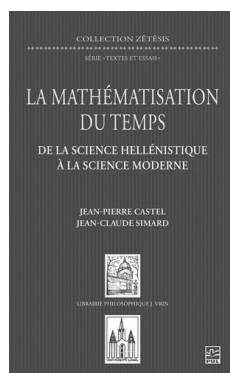


Notes de lecture

Éditeurs, auteurs, envoyez-nous vos livres ; lecteurs souhaitant intervenir dans ces Notes de lecture, contactez-nous*.

La mathématisation du temps. De la science hellénistique à la science moderne

Jean-Pierre Castel,
Jean-Claude Simard
Presses de l'Université
Laval, 44 €
ISBN 978-2-7116-4405-6



L'ouvrage cité est co-signé par Jean-Pierre Castel et Jean-Claude Simard. Il a été publié, il y a un peu plus d'un an, au deuxième trimestre 2024, aux Presses de l'Université Laval (collection Zêtésis) et par Vrin, et compte 534 pages. Il s'intéresse à ce qu'on appelle la révolution scientifique du XVII^e siècle et examine comment la science moderne s'est construite autour d'une véritable mathématisation du temps ; la mathématisation de la nature datait de la science hellénistique. L'origine chrétienne, souvent invoquée comme condition de possibilité de la révolution scientifique, est démontée. Le développement du principe d'inertie avec Galilée a joué un rôle essentiel (l'analyse des temps égaux, via les horloges mécaniques, a eu une influence sur la conceptualisation scientifique du temps). Ce livre s'adresse à toute personne intéressée par l'histoire et la philosophie des sciences, en particulier l'évolution des rapports entre temps, mouvement et mathématiques, et qui souhaite reconsidérer certains récits classiques de l'histoire des sciences, à l'aune d'une tradition hellénistique souvent sous-estimée. Pourquoi ce livre est-il important aujourd'hui ? À l'heure où la physique contemporaine interroge à nouveau la nature du temps – de la relativité générale à la gravité quantique – revenir sur la genèse de la mathématisation du temps éclaire nos propres questionnements. Ce livre ne se limite pas à une enquête historique : il met en lumière les choix

conceptuels qui ont structuré la science moderne et qui continuent d'influencer nos manières de penser. Comprendre comment le temps est devenu une grandeur mesurable, puis une variable mathématique, c'est aussi comprendre les racines de notre rapport scientifique au réel. Ce livre, par son érudition et sa profondeur, rappelle que les concepts scientifiques ne sont jamais donnés une fois pour toutes : ils naissent, évoluent, parfois disparaissent – et que les mathématiques, en donnant forme à ces concepts, sont autant des outils que des créatrices de mondes possibles.

Dans la liste qui précède, je voudrais insister sur les points suivants.

La révolution scientifique : mathématisation de la nature ? La période hellénistique. Un des points sur lesquels les auteurs mettent l'accent est celui qui concerne ce qu'on appelle la mathématisation de la nature / de la science, qui serait caractéristique de la révolution scientifique, et qui aurait été absente de la démarche de connaissance des siècles précédents. Cela est tout à fait erroné et les auteurs évoquent de façon très approfondie la période hellénistique. La mathématisation de la nature n'était pas une nouveauté. L'importance d'Archimède dans la mathématisation de la statique, précédé par les travaux d'Euclide, sont là pour nous montrer la profonde erreur du propos ci-dessus (sans remonter à Pythagore). La période hellénistique a vu une première contestation des idées d'Aristote sur nombre de points, oubliés par la suite lorsque le Moyen-Age chrétien a repris avec force le discours du père fondateur grec. Si ce n'est pas la mathématisation de la nature, il y a une mathématisation, mais de quoi ? C'est, par contraste avec la mathématisation de la statique avec Archimède, celle du temps. Selon J.-P. Castel et J.-C. Simard, ce qui caractérise profondément la science moderne, c'est n'est pas la mathématisation en général, mais la mise en équation du temps, dimension longtemps restée qualitative avant d'être mesurée et modélisée.

