann came back to quantum logic at the end of his life and he discussed in his paper "Quantum Logics" the case of a continuous geometry without points and whose elements are all the linear subspaces of a given space ; von Neumann thought that the logic of quantum probabilities (frequencies) could be built upon such a geometry. But here the probability measures must be infinite in order to be convergent and the probability statements that express those measures are required to have a finite meaning, as Reichenbach claimed for the verifiability theory of his probability theory [5].

To sum up, Hilbert and von Neumann can be said to have crossed many boundaries in mathematics, physics, foundations of mathematics, logic and even philosophy. Their pioneering work in the foundations of Quantum Mechanics is but one example of the

intellectual proficiency of both mathematicians. Quantum Mechanics was not the major field of activity for Hilbert, but it certainly was the arena for von Neumann's most important contributions to science. Hilbert provided the mathematical and philosophical background while von Neumann embarked in the business of offering a full account of the analytical apparatus of QM. Whether Hilbert and von Neumann have succeeded in putting QM on a firm basis, it is to the physicist and the philosopher of physics to decide, since the latter is the one in charge of the validation of theories with respect to their applicability, efficiency and relevance for contemporary science and philosophy.

5. CONCLUSION

From a historical point of view, the boundaries crossed by Hilbert and von Neumann might have an import only for those interested in the history of physics or mathematics. But their historical alliance has a broader intellectual significance, if one allows for philosophical perspective. For the philosopher of science, the joint paper of 1927 and the subsequent work of von Neumann mark a new era in the foundations of physics and although it has been heralded by only a few historians or philosophers of science, mathematicians and physicists have put it at the very center of their work. Von Neumann's elaboration of the Hilbert space formalism for Quantum Mechanics is still the conceptual foundation of quantum physics and although it has been criticized by some realist philosophers or physicists-philosophers, (another cross-bred species, besides mathematical physicists, physical mathematicians, philosophical mathematicians and mathematical philosophers, etc.) as an instrumentalist contraption, there is no doubt that the rigorous foundations of QM must be attributed to von Neumann and Hilbert. The main philosophical lesson to be drawn in that context is the idea that an analytical apparatus, a formalism, is not canonical or does not generate its own interpretation. Realism, literal or critical, should learn from mathematical physics, especially the historical episode I have evoked, that bridges between mathematics and physics can take

many shapes or that physical reality can be modeled in more ways than one. The constructivist or anti-realist philosopher of science, who has weak ties with the constructivist school in the sociology of knowledge, a school that originated, as I understand, here in Edinburgh, the constructivist philosopher or historian of science pretends that it is the workings of finite agents equipped with their finite conceptual or linguistic structures which shape a world, physical, mathematical and real, which is otherwise undetermined. I have offered only an example in the history of physics, an example that is also an episode in the cultural history of the XXth century. I hope to have shown, if only very briefly, that Hilbert and von Neumann are exemplary as individuals crossing boundaries.

NOTE

Communication at a meeting of the British Society for History of Science at the University of Edinburg on July 23, 1996 on the theme "Crossing Boundaries".

BIBLIOGRAPHY

1. Gauthier, Y. "Hilbert and the Internal Logic of Mathematics" *Synthese*, 101, 1-14, 1994.
2. Hardy, G. H. and Littlewood, J.E. "Some problems on partitio numerorum III. On the expression of a number as a sum of primes". *Acta Math.* 44 (1923), 1-70.

3. Hilbert, D., von Neumann, J. and Nordheim, L. "Über die Grundlagen der Quantenmechanik" *Math. Ann.* 98 (1928), 1-30.
4. Jammer, M. *The Conceptual Development of Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 1966.
5. Reichenbach, H. *The Theory of Probability,* University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1944.
6. Von Neumann, J. "Mathematische Begründung der Quantenmechanik" in *Collected Works*, vol. I, MacMillan, New York, 1961.
7. Von Neumann, J. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton University Press, Princeton, 1955.
8. Weyl, H. *Raum, Zeit, Materie*, Leipzig, 1917, trans. by H. G. Brose, Dover as *Space, Time, Matter*, New York, 1921.

CONCLUSION

La philosophie et les passages à la limite au-delà du seuil critique

La philosophie reste à l'écart de la limite du seuil critique, puisque l'infini est sa patrie et que les concepts limites sont l'apanage de la métaphysique que je définis comme la théorie des noms inassignables dans un sens proche de Fontenelle qui désignait les infinitésimaux du calcul différentiel comme des quantités inassignables. Évidemment dans le registre métaphysique ou ontologique, les inassignables sont des termes sans référent, l'être, la substance, le monde, l'univers, le tout, le néant, l'infini, le concept, l'idée, la conscience, tous ces substantifs qu'une tradition philosophique millénaire a *substantifiés* en les rapatriant dans un vocabulaire et une grammaire spéculative, tout en faisant l'impasse sur l'origine purement langagière de ces vocables sans référent.

Pour la métaphysique au-delà et après la physique, les limites sont transgressées et les seuils critiques sont franchis dans un élan transcendantal. Ici, il vaut mieux emprunter des chemins de traverse ou des *chemins de travers,* comme on dit au Québec : ce ne sont pas des raccourcis, mais des chemins croches avec bifurcations comme le dit le poète Borges ou comme l'écrit le Heideigger des *Holzwege* qu'on a déjà traduits par « chemins qui ne mènent nulle part ». En tout cas, la critique philosophique doit pouvoir repenser les limites du savoir, que ce soit en mathématiques, en logique ou en physique et en dernière analyse dans la philosophie elle-même. Mais dans cette démarche de la critique du savoir, la vigilance philosophique doit demeurer sur le seuil et c'est seulement dans les limites de la recherche fondationnelle qu'elle doit s'exercer.