Le rôle de la chrétienté ? En attendant de reprendre ce dernier point, arrêtons-nous un instant sur une autre idée reçue. Dans la révolution scientifique, le rôle de la chrétienté occidentale aurait permis aux esprits d'ac-

**Quadrature*, Jean-Paul Truc
jean-paul.truc@prepas.org

cepter l'idée de lois de la nature, édictées et garanties par un Dieu personnel et détenteur de la raison, l'idée d'un lien entre le ciel et la terre (interdit par Aristote) avec en particulier l'incarnation. Les auteurs montrent avec force les incohérences d'une telle vision, proposée par de nombreux critiques (cf. le texte fondateur d'Alexandre Kojève). Pourquoi la révolution scientifique aurait-elle attendu le XVII^e siècle alors que la chrétienté serait dominante dès les premiers siècles de notre ère ? D'autant que la période hellénistique avait déjà vu la contestation d'Aristote et aussi vu la mathématisation à l'œuvre, comme nous l'avons dit. Les auteurs déconstruisent de façon heureuse l'hypothèse d'une origine chrétienne de la révolution scientifique, pour lui substituer une perspective plus historique, ancrée dans la longue durée, où la tradition hellénistique joue un rôle bien plus important qu'on ne le croit généralement. Le livre propose une relecture historique où les facteurs institutionnels, techniques et conceptuels pèsent plus lourd que les arguments théologiques.

La mathématisation du temps, le principe d'inertie et Galilée Le moment fondateur est celui où la science moderne construit un temps pour la physique. Le rôle du principe d'inertie – concept difficile à admettre et qui a demandé une longue maturation – apparaît comme central. Les auteurs analysent les contributions de Galilée et Descartes. Ils insistent sur la puissance de l'idéalisation : imaginer un mouvement sans frottement, dans le vide, pour établir des lois générales. Mais, également, ils analysent de façon fine le rôle des expériences de Galilée sur les plans inclinés et horizontaux, qui a joué un rôle déterminant (voir aussi plus loin). La première loi mathématique mettant en œuvre le temps est celle de la chute des corps, avec la relation entre temps et accélération. Les auteurs montrent comment différentes discussions interfèrent (changement de paradigme cosmologique géocentrisme → héliocentrisme, nature du vide, lois du mouvement...) l'abandon du géocentrisme ayant précédé la compréhension du mouvement, sans en être un préalable.

Quelle philosophie pour la science ? En plus de l'argumentation solide présentée à l'instant, faut-il souligner la très grande érudition qui traverse tout l'ouvrage, avec des références nombreuses, tant à des scientifiques dont les apports s'entrecroisent et se soutiennent, que des commentateurs se succédant depuis des siècles sur toutes ces questions. Qui suis-je par rapport aux auteurs pour fournir mon propre commentaire ? On lit donc comment des idées reçues sont malmenées de façon heureuse, mais on trouve tout autant une réflexion approfondie et argumentée sur ce qu'est la science, ses rapports avec la philosophie et une vision du monde, ses rapports avec les mathéma-

tiques, l'expérimentation, les éventuelles expériences de pensée. L'importance des recherches concrètes est soulignée. Galilée a bien fait des investigations avec des plans inclinés, ce que certains nient encore : on a retrouvé ses notes. Aucune raison a priori ne nous imposait le principe d'inertie, rappelle Poincaré. Il relève d'un choix conceptuel fécond, à partir d'une évidence empirique.