1. L'INFINI DES PHILOSOPHES COMME CONCEPT LIMITE

L'infini des philosophes est comme le Dieu des théologiens, inaccessible dans sa transcensdance chez les philosophes, de Descartes à Levinas en passant par Leibniz, Spinoza, Kant, Schelling, Hegel, Husserl et Heidegger (et Wittgenstein). Descartes a opté pour l'infini indéterminé (pour l'espace physique) en réservant l'infini véritable à Dieu, comme dira à sa suite le grand mathématicien français Cauchy qui déclarera « Seul Dieu est infini ». L'univers physique a une extension indéterminée pour Descartes, une idée qui sera reprise par Kant dans sa *Critique de la raison pure* après avoir professé que la toute-puissance divine du Créateur devait produire une créature ou une nature infinie, selon la doctrine de la *potentia infinita* des philosophes et théologiens médiévaux ; c'était là la théorie de l'ouvrage de Kant de 1755 *Histoire générale de la nature et théorie du ciel* dans le sillage de la physique newtonienne qui considérait l'espace et le temps absolus comme les organes de Dieu. Spinoza inspiré par la doctrine cabalistique définira l'étendue et la pensée comme attributs infinis de la substance infinie «*Deus sive Natura*», Dieu ou la nature «*Natura naturata*» doit être infinie comme la substance infinie «*Natura Naturans*». Leibniz, philosophe et mathématicien comme Descartes, rejette la question de l'infini hors des mathématiques «l'infini n'est qu'un outil du calcul». Seul Dieu est infini et est capable de créer une 'infinité d'infinités de possibles', mais dans cette combinatoire, il choisit la meilleure des combinaisons pour créer le meilleur des mondes possibles. Pour Leibniz, l'infinité des possibles est dans l'esprit de Dieu qui embrasse tous les possibles au-delà des combinaisons finies et en fait une infinité d'infinies comme il le dit dans ses *Essais de théodicée*: toutes ces opérations sont simultanées dans l'esprit de Dieu et comme chez Spinoza «*Toto simul sub specie aeternitatis*». Pour Leibniz encore, l'infini se trouve dans la nature, les monades constituant une infinité d'entités infinitésimales en raison du principe de continuité «*Natura non facit saltus*». Le conceptualisme modal de Leibniz aura des répercussions dans le réalisme modal d'un David Lewis dont la théorie des mondes possibles s'apparente à la théorie des multivers en cosmologie contemporaine avec le même problème de consistance interne. Je n'insisterai pas là-dessus, mais l'inaccessibilité des combinaisons infinies d'un ensemble infini $\aleph_0$, soit $2^{\aleph_0}$, condamne à l'inexistence le meilleur des mondes possibles de Leibniz ou monde actuel *désigné* comme tel dans la théorie des mondes possibles de Lewis. La métaphysique possibiliste n'est pas très loin d'une théologie qui a au moins deux mondes à entretenir, le monde terrestre des vivants et le monde céleste des esprits, distinction qui n'est pas étrangère dans certaines situations à la science-fiction des univers parallèles. Dans une métaphysique possibiliste du «tout est possible » ou « tout ce qui est possible est réel ou actuel (ou le sera dans un futur intemporel), l'inconsistance s'associe à l'incontinence conceptuelle.

Dans l'idéalisme allemand, la critique kantienne a eu un effet bénéfique, mais ses successeurs n'ont pas eu la même retenue métaphysique. Fichte s'en est remis à la lumière divine dans sa *Wissenschaftslehre* ou théorie de la science tardive, Schelling a pensé un absolu indifférencié – où toutes les vaches sont noires selon le mot de Hegel – auquel Hegel substitue un Savoir absolu dans la *Phénoménologie de l'esprit* ou une Idée absolue dans la *Science de la logique* et même une conception métaphysique du Tout (*das Ganze*) ou de la Totalité. Le philosophe contemporain Emmanuel Levinas opposera l'infini de Descartes pour qui le concept d'infini vient directement de Dieu à la Totalité hégélienne. Mais chez Levinas, l'infini appartient en propre à une mystique transcendante qui n'est plus l'affaire de la philosophie. Wittgenstein dans la proposition 6.45 de son *Tractatus logico-philosophicus* écrit dans des termes rappelant Spinoza : « La vision (*Anschauung*) du monde *sub specie aeterni* est la vision du monde comme totalité close (*begrenztes Ganze*). Le sentiment (*Gefühl*) du monde comme totalité close est le sentiment mystique. »

À propos de la notion d'infini, il faut cependant reconnaître que Hegel met l'accent sur l'infini qualitatif du rapport dynamique des quantités dans le calcul différentiel en accord avec la perspective proprement mathématique de Leibniz pour qui l'infini ou l'infinitésimal n'est qu'un artifice du calcul alors qu'il suppose une infinité de monades ou entités infinitésimales dans sa métaphysique en vertu du principe de continuité qui doit remplir le continuum de la nature, comme je l'ai noté plus haut Fermat conçoit une *adequalitas* adégalité ou quasi-égalité algébrique entre deux quantités pour éviter d'introduire des quantités infinitésimales et Gauss affirmera que « l'infini (*das Unendliche*) en mathématiques n'est qu'une façon de parler ».

2. CONCEPTS LIMITES ET SEUILS CRITIQUES DE KANT À HUSSERL ET HEIDEGGER

2.1 Kant et le concept de limite

Pour Kant, le concept limite ou le concept frontière *Grenzbegriff* est le noumène ou la chose en soi (*das Ding an sich*) au-delà du phénomène dans la *Critique de la raison pure*. Toute l'entreprise critique de Kant consiste à tracer les limites de la sensibilité et de la raison. La division entre noumènes et phénomènes est la limite de l'intuition sensible disjointe de l'intuition intellectuelle, sans pour autant que le noumène devienne un objet de l'intuition intellectuelle. Les frontières du monde phénoménal ne peuvent être transgressées que par une «Chose» qui transcende le monde phénoménal pour le délimiter, mais cette Chose en soi qui donne l'impulsion (*Anstoss*) au phénomène, mais cette chose en soi est inconnaissable et n'est peut-être qu'une chose de la pensée (*ein Gedankending*) dans les termes de *l'Opus postumum* de Kant. La tentation métaphysique n'est pourtant pas une absente chez Kant et l'idée d'une substance calorique (*Wärmestoff*) ou matière première (*materia prima*) ou éther qui viendrait faire le pont entre le transcendantal et l'empirique serait la condition de possibilité de toute expérience et assurerait le passage des fondements métaphysiques de la science de la nature à la physique selon le titre même de l'ouvrage de 1786 de Kant ; il y a donc passage à la limite en-deçà du seuil critique (*Grenzbegriff*) que Kant avait défini dans la *Critique de la raison pure*.