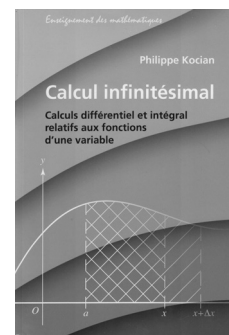
Quelques remarques personnelles pour finir, sur un point intrigant : la notion même de temps n'est jamais véritablement interrogée par les auteurs. Elle est supposée exister comme une réalité qu'il faut révéler par la mathématisation. Pourtant, le temps n'a rien d'évident : ne faudrait-il pas plutôt dire que Galilée construit un temps pour la science, plutôt qu'il ne le découvre ? L'espace et le mouvement restent omniprésents dans la dynamique, même quand le temps devient l'outil de son intelligibilité. La révolution scientifique ne me paraît pas correspondre à un « simple » basculement de la mathématisation de l'espace vers celle du temps. Le temps n'est pas « tout seul ». L'espace et le mouvement sont bien encore là et il est intéressant de voir dans le texte fondateur de Galilée (les discorsi) que l'accélération n'est pas par mise en évidence par une fonction $x(t)$, mais par des comparaisons de vitesses à différents moments. Cet aspect de mouvements comparés renvoie à une épistémologie relationnelle : n'est-ce-pas là le point de basculement qui nous fait abandonner Aristote ? Voilà des recherches à prolonger, mais ce n'est pas le premier sujet du livre. J'en recommande vivement la lecture, en particulier pour sa réflexion sur la science, elle est fondamentale : la science apparaît comme un alliage subtil entre observation concrète et induction, formation de concepts abstraits, mathématisation. Les rôles respectifs de ces différents moments sont analysés à propos de l'étape cruciale de la révolution scientifique du XVII^e siècle.

Bernard Guy

Calcul infinitésimal Calculs différentiel et intégral relatifs aux fonctions d'une variable

Philippe Kocian
EPFL PRESS, 55 €
ISBN 978-2-88915-578-1

Un gros livre de 664 pages pour couvrir « l'essentiel de la matière traitée lors de la première année d'étude au sein d'une haute école d'ingénie-



rie suisse », ce qui correspond à peu près à notre maths-sup (dont on préfère maintenant taire le nom, qui sonne pourtant mieux que première année de CPGE...). L’auteur est professeur à la haute école d’ingénierie HE-Arc de Neuchâtel. Certains pourront trouver qu’il y a surabondance de propositions, mais ceci a le mérite de prendre par la main, en quelque sorte, les étudiants, pour leur faire découvrir toutes les situations pouvant se présenter. On peut parler ici d’une pédagogie de l’accompagnement, différente de certains de nos livres destinés aux élèves de prépa, et ce point mérite d’être souligné.

Pour le reste, tout est là : corps des réels, généralités sur les fonctions réelles (notamment continues), fonctions usuelles (y compris trigonométriques et hyperboliques), suites, séries, intégrales de Riemann, développements limités, calcul intégral et différentiel et leurs applications (aires, longueurs, volumes), équations différentielles (ordinaires, à variables séparables, linéaires), etc.

Chaque chapitre comprend de très nombreux exemples et illustrations ; les cent-vingt dernières pages du livre constituées d’exercices proposés, avec leurs réponses, permettront à l’étudiant de tester sa bonne compréhension du cours. En outre, de nombreuses digressions historiques émaillent le propos, comme par exemple (p. 466), le problème de la stabilité d’une arche ou d’une voûte, résolu par Robert Hooke au XVIII^e siècle, qui montre que le profil doit être celui d’une chaînette inversée, comme c’est le cas pour la structure métallique du jardin d’hiver de Sheffield (illustration extraite de la page 467).

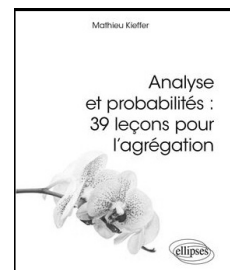


Sheffield Winter Garden

En résumé, un bel ouvrage de référence pour les étudiants de premier cycle.

Analyse et probabilités : 39 leçons pour l’agrégation

Mathieu Kieffer
Ellipses, 42 €
ISBN 9782340105560



Ce livre de plus de 400 pages, écrit par Mathieu Kieffer, professeur agrégé, se veut une préparation à la première épreuve orale de l’agrégation interne de mathématiques. Il reprend les méthodes qui ont fait le succès du précédent, pas de virtuosité inutile, mais des bases solides sur lesquelles fonder un exposé. Nous avons apprécié une leçon solide sur les séries (chapitre 3), évoquant les théorèmes d’Abel et la sommation par paquets, ainsi qu’un autre grand classique (chapitre 8), les fonctions convexes et leurs applications (comparaison des moyennes, inégalités de Hölder et Minkowski, normes de Hölder). Parmi les sujets de probabilités, nous retiendrons Conditionnement et indépendance, exemples (chapitre 30), où figure une jolie preuve probabiliste de la formule relative à la fonction indicatrice d’Euler :

$$\phi(n) = n \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i}\right),$$

où $n = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$ est la décomposition en facteurs premiers de n .