2.2 Husserl et le concept de limite

Husserl emploiera plutôt le terme mathématique de *Limesbegriff* pour le concept de limite au lieu de *Grenzbegriff*. On trouve le terme *Limes-Idealisierung* qu'on peut traduire par idéalisation à la limite ou encre limite de l'horizon hémisphérique (*ausserste Horizon*, *Limes*) dans son essai sur la spatialité de l'univers physique. Les emplois de la notion de limite sont légion dans la phénoménologie transcendantale, limite de l'objectivation de l'ego, point limite temporel, etc. Il est manifeste que l'idée même de phénoménologie transcendantale doit faire cohabiter la subjectivité transcendantale de l'ego transcendantal et le monde objectif transcendant dans les zones limitrophes du transcendantal et de l'empirique. Tout l'œuvre phénoménologique doit s'employer à préserver les frontières respective des mondes subjectif et objectif jusqu'au monde vécu (*Lebenswelt*) et aux choses elles-mêmes (*zu den Sachen selbst*) selon les injonctions du dernier Husserl. L'égologie husserlienne est un projet philosophique ambitieux, des premiers travaux sur une théorie de toutes les théories possibles jusqu'à la remise en question phénoménologique de la science moderne dans la crise des sciences européennes et au profit du monde de la vie et du retour aux choses elles-mêmes sur une Terre qui ne tourne pas malgré la réplique de Galilée «*eppur si muove*!». Husserl dans ses derniers écrits projette toutefois l'ego transcendantal dans un idéalisme transcendantal de la monade absolue qu'on pourrait identifier à Dieu et on ne peut ignorer la dimension métaphysique de la phénoménologique husserlienne qui transcende ses propres limites idéales et s'aventure au-delà de l'horizon phénoménologique. L'herméneutique de Gadamer inspirée par Heidegger voudra montrer les limites de la phénoménologie husserlienne qui a négligé selon Gadamer la question du langage et voudra introduire la notion de fusion des horizons (*Horizontverschmelzung*) pour comprendre la mulitiplicité des interprétations du monde de la culture. Husserl disait que être, c'est être connu, Gadamer dira que «être, c'est être dit» (*Esse est dici*) dans un prologue à Heidegger. Quant à Heidegger, il prendra la relève de Husserl en phénoménologie dans son analytique de l'existence humaine (*Dasein*). Plutôt que la science, c'est la technique qui sera l'objet de la critique heideggérienne de la modernité. Pour Heidegger, le dernier métaphysicien est le Nietzsche de la Volonté de Puissance (*Wille zur Macht*) annonciatrice de la technique moderne. On ne reprochera pas à Heidegger son entrée en métaphysique dans son ouvrage de 1933 *Einführung in die Metaphysik* qui s'est soldée par une sortie de la métaphysique en passant par le texte séminal sur la question de l'être (*Zur Seinsfrage*, 1959) où il veut démonter la question de l'être – son expression est *Abbau* qui signifie littéralement démontage, démontage d'un décor métaphysique traditionnel pour remonter un nouveau questionnement sur le destin de l'être. Jacques Derrida a voulu voir dans ce démontage une déconstruction sans y voir une reconstruction possible, si ce n'est dans l'errance de la *différance* métaphysique. Heidegger ne veut pas perpétuer la métaphysique de l'être (*Sein*) qu'il veut barrer pour retrouver le sens originaire dans l'intuition grecque du sens de l'être. L'oubli de l'être est le destin de la métaphysique (occidentale) et il est nécessaire d'annoncer le désoubli de l'être dans une mémoire redoublée d'oubli.

2.3 Heidegger et la fin de la métaphysique

Je veux suivre brièvement dans ce qui suit le cheminement de Heidegger pour qui tout est chemin «*Alles ist Weg*», puisque le cheminement est une mise en mouvement «*Be-weg-ung*» comme il aime à le répéter.

2.3.1 Une combinatoire de l'existence

La pensée de Heidegger a été orientée, dès l'origine, vers la question de l'être, du sens de l'être. L'analytique du *Dasein* ou de l'exister humain n'apparaissait que comme reconnaissance préliminaire de l'horizon originaire de la question de l'être. L'analytique existentiale est une description phénoménologique des structures fondamentales de l'existence humaine : les catégories principales ou plutôt les « existentiaux » (*Existenzialien*), comme préfère les nommer Heidegger, de cette analytique, sur le modèle de l'analytique kantienne, sont l'être-au-monde, la spatialité, la temporalité, l'être-avec, l'être-soi, le 'on', le souci, l'être-pour-la-mort, l'historicité. Nous interprétons cette analytique comme une combinatoire, c'est-à-dire comme une théorie des invariants ou structures invariantes de l'existence ; ces invariants sont en nombre fini, leurs transformations sont aussi en nombre fini. Les invariants peuvent être considérés topologiquement, c'est-à-dire selon leur position, leur lieu dans l'existence humaine. Prenons un exemple concret. Dans le sous-chapitre 26 de *Être et Temps* « L'être-là-avec les autres et l'être-avec quotidien », Heidegger, citant Wilhelm von Humboldt, évoque le fait que dans certaines langues les pronoms personnels sont exprimés par des adverbes de lieu ; ainsi « je » se rendrait par « ici », « tu » par « là », et « il » par « là-bas ». Dans un sens heideggérien, c'est là une indication de la spatialité fondamentale de l'existence humaine. Qu'en est-il dans ce contexte de la problématique psychanalytique dans l'analytique du *Dasein* ? Force nous est de reconnaître que le désir (*Begierde*), la pulsion (*Trieb*) ne trouvent pas de lieu dans *Être et Temps*. Seul le langage, et encore à titre d'existential parmi d'autres, est-il thématisé. Heidegger nous dit que la parole comme fondement ontologico-existentiel du langage se constitue de la même originarité que le « se-trouver-là » (*Befindlichkeit*) et le comprendre (*Verstehen*) ; il faut attendre la « *Kehre* », le tournant, pour que le langage devienne le thème principal du dernier Heidegger. Mais ce n'est plus une combinatoire de l'exister humain qui y est traitée, c'est désormais une topologie de l'être.

2.3.2 Une topologie de l'être

Topologie s'entend ici d'une théorie qui étudie les propriétés des figures ontologiques qui demeurent invariantes dans leurs transformations. Le langage du temps ou chronologie domine toute la première phase de la philosophie heideggérienne. Mais comment ce langage du temps est-il lié à un langage de l'espace ou topologie ? Et faut-il voir dans la différence de ces deux langages un critère neuf pour distinguer Heidegger 1 et Heidegger II ou plutôt faut-il tenter de chercher dans cette dualité le contrepoids qu'annonçait *SZ* (ÊT) ? Peut-être faut-il penser le dernier Heidegger en termes de « *Sein und Raum* » (Être et Espace) ? Plutôt que de proposer maintenant une interprétation globale et hasardeuse, nous allons tenter de dépister quelques signes de la topologie heideggérienne.

Le langage de l'espace dans *Sein und Zeit* était réductible à celui du temps. Tout le paragraphe 70 de SZ est consacré à la temporalité comme fondatrice de la spatialité de l'être-là, l'existant *Dasein*. C'est uniquement sur le fondement de la temporalité extatique horizontale qu'est possible l'insertion de l'être-là dans l'espace. L'interprétation heideggérienne de Kant ne dit pas autre chose.

Et puis il y eut Hölderlin, « *Dichterisch wohnet der Mensch auf dieser Erde…* ». L'habitation poétique de la terre, le retour au pays, la demeure, ce sont là les thèmes de la poésie hölderlinienne qui ont déterminé l'orientation de la pensée de Heidegger après 1935. La poésie, celle avant tout de Hölderlin, devient alors « la fondation de l'Être par le verbe « *Dichtung ist worthafte Stiftung des Seins* ». Fondation signifie circonscription d'un lieu, implantation et établissement. « Le dire du poète donne un lieu et une base à l'être-là de l'homme. » L'être-là (*Da-sein*) trouve ou tient lieu (*Da-stand*). L'appartenance de l'être-là à la terre rend possible la station dans la présence de l'Être. La terminologie du second Heidegger est centrée autour de ces thématiques du chemin, de la mise en chemin (*Be-wëgung*), de l'in-joncture (*Er-eignis*), de la con-joncture *(Ge-Stell*), de la demeure, du domaine, du fondement *(Grund*). La constellation qui les rassemble, c'est ce que Heidegger nomme « *das Geviert* », le Quadruple. La pensée du Quadruple est certainement née au contact de la poésie hölderlinienne. Chez Hölderlin, la parole poétique nomme et invoque les dieux, elle parle aussi au peuple des humains, elle dit la jointure de l'Éther et de la terre ; la poésie hölderlinienne est Quatuor dans le sens du Quadruple « *Geviert* ».

La formulation la plus claire que Heidegger ait donnée du virement du langage du temps à celui de l'espace se trouve peut-être dans sa *Lettre sur l'humanisme* (*Ueber den Humanismus*). Le langage est la « maison de la vérité de l'être », l'ex-sistence de l'homme est « le se tenir (*Stehen*) dans la lumière de l'être », l'essence de l'homme est le « là » (*Da*), l'Être est la proximité (*Nahe*) et l'essence de cette proximité est le langage. Et comme caractérisation fondamentale de l'Être, Heidegger parle de la Dimension de l'exstatique de l'ex-sistence. Cette Dimension n'est pas spatiale, elle est ontologique et elle signifie non pas un horizon, mais ce qui comprend tous les horizons, c'est-à-dire la présence stable de l'Ouvert (*das Offene*) chez Rilke et ce que Hölderlin appellerait Éther (*Aether*). Du revirement ou du tournant de la *Kehre*, Heidegger affirme qu'il ne constitue pas une altération du point de vue de SZ, mais l'accès au lieu de la Dimension. Dans la Dimension, on sait que le mot est dérivé du latin «*dimensus*» qui veut dire «mesuré», dans la Mesure de l'Être, donc dans le Quadruple, habite, travaille, pense et parle l'homme.

Sans nous soucier de suivre de près l'évolution du langage de l'espace heideggérien ultérieure à *Über den Humanismus,* évolution qui s'est faite dans le sens d'une accentuation des thématiques de la «stase», par opposition à l'ex-stase, dans des oeuvres comme *Aus der Erfahrung des Denkens* (De l'expérience de la pensée) où apparaît pour la première fois l'expression topologie de l'être «*Topologie des Seyns*» jusqu'à *Der Staz der Identität* (Le principe d'identité) en passant par *Das Ding* (La Chose) et *Was heisst Denken* (Qu'appelle-t-on penser?), nous pouvons essayer, pour terminer, de définir la place de la topologie dans l'une des dernières et des plus importantes publications de Heidegger, *Unterwegs zur Sprache* (En chemin vers le langage). La conférence «*Das Wesen der Sprache*» (L'essence du langage) résume pour nous tout le second Heidegger, celui que nous avons essayé de cerner en nous laissant guider par le langage de l'espace. Le chemin (*Weg*) est la structure dynamique de l'espace. «Tout est chemin» (*Alles ist Weg*), dit Heidegger. La mise en chemin (*Be-wëgung*) rassemble les points cardinaux du Quadruple autour de deux pôles, le proche et le lointain. Mais le lointain lui-même appartient à l'essence du proche, à la proximitude (*Nahnis*). La proximitude est la réciprocité oppositionnelle vers où sont acheminés l'un pour l'autre et l'un vis-à-vis de l'autre les quatre foyers du Quadruple, le ciel et la terre, les dieux et les hommes. L'indication (*die Sage*) est cette proximitude même qui met en chemin, qui construit un chemin (*be-wëgt*).

Comment dire cela en d'autres termes? Le langage apparaît comme le lieu où se manifeste l'injoncture (*Ereignis*) qui éclaire la conjoncture (*Ge-Stell*) du Quadruple. La formule «le langage est chemin» donne le sens de la conférence «*Der Weg zur Sprache*». Le langage est le chemin où s'achemine l'Être en tant que Injoncture.

Nous avons voulu dégager le langage de l'espace dans la dernière philosophie de Heidegger, mais qu'en est-il de la pensée du temps? La pensée chronologique de Heidegger, si elle n'a plus la prétention de SZ n'est pas en rupture avec la pensée topologique. Ce que Heidegger appelait dans SZ historicité «*Geschichtlichkeit*» est devenu après le retournement *avènement* «*Ereignis*», que nous avons traduit par «injoncture», et l'être-là est devenu langage. Est-ce à dire qu'il y a une correspondance parfaite entre les deux phases de la réflexion heideggérienne? Sans doute pas. Mais il semble qu'il y ait entre Heidegger I et Heidegger II, comme on est convenu de dire maintenant, un parallélisme structurel. L'Être se donne d'abord comme lumière (*Lichtung*) dans l'Ouverture du là (*Da*), puis comme injoncture dans l'indication du langage. C'est là la structure essentielle de toute ontologie, qui commence par être un discours sur l'être et finit par être le discours de l'Être lui-même.