L’ouvrage se décompose en une première partie de 27 leçons d’analyse, qui se clôt sur les théorèmes de point fixe, suivie de 6 leçons de probabilités allant des notions d’espérance et variance jusqu’aux couples de variables aléatoires discrètes. Six autres leçons d’analyse figurent à la fin de l’ouvrage, parmi lesquelles l’exponentielle complexe et la fonction Gamma. Dans ce dernier exposé figurent notamment les démonstrations de la définition d’Euler

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n n!}{x(x+1)\dots(x+n)},$$

de la formule de Weiersrass

$$\Gamma(x) = \frac{e^{-\gamma x}}{x} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{x}{k}}}{1 + \frac{x}{k}},$$

ainsi que de la formule de duplication de Legendre. Une bonne révision pour nos lecteurs ?

Jean-Paul Truc

Suite des notes de lecture en page 24.

Une caractérisation des lois normales : une approche par transport optimal d’un théorème de C. Stein

par Erik THOMAS*

Résumé.

Dans cet article, nous retrouvons une caractérisation de la loi normale centrée réduite donnée par C. Stein dans [8]. Notre preuve utilise le transport optimal (partie II).

I Introduction

La loi normale est sûrement la loi la plus importante de toute les Mathématiques, au moins pour le théorème central limite. La loi normale est caractérisée par son espérance μ et son écart-type σ : sa densité est alors donnée par :

$$f_{\mu,\sigma}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}.$$

Voici le résultat que nous allons établir.

Théorème 1 (Théorème de Stein, version faible).

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue telle que $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$ et vérifiant

$$\forall g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}), \quad \int_{\mathbb{R}} g'(x) f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} xg(x) f(x) dx. \quad (1)$$

où $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ est l’ensemble des fonctions lipschitziennes donc absolument continues (donc dérivables presque partout en vertu du théorème de Rademacher (voir [7])). Alors, f est la densité d’une loi normale centrée réduite.

Remarque 2. L’égalité précédente est à comprendre au sens suivant : si l’une des deux intégrales converge au sens de Lebesgue, alors l’autre intégrale converge au sens de Lebesgue et les deux intégrales sont égales.

* erik.thomas@mailfence.com

Dans [8], C. Stein donne une nouvelle caractérisation de la loi normale :

Théorème 3 (Théorème de Stein). Pour tout variable aléatoire réelle Z , on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f'(Z) - Zf(Z)) &= 0 \text{ pour toute fonction} \\ f \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}, \text{ bornée et vérifiant} \\ \int_{\mathbb{R}} |xf(x)| dx &< +\infty \\ \iff Z &\hookrightarrow \mathcal{N}(0,1) \end{aligned}$$

Le résultat de Stein généralise celui proposé ici, mais ici nous restons à un niveau élémentaire.

II Transport optimal dans $\mathbb{R}$

Dans cette partie, nous établissons un résultat concernant le transport optimal dans $\mathbb{R}$. Grâce à la relation d’ordre naturelle $\leq$, les résultats sont beaucoup plus faciles à obtenir que dans le cas général. Nous renvoyons à [4] et [6] pour des résultats plus généraux.

Ainsi, le but n’est pas d’énoncer des résultats avec des hypothèses optimales, mais seulement des résultats qui nous suffisent ici. Encore une fois, nous renvoyons à [4] et [6]. Pour une présentation exhaustive du transport optimal, nous renvoyons à [10].

Théorème 4 (Transport optimal dans $\mathbb{R}$). Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, mesurables, à valeurs positives et dans $L^1(\mathbb{R})$. On suppose que