Chronologie et topologie sont des composantes de l'ontologie; parce que l'ontologie veut dire la présence, elle doit dire aussi le temps et l'espace. Mais elle le dit dans un discours qui refuse de se voir origine et fin de l'être, qui s'oublie dans sa propre profération. Le langage enveloppe l'être, le temps, l'espace, l'homme; il est, comme le dit si bien Wilhelm von Humboldt, que Heidegger aime citer dans ses derniers travaux, (*Inbegriff alles Denkbaren*) «la totalité du pensable».

Mais Heidegger se refuse à penser le langage sans ontologie. L'être du langage, c'est encore le langage de l'être. A-t-on le droit d'interpréter le dernier Heidegger de l'au-delà de l'ontologie? Il semble que l'Injoncture ne soit plus l'Avent ou l'Avènement (*Geschick*), c'est-à-dire ce qui est en procès, dans le procès de l'histoire, mais ce qui *arrive* (*stattfindet*), ce qui tient lieu et prend place. Ce lieu ou cette place, nous l'avons vu, c'est le Quadruple. Il serait donc justifié de penser l'Injoncture topologiquement. Le temps constituait peut-être à l'origine chez Heidegger l'horizon de la compréhension de l'Être, mais c'est l'espace ou la Dimension qui en est le champ, l'aire, le déploiement aussi bien horizontal que vertical. Cet espace de déploiement et de rassemblement est langage. Le langage est-il lui-même compréhension de l'Être? Est-il soumis à une Présence? Il faut penser bien plutôt le contraire. C'est le langage qui donne présence, qui présente et représente. L'Être et la Pensée dérivent du langage, ce ne sont que deux parallèles sur la terre du langage. Nous retrouvons ici Parménide qui, dans son poème *De la Nature – phusis* qui sera pour Heidegger un des noms originaires de l'être –, établit la correspondance entre l'être et la pensée « *to gar auto noein estin te kai einai* », penser et être, c'est le même, c'est-à-dire qu'il y a adéquation de la pensée et de l'être puisque seul l'être peut être objet de pensée, le non-être n'étant pas ne peut être objet de pensée. Parménide est le premier métaphysicien et pour Heidegger, ce serait plutôt l'étant (*das Seiende*) qui est objet de pensée, l'Être est le fondement insondable de l'étant et le dernier Heidegger, comme nous l'avons vu, annonce la mort de la métaphysique et s'en remet à la parole poétique pour dire la vérité du langage de l'être au-delà de la langue du philosophe toujours prise dans l'oraison funèbre de la fin de la métaphysique, tandis que l'esprit du poète poursuit sa « marche sous l'inconcevable » (*der Gang des Geistes unter dem Undenkbaren*), comme l'écrit Hölderlin.

NOTE

1. Dans ce texte final, j'ai voulu exposer les passages à la limite que représentent les concepts métaphysiques de la tradition philosophique Des compléments d'information sur Kant, Hegel, Husserl et Heidegger peuvent être récupérés dans des textes comme « Ontologie et langage de l'être » *Actes du 7e Congrès interaméricain de philosophie*, vol.1, Québec, Presses de l'Université de l'Université Laval, 1967, p. 335-340 (où j'ai annoncé mon adieu à la métaphysique !), dans mon ouvrage *L'Arc et le Cercle. L'essence du langage chez Hegel et Hölderlin*, Bruxelles et Paris, Desclée de Brouwer et Bellarmin, 1969, dans *Hegel. Introduction à une lecture critique*, Québec, PUL, 2010, *Entre science et culture. Introduction à la philosophie des sciences*, Montréal, PUM, 2005 (le chapitre 6 en particulier pour Heidegger contient des informations bibliographiques que j'ai dû oblitérer) et dans un texte inaugural de ce recueil « L'observateur local à l'observateur transcendantal de Kant et Husserl et aux fondements de la physique contemporaine » paru dans le revue *Philosophiques*, vol. 46, no. 1, 2019, p. 155-177 (ce titre devrait être inversé pour se lire « De l'observateur transcendantal à l'observateur local. De Kant et Husserl aux fondements de la physique contemporaine ».) Je dois noter enfin que les traductions de l'allemand sont de moi, quand elles ne sont pas autrement attribuées.

POSTFACE

Itinéraire anecdotique de la philosophie à la science

PASSAGES : LOGIQUE, MATHÉMATIQUES, PHYSIQUE

Dans cette note finale, je veux retracer les étapes d'un cheminement intellectuel qui s'est déroulé par coups et contrecoups. J'ai choisi de défiler les éphémérides qui marquent les épisodes d'un parcours et la genèse des travaux qui ont mené au présent ouvrage.

1960 – 1962

Lecteur de Hegel à l'adolescence, mon mémoire de maitrise en 1961 sur la pensée du philosophe des mathématiques Léon Brunschvicg a été rédigé sous la direction de Michel Ambacher qui défendait une philosophie de la nature d'obédience bergsonienne assez éloignée de l'idéalisme immanent de Brunschvicg.

1964 – 1966

Rédaction de la thèse de doctorat amorcée en allemand et terminée en français sous la direction de Hans-Georg Gadamer à l'université de Heidelberg. La question du langage centrale dans l'herméneutique de Gadamer a été déterminante dans la thèse publiée sous le titre « L'essence du langage chez Hegel et Hölderlin » publiée en 1969 chez Bellarmin/Desclée de Brouwer. À l'époque, un travail sur la logique de Hegel dans un séminaire du professeur Dieter Henrich sera publié en 1968 dans la revue canadienne de philosophie *Dialogue* sous le titre « Logique hégélienne et formalisation ».

1968 – 1970

Participation au Congrès mondial de philosophie à Vienne avec trois conférences en français, anglais et allemand et rencontres « significatives » avec Gilbert Ryle, Paul Lorenzen, Yehoshua Bar-Hillel entre autres. Publication en 1969 dans *Dialectica* d'un article sur « La notion théorétique de structure » qui inaugure mes travaux sur la théorie des ensembles de Bourbaki et la théorie axiomatique des ensembles dont j'ai rendu compte dans le *Bulletin canadien des mathématiques* en 1972.

1970 – 1972

Dès 1966, l'enseignement de la logique formelle et de la philosophie des sciences à l'Université de Sudbury (1966-1972) mène à des travaux sur les mathématiques et la physique. C'est lors de sa visite à l'Université de Sudbury que j'avais eu le privilège de converser avec le grand mathématicien topologiste Kasimierz Kuratowski, un des pionniers de la topologie moderne. En 1971, j'ai eu des discussions avec E. P. Wigner, Prix Nobel de physique sur les fondements de la mécanique quantique lors d'un colloque à la University of Western Ontario of London. À la même époque, des séjours répétés à l'Université de la Californie à Berkeley et un trimestre à titre d'attaché de recherche (*Research Fellow*) au département de mathématiques de Berkeley à l'invitation de Leon Henkin m'ont permis de rencontrer Tarski, Robert Solovay et Jack Silver entre autres mathématiciens et logiciens – c'est à la suggestion du mathématicien québécois Maurice l'Abbé, alors doyen de la Faculté des arts et des sciences de l'université de Montréal, que Leon Henkin m'avait accueilli à Berkeley. J'avais eu aussi des discussions au département de physique avec Geoffrey Chew défenseur de l'hypothèse du « *bootstrap* » en théorie des particules élémentaires qui m'avait invité à collaborer avec lui – cette idée du *bootstrap* ou d'un corset théorique pour contraindre la consistance interne de la théorie quantique des champs connaît un renouveau aujourd'hui. Mais c'est avec Georg Kreisel de l'Université de Stanford que j'ai eu les plus nombreuses discussions poursuivies en correspondance (avec lettres manuscrites rédigées avec un soin méticuleux) sur de longues années jusqu'à la rupture avant les années 2000 à la suite de chicanes sur les fondements des mathématiques chez Bourbaki, André Weil et Kronecker face à la tradition logicienne qui ont donné lieu à des bravades de part et d'autre résultant à un affrontement de

« *Chutzpah* ». Un seul exemple suffira pour caractériser nos échanges ; je rapporte à Kreisel qui avait vanté mon « flair » pour les questions fondationnelles, que Weil considère que la logique à certains égards introduit des subtilités étrangères à la pratique mathématique, ce à quoi Kreisel réplique d'un ton courroucé : « Gauthier, you know better ! ». Un dossier de Kreisel à Stanford conserve deux lettres de moi à Kreisel dans les années 1980 – j'ignore le contenu de ces lettres, mais j'ai fourni à Kreisel plusieurs précisions au sujet de Bourbaki qu'il disait vouloir vérifier sur place à Paris ! C'est que Kreisel avait un grand respect pour le travail de Bourbaki dont il admirait la rigueur, cette rigueur dont il savait que le premier responsable en était André Weil. Il serait fastidieux de relater les épisodes excentriques et les extravagances ou les vicissitudes de ce « combat de coqs » auquel a été mêlée la mathématicienne Verena Huber-Dyson qui a été la compagne de Kreisel et pour laquelle j'avais écrit une lettre de recommandation à un poste de philosophie à l'Université de Calgary en 1973.

Invitation à l'université de Toronto en 1972 pour enseigner la logique formelle, la philosophie des sciences et les fondements des mathématiques. Rencontre avec le logicien Alasdair Urquhart et les philosophes des sciences Jim Brown, Ian Hacking et Bas van Fraassen ; début d'une durable amitié avec ce dernier. Offre d'engagement permanent à Toronto, mais appel irrésistible de l'*Alma Mater* et retour à Montréal en1973 où je deviendrai professeur titulaire en 1976 jusqu'à la retraite en 2015 après 42 ans en poste et maintenant professeur honoraire.

1974 – 1976

C'est en 1971 que je publie mon article « The use of the axiomatic method in quantum physics » autorisé par le physicien Henri Margenau dans la revue *Philosophy of Science* – l'article contenait quelques remarques critiques à propos de l'approche axiomatique en physique du regretté Mario Bunge, ce qui n'avait pas plu à Bunge qui respectait Margenau. L'article contient quelques idées nouvelles sur la théorie de la mesure et l'observateur qui me vaudront une longue lettre d'approbation du physicien John Archibald Wheeler (le 27 avril 1975). Je lui avais envoyé quelques remarques critiques à propos de son traité *Gravitation* écrit avec la collaboration de K.S. Thorne et C.W. Misner.

Publication en 1976 de mon ouvrage *Fondements des mathématiques. Introduction à une philosophie constructiviste* aux Presses de l'Université de Montréal.

1978 – 1980

Publication aux PUM de mon ouvrage *Méthodes et concepts de la logique formelle* sur le modèle du manuel de Leblanc et Wisdom *Deductive logic* pour la logique élémentaire et sur le modèle du traité de Mendelson *Introduction to mathematical logic* pour la logique avancée. J'ai rédigé la proposition de doctorat honorifique décerné en 1980 par l'Université de Montréal à Hugues Leblanc, le premier philosophe logicien québécois.

Mon article « L'épistémologie française des mathématiques » qui paraît en 1979 dans la revue française *Critique* a suscité de nombreuses réactions et a donné lieu à quelques polémiques. Michel Serres que j'ai connu à Montréal m'avait suggéré d'écrire sur le sujet pour la revue *Critique*.

Par la suite, nombreuses invitations au Séminaire de philosophie et mathématiques de L'École Normale Supérieure de la rue d'Ulm sous la direction de Maurice Loi et René Thom qui se poursuivront jusque dans les années 1990. Amitié avec René Thom dans la même période et échanges avec le mathématicien Jean Dieudonné, collaborateur de Grothendieck, dans un colloque au Luxembourg ; Dieudonné me parlera de néo-thomisme à propos de Thom. Discussion plus « significative » avec le mathématicien constructiviste Roger Apéry que je fais inviter à Montréal où j'ai eu aussi des discussions intéressantes avec l'important mathématicien constructiviste H. Zassenhaus. Rencontre avec le logicien S.C. Kleene que je fais inviter au Séminaire de philosophie et mathématiques à la suggestion de Maurice Loi.

1980 – 1982

Échanges épistolaires avec Irving E. Segal, mathématicien du M.I.T, à propos de son ouvrage de 1976 *Mathematical Cosmology and Extragalactic Astronomy* où il introduit la notion mathématique de l'observateur local comme référentiel lorentzien en relativité restreinte (RR). Inspiré par Segal, j'introduis l'idée de l'observateur local en mécanique quantique dans l'article de 1983 « Quantum Mechanics and the Local Observer » paru dans *International Journal* *of Theoretical Physics*. L'article aura de nombreuses répercussions. Il faut dire que la notion de « local » faisait déjà partie de mon bagage logico-mathématique depuis l'article de 1977 « Intuitionistic logic and local mathematical theories » dans *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik* et se retrouvera dans l'article de 1985 « A Theory of Local Negation : The Model and Some Applications » dans *Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung*.

Mon intérêt pour les théories mathématiques locales avait été suscité par la logique intuitionniste et avivé par les interactions avec les protagonistes montréalais de la théorie des catégories et de la théorie des topoi, groupe animé par mon ami mathématicien André Joyal entouré de Gonzalo Reyes et Mikhail Makai entre autres. C'est que la logique interne des topoi est intuitionniste et la notion de topos héritée de Grothendieck est une généralisation de la notion d'espace topologique où le complément relatif ou pseudo-complément (non booléen) joue le rôle de négation locale dans l'interprétation que j'ai proposée de la logique intuitionniste. J'avais donné une conférence sur le sujet « Intuitionistic logic and category theory » au *5th International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science* (University of Western Ontario, août 1975) en présence d'un pionnier de la théorie des catégories William Lawvere. J'avais à UWO de nombreux amis dont Robert Butts, Bill Harper, Jeffrey Bub, William Demopoulos.

Le 15 avril 1982, je reçois la médaille du Collège de France à l'effigie de François premier sur proposition du professeur Jules Vuillemin. J'y donne une conférence sur « Une théorie de la négation et de la complémentation locales » dans la salle Jean-Pierre Serre. J'en ferai une version en anglais qui paraitra en 1985 sous le titre « A theory of local negation : the model and some applications » dans *Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung* (vol. 25, nos 3-4 : 127-143). Le lendemain, je donnais une conférence sur « La mécanique quantique et l'observateur local » à l'École Normale Supérieure de la rue d'Ulm. J'en ai donné une version en anglais dans mon article de 1983 « Quantum Mechanics and the Local Observer » dans *International Journal of Theoretical Physics* (vol. 22, no 12 : 1141-1152).

1984 – 1987

Séjour à l'automne 1986 à LOMI, l'Institut de Mathématiques de l'Académie des Sciences d'URSS à Leningrad. Ayant appris un peu de russe, je parviens à discuter (en allemand !) avec le mathématicien constructiviste N. A. Šanin et en anglais avec le logicien Yu. V. Matijasevič. À mon retour de Leningrad, j'ai passé quelque temps au Mathematisches Instituut de l'Université d'Amsterdam où j'ai rencontré les professeurs A. S. Troelstra et D. van Dalen.

Lors du congrès international de logique et philosophie des sciences tenu à Moscou en 1987 et après un échange animé avec le mathématicien V. I. Arnol'd à propos des travaux de René Thom en théorie des catastrophes (singularités) et topologie différentielle (la notion de cobordisme), on m'a offert un poste de professeur invité à l'Université Lomonossov de Moscou qui comptait une centaine de professeurs de philosophie.

1988 – 1990

Le séjour en Union soviétique m'avait surtout permis de me plonger dans les travaux du grand mathématicien français André Weil chez qui j'ai découvert Fermat et la méthode de la descente infinie en plus des travaux de Kronecker comme en témoigne mon ouvrage *De la logique interne* paru chez Vrin en 1991. J'avais prononcé en mai 1987 deux conférences, l'une au Mathematical Institute de l'Université d'Oxford et l'autre à l'École Normale Supérieure de la rue d'Ulm sur la distinction entre descente infinie et induction transfinie, distinction que Gentzen avait escamotée dans sa preuve de consistance de l'arithmétique de Peano avec postulat d'induction infinie. Gentzen supputait que l'induction transfinie était une forme légitime de la descente infinie et il était suivi en cela par Kreisel. J'avais tenté d'illustrer la différence essentielle entre les deux procédures, en montrant que la descente infinie de Fermat est une méthode de preuve finitaire en théorie des nombres, alors que l'induction transfinie est une méthode de preuve en théorie des ensembles infinitaire et pour identifier les deux méthodes – il faut faire intervenir une double négation sur un ensemble infini – ce qui est interdit par la logique intuitionniste en vertu du rejet du principe du tiers exclu en logique intuitionniste, comme je l'ai montré dans l'appendice III de *De la logique interne.* Comme je le montre encore dans des textes ultérieurs, la stratégie de la preuve sur l'arithmétique de Peano sans quantificateurs et avec témoins numériques ne modifie en rien le passage au-delà de la limite des ordinaux finis avec un saut quantitatif par-dessus l'ordinal limite oméga de la suite des nombres naturels.

L'influence de Weil se fera sentir dans mon article de *Dialectica* de 1989 « Finite arithmetic with infinite descent » dont j'avais envoyé le texte à Weil qui avait approuvé mon emploi de la descente infinie sans commenter ma tentative de formalisation se disant « trop peu logicien » (Lettre de Weil du 23 mars 1988 du Princeton Institute of Advanced Study). J'ai fait un compte rendu de ses *Souvenirs d'apprentissage* traduit en anglais sous le titre *The Apprenticeship of a Mathematician* dans *Modern Logic*, vol. 4, nº 1 (1994) : 97-100. Mais Weil ne rejetait pas totalement la logique mathématique et ses travaux en géométrie algébrique, géométrie énumérative et théorie de l'intersection compilés dans son texte *Foundations of Algebraic Geometry* (1946 et 1962) ont influencé profondément la théorie des modèles, une des branches de la logique mathématique avec la théorie des démonstrations et la théorie de la récursion. Les champions de la théorie des modèles comme E. Hrukovski, Y. Gurevitch et L. van den Dries l'ont confirmé lors de mes rencontres avec eux à Montréal, Rio de Janeiro et Beijing ! Je rappelle que la théorie des modèles est une théorie des structures, comme la théorie des catégories et la nouvelle théorie de l'homotopie de Voevodsky et que c'est Bourbaki sous l'impulsion de Weil qui a promu la notion de structure au rang de notion mathématique fondamentale. Dans le même sens, Weil ne s'est pas privé de faire appel à ce qu'il appelle « le dénombrable », c'est-à-dire l'ensemble infini des nombres naturels pour investiguer les fondements de l'analyse mathématique et en tirer un produit fini arithmétique (résultats de finitude), comme l'avait fait avant lui Hermann Weyl. Comme Poincaré, ce dernier refusait de penser que l'ensemble des sous-ensembles d'un ensemble infini dénombrable était bien ordonné (théorème de Zermelo). Pour Brouwer, le continu était un procès en devenir (*ein Prozess im Werden*). Si le passage à la limite signifie aussi près de la limite comme horizon récessif, la tentation est grande de regarder au-delà de l'horizon dans le continu non dénombrable, mais si on le fait, il faut revenir en deçà comme Kronecker l'avait fait dans la théorie de la multiplication sur les nombres complexes et avec ses formules limites en théorie des fonctions elliptiques. Pour Weil, au-delà du « dénombrable à l'infini » selon son expression, il ne faut pas se priver de recourir à l'occasion aux éléments idéaux (*ideale Elemente*) comme les appelait Hilbert, quitte à les éliminer après coup, comme l'avait proposé Hilbert ; Weil cite l'exemple du point à l'infini fort utile en géométrie projective classique et au-delà en géométrie algébrique contemporaine (avec de multiples points à l'infini), infinis dont on peut se dispenser en fin de compte. Ce ne seraient là que des artifices ou artéfacts du calcul, selon l'adage de Leibniz à propos des infinitésimaux ou quantités infinitésimales, une maxime qui s'appliquerait aussi bien aux quantités infiniment grandes, n'en déplaise aux cantoriens passés et actuels…

1990 – 2000

Le leitmotiv de la logique interne aura été présent dans mes travaux depuis cette époque avec la multiplication des titres en français et en anglais sur la logique interne des théories en mathématiques et en physique théorique.

Le texte principal de cette période « Hilbert and the internal logic of mathematics » est paru dans la revue *Synthese* en 1994 et autorisé par Georg Kreisel, grand spécialiste de Hilbert, dans son évaluation critique manuscrite ! L'article était une reprise en anglais d'un texte en français paru dans un numéro spécial de la *Revue internationale de philosophie* en 1993 à l'invitation du logicien belge Paul Gochet. La suite de mes travaux portera la marque de la logique interne de l'arithmétique baptisée F-K pour Fermat-Kronecker élaborée sous le titre de logique polynomiale modulaire annoncée dans l'article de 1998 « A polynomial translation of Gödel's functional interpretation », dans la revue polonaise *Bulletin of the Section of Logic of the University of Lódz*.

Pour la suite des choses, les textes du présent ouvrage avec leurs commentaires explicatifs dessinent le trajet ou la trajectoire d'un travail sur les fondements et les fondations du savoir mathématique et scientifique dans l'optique d'une philosophie constructiviste, avec un objectif synoptique selon la définition de la philosophie chez Platon.

Collection **Logique de la science** 王

Cette collection accueille des ouvrages consacrés à la logique et à la philosophie des sciences entendues dans leur sens formel. La logique de la science, un titre emprunté au philosophe américain C.S. Peirce, rend compte de la logique interne du savoir qui peut se décliner en plusieurs versions et il est légitime de parler de logiques au pluriel, comme on parle de sciences au pluriel. L'éventail des recherches pourra s'ouvrir pour faire place à des analyses portant sur l'intersection et l'héritage commun des traditions philosophiques et scientifiques. Enfin, les travaux d'épistémologie générale ou historique dans les sciences sociales et humaines ne sauraient être exclus dans cet esprit d'ouverture qui doit caractériser l'idée d'une logique interne du discours scientifique. Si le principe de tolérance invoqué par le logicien et philosophe des sciences R. Carnap doit présider à une telle entreprise, c'est pour mieux assurer le rôle de la philosophie comme vigile du savoir.

Le symbole 王 utilisé pour représenter la collection signifie la quantification « effinie » ou illimitée de la logique arithmétique et il est tiré de l'idéogramme pour *wang*, roi en langue chinoise.

Dans cette collection

Yvon Gauthier, *Logique arithmétique. L'arithmétisation de la logique*, 2010.

Jean Leroux, *Une histoire comparée de la philosophie des sciences. Volume 1. Aux sources du Cercle de Vienne*, 2010.

Jean Leroux, *Une histoire comparée de la philosophie des sciences. Volume 2. L'empirisme logique en débat*, 2010.

Yvon Gauthier, *Hegel. Introduction à une lecture critique*, 2010.

Yvon Gauthier, *Nouveaux entretiens sur la pluralité des mondes*, 2017.

Passages à la limite et seuils critiques

Morceaux Choisis/Selected Papers

Dans ce recueil, j'ai voulu regrouper des textes publiés en français et en anglais dans les vingt dernières années; ces textes font écho à mes recherches dans le domaine des fondements de la logique, des mathématiques et de la physique dans une perspective constructiviste depuis un demi-siècle. C'est donc un parcours fondationnel sur la longue durée que j'ai voulu reproduire sans négliger la dimension critique des enjeux scientifiques de la logique, des mathématiques et de la physique avec la vigilance philosophique qui remet aussi bien en question la philosophie traditionnelle dans ses retranchements métaphysiques. Cet assemblage n'est pas un florilège, mais plutôt un pot-pourri de textes parus dans des revues qui ne sont pas facilement accessibles pour les *papers* en anglais qui composent un *medley* d'articles scientifiques sans musique, mais avec un *leitmotiv* et des thèmes majeurs récurrents.

J'ai ajouté des commentaires introductifs pour chacun des articles pour les situer dans le temps de leur publication et dans les débats actuels touchant le savoir scientifique.

Yvon Gauthier a enseigné la philosophie pendant cinquante ans dans les universités de Sudbury, Toronto et Montréal. Il a publié seize ouvrages de philosophie, logique formelle et philosophie des sciences et plus d'une centaine d'articles scientifiques en logique mathématique, fondements des mathématiques et physique théorique.

Philosophie

ISBN 978-2-7637-4827-6

9 782763 748276

Logique de la science

Presses de l'Université Laval
pulaval.